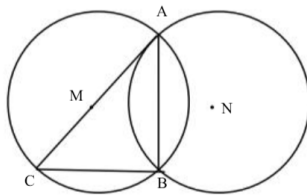


## מבחן מס' 1

פרק ראשון- שאלות קצרות, סדרות והסתברות

1. א. הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי עבור כל  $n$  טבעי מתקיים:

$$2 \cdot 5 + 7 \cdot 6 + 12 \cdot 7 + 17 \cdot 8 + \dots + (5n - 3)(n + 4) = \frac{n(5n^2 + 33n - 8)}{3}$$



ב. המעגלים  $M$  ו- $N$  נחתכים בנקודות  $A$  ו- $B$ . הרדיוסים של המעגלים זהים.  $AC$  הוא קוטר במעגל  $M$  המשיק למעגל  $N$  בנקודה  $A$ . הוכיחו:  $BC = AB$ .

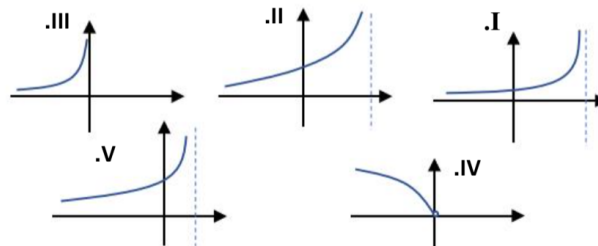
ג. 1) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x) = -2x^3 + 15x^2 - 36x + 25$   
2) הפונקציה  $g(x)$  מוגדרת לכל  $x$ . הנגזרת של  $g(x)$  מקיימת:

$$g'(x) = \frac{-2x^3 + 15x^2 - 36x + 25}{(3x^2 + 2)^5}$$

כמה נקודות קיצון יש לפונקציה  $g(x)$  ומהו סוג הקיצון? נמקו.

ד. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}}$ . בציור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות

$$k(x) = \frac{1}{f(x)}, j(x) = h(2x), h(x) = 4g(x), g(x) = f(x-16), f(x)$$



התאימו בין הגרפים  $I - V$  ובין הפונקציות  $f(x), g(x), h(x), j(x)$  ו- $k(x)$ . נמקו.

2. הסדרה האינסופית  $a_1, a_2, a_3, \dots$  מוגדרת על-ידי כלל הנסיגה  $a_{n+1} = a_n + t^n$ ,  $a_1 = t$ .

הסדרה  $b_1, b_2, b_3, \dots$  מוגדרת על-ידי כלל הנסיגה  $b_n = a_{n+1} - a_n$ .

הסדרה  $c_1, c_2, c_3, \dots$  מוגדרת על-ידי כלל הנסיגה  $c_n = b_n + b_{n+1}$ .

א. (1) הראו שהסדרות  $b_1, b_2, b_3, \dots$  ו-  $c_1, c_2, c_3, \dots$  הן סדרות הנדסיות.

(2) הביעו את  $c_1$  באמצעות  $t$ .

ב. נתון:  $c_1 < 0$ . הסבר מדוע הסדרה  $c_1, c_2, c_3, \dots$  היא סדרה מתכנסת שאינה עולה ואינה יורדת.

ג. (1) הביעו את  $a_2$  ואת  $b_2$  באמצעות  $t$ .

(2) נתון:  $a_2 + b_2 = -\frac{3}{4}$ . מצאו את  $t$ .

(3) חשבו את סכום הסדרה האינסופית  $c_1 + c_2 + c_3 + \dots$ .

ד. נתון:  $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_n = -2^{-55}$ . מצאו את  $n$ .

3. מועמדים ללימודים במכללה כלשהי עוברים כולם מבחן קבלה וגם ראיון אישי.

רק המועמדים שהצליחו בשתי הדרישות מתקבלים למכללה.

$\frac{1}{6}$  מן המועמדים שהצליחו בראיון האישי, לא הצליחו במבחן הקבלה.

$\frac{13}{16}$  מבין המועמדים עמדו בהצלחה לפחות באחת מן הדרישות.

מחצית מן המועמדים הצליחו רק באחת מן הדרישות.

36 מועמדים עברו בהצלחה את מבחן הקבלה.

א. כמה אנשים ביקשו להתקבל למכללה?

ב. כמה מבין המועמדים שהצליחו בראיון האישי הצליחו במבחן הקבלה?

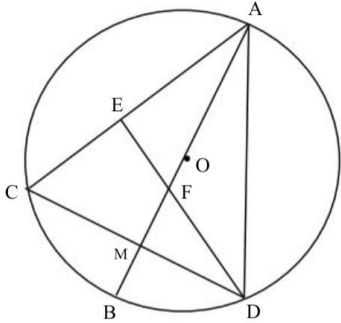
ג. המועמדים שהצליחו במבחן הקבלה וגם בראיון האישי התקבלו למכללה. בוחרים באקראי שניים

מבין כלל המועמדים.

(1) מה ההסתברות שהמועמד השני התקבל?

(2) מה ההסתברות שרק המועמד שהשני התקבל?

פרק שני- גיאומטריה וטריגונומטריה במישור



4. AB קוטר במעגל O. הנקודה M היא אמצע המיתר CD. נתון:  $DE \perp AC$ . F היא נקודת החיתוך של הקוטר AB עם הקטע DE. א. הוכיחו: המרובע CEFM הוא בר-חסימה. ב. נתון:  $EF = 3a$ ,  $FD = 5a$ . (1) הביעו באמצעות a את רדיוס המעגל החוסם את המרובע CEFM. (2) הביעו באמצעות a את שטח המשולש CED. (3) הביעו באמצעות a את אורך הקטע CD. ג. (1) הוכיחו:  $\triangle ECD \sim \triangle MCA$ . (2) הביעו באמצעות a את שטח המשולש ACD. (3) נתון: שטח המשולש ACD הוא 1800. חישבו את אורך שוקי המשולש ACD. (4) חשבו את רדיוס המעגל O. ד. המשך הקטע CF חותך את המעגל בנקודה G. הסבירו מדוע הנקודות C, F, G, D נמצאות על אותו מעגל.

5. נתון משולש ABC. AE ו-BD תיכונים לצלעות BC ו-AC בהתאמה. התיכונים AE ו-BD נחתכים בנקודה M. נסמן:  $\angle BAE = \alpha$ ,  $\angle ABD = \beta$ ,  $AB = d$ . א. הביעו באמצעות  $d$ ,  $\alpha$  ו- $\beta$  את אורכי התיכונים AE ו-BD. ב. נתון:  $AE \perp BD$ . הראו כי שטח המרובע ABED הוא  $\frac{9d^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{8}$ . ג. נתון:  $BD > AE$  ושטח המרובע ABED הוא  $0.528577d^2$ . (1) חשבו את הזווית  $\alpha$  ו- $\beta$ . (2) חשבו את הזווית  $\angle C$ . ד. נתון: רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC הוא 24. חשבו את היקף המשולש ABD.

6. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x}{2\sqrt{x} - a}$ ,  $a > 0$ .

א. הביעו את תשובותיכם באמצעות  $a$  לפי הצורך:

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצאו אסימפטוטות לגרף הפונקציה המאונכות לצירים, אם יש כאלה.

(3) מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. נתונה הפונקציה  $g(x) = |f(x)| - k$ ,  $k > 0$ . הנקודה  $(16; -0.5)$  היא נקודת המינימום של

הפונקציה  $g(x)$ .

(1) מצאו את  $a$  ואת  $k$ .

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .

(3) הראו שגרף הפונקציה  $g(x)$  חותך את ציר ה- $x$  בנקודות  $(36; 0)$ ,  $(9; 0)$ ,  $(2.838; 0)$ .

ג. נתונה גם הפונקציה  $s(x) = \int_5^x g(t) dt$  המוגדרת בתחום  $x > 5$ .

מצאו את שיעורי ה- $x$  של נקודות הקיצון של הפונקציה  $s(x)$  וקבעו את סוג הקיצון.

7. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{2}x^2 - \cos 2x$  בתחום  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .

א. האם הפונקציה  $f(x)$  זוגית?

(2) מצאו את נקודות הפיתול של הפונקציה בתחום הנתון.

(3) מצאו את התחומים בהם הפונקציה קעורה כלפי מעלה ואת התחומים בהם היא קעורה כלפי מטה.

ב. (1) מצאו את תחומי העלייה והירידה של פונקציית הנגזרת  $f'(x)$  בתחום  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .

(2) מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה  $f'(x)$  וקבעו את סוגן.

(3) מצאו את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה  $f'(x)$  עם ציר  $y$ .

(4) סרטטו סקיצה של פונקציית הנגזרת  $f'(x)$  בתחום  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .

ג. (1) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  בתחום הנתון וקבעו את סוגן.

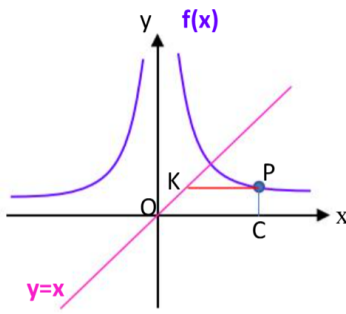
(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  בתחום  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .

(3) כמה נקודות חיתוך עם ציר  $x$  יש לפונקציה  $f(x)$ ?

ד. הפונקציה  $g(x)$  מקיימת:  $g'(x) = f(x)$ . נתון: הפונקציה  $g(x)$  אי-זוגית.

הישר  $y = -0.3675$  משיק לגרף הפונקציה  $g(x)$  בנקודת המינימום הפנימית שלה.

חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה  $f(x)$  וציר  $x$ .



8. בציור שלפניכם מתואר גרף הפונקציה  $f(x) = \frac{a}{x^2}$  (a פרמטר חיובי) והישר  $y = x$ .

הנקודה P נמצאת על גרף הפונקציה  $f(x)$  ברביע הראשון.

בנקודה P מעבירים ישר PC המאונך לציר ה-x וישר PK

המקביל לציר ה-x, החותך את הישר  $y = x$  בנקודה K.

א. (1) סמנו את שיעור ה-x של הנקודה P ב-t והביעו באמצעות

a ו-t את שטח הטרפז OKPC.

(2) השטח הגדול ביותר של הטרפז OKPC המתקבל באופן זה הוא 1.5.

מצאו את הערך של a.

ב. הנקודה P היא הנקודה המתקבלת כאשר הטרפז OKPC הוא מקסימלי.

(1) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הישר  $y = x$ .

(2) חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה  $f(x)$ , הישר  $y = x$  והקטע PK.

### תשובות

1. ג. (1) (2;-3) נקודת מינימום, (3;-2) נקודת מקסימום (2) נקודת קיצון אחת

ד. f(x) : גרף III, g(x) : גרף I, h(x) : גרף II, j(x) : גרף V, k(x) : גרף IV

2. א. (2)  $c_1 = t(1+t)$  ג. (1)  $a_2 = 2t$ ,  $b_2 = t^2$  (2)  $t = -\frac{1}{2}$  (3)  $-\frac{1}{6}$  ד.  $n = 10$

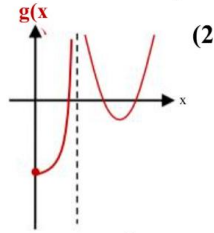
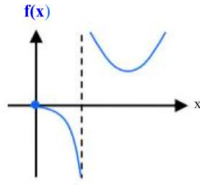
3. א. 48 ב. 21 ג. 0.3125 (2)  $\frac{165}{752} = 0.2194$

4. א.  $2.5a$  (2)  $16a^2$  (3)  $CD = 4\sqrt{5}a$  ג. (2)  $40a^2$  (3)  $AC = 30\sqrt{5}$  (4) 37.5

5. א.  $BD = \frac{3d \sin \alpha}{2 \sin(\alpha + \beta)}$ ,  $AE = \frac{3d \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)}$  ג. (1)  $\alpha = 55^\circ$ ,  $\beta = 35^\circ$  (2)  $35.17^\circ$

ד. 81.12

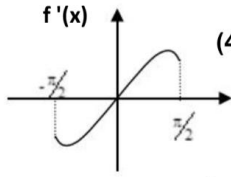
6. א. 1)  $0 \leq x < \frac{a^2}{4}, x > \frac{a^2}{4}$  (2)  $x = \frac{a^2}{4}$  (3) מקסימום  $(0;0)$ , מינימום  $(a^2; a)$  (4)



ב. 1)  $k = 4.5, a = 4$   
 ג.  $x = 9$  מקסימום,  
 $x = 36$  מינימום

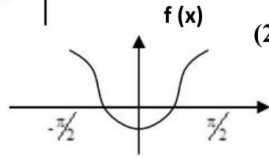
7. א. 1) כן (2)  $(\frac{3\pi}{8}, 2.67)$  (3) כלפי מעלה:  $-\frac{3\pi}{8} < x < \frac{3\pi}{8}$ ,

כלפי מטה:  $\frac{3\pi}{8} < x < \frac{\pi}{2}$ ,  $-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{3\pi}{8}$  (1) תחומי העלייה:  $-\frac{3\pi}{8} < x < \frac{3\pi}{8}$



תחומי הירידה:  $\frac{3\pi}{8} < x < \frac{\pi}{2}$ ,  $-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{3\pi}{8}$  (2)  $(-\frac{\pi}{2}; -4.5)$  מקסימום, (4)

מינימום  $(-\frac{3\pi}{8}; -4.75)$ , מינימום  $(\frac{3\pi}{8}; 4.75)$ , מקסימום  $(\frac{\pi}{2}; 4.5)$  מינימום



(3)  $(0;0)$  ג. 1)  $(-\frac{\pi}{2}; 4.75)$  מקסימום,  $(0; -1)$  מינימום, (2)

2)  $(\frac{\pi}{2}; 4.5)$  מקסימום (3) שתי נקודות ד.  $0.735$

8. א. 1)  $S(t) = \frac{a(2t^3 - a)}{2t^4}$  (2)  $a = 4$  (1)  $(\sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{4})$  (2)  $0.2797$

## מבחן מס' 2

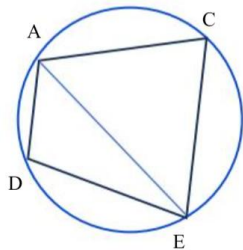
פרק ראשון - שאלות קצרות, סדרות והסתברות

1. א. נתון כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots - (2n)^2 + (2n+1)^2 = (n+1)(p \cdot n + k)$$

(1) הראו כי  $k = 1$  ו-  $p = 2$ .

(2) חשבו את ערך הביטוי  $61^2 - 60^2 + \dots - 20^2 + 19^2 - 18^2$



ב. הנקודות A, C, E ו-D נמצאות על מעגל.

המיתר AE חוצה את הזווית  $\angle DAC$ .

נתון גם:  $AC = CE$ ,  $AC \neq AD$ .

הוכיחו: המרובע ACED הוא טרפז שווה שוקיים.

ג. ביישוב גדול נמצא כי ההסתברות לבחור תושב בוגר שמנוי למועדון ספורט היא  $p$

וההסתברות לבחור תושב בוגר שמנוי למועדון קריאה היא  $q$ .

$$\text{נתון: } p + q \neq 1, 0 < q < 1, 0 < p < 1$$

נמצא גם, שאין תלות בין ההשתתפות במועדון ספורט לבין ההשתתפות במועדון קריאה.

(1) איזה מן הביטויים הבאים מבטא את ההסתברות לבחור תושב בוגר מן היישוב שמנוי לפחות באחד משני המועדונים?

$$\text{I. } p + q - pq \quad \text{II. } p + q \quad \text{III. } 1 - pq$$

(2) ידוע כי 20% מן התושבים הבוגרים באותו יישוב מנויים למועדון קריאה.

נבחר באקראי תושב בוגר שמנוי למועדון ספורט. חשבו את ההסתברות שהתושב שנבחר איננו מנוי למועדון קריאה.

ד. בציור שלפניכם מתואר גרף הפונקציה  $f(x)$  המוגדרת בתחום  $x \neq 1$ .

הנקודה  $(3; 17)$  היא נקודת הקיצון היחידה של הפונקציה

והנקודה  $(-2; 0)$  היא נקודת הפיתול היחידה של הפונקציה (ראו ציור).

הישר  $x = 1$  אסימפטוטה לגרף של כל אחת מן הפונקציות  $f(x)$ ,  $f'(x)$  ו- $f''(x)$ .

(1) סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ .

(2) נתון: הישר  $y = 2$  הנו אסימפטוטה לגרף הפונקציה  $f''(x)$ .

סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f''(x)$ .

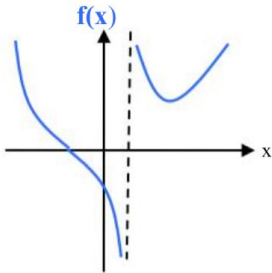
נתונה הפונקציה  $g(x) = \int_{-10}^x f''(t) dt$  המוגדרת בתחום  $-10 < x < 1$ .

(3) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה  $g(x)$  בתחום  $x < 1$ .

(4) נתון:  $g(-2) = S$ . האם יתכן כי  $S = 16$ ? נמקו.

(5) נתון  $f'(-10) = -22$ . בטאו באמצעות  $S$  את הערך המקסימלי של הפונקציה  $f'(x)$

בתחום  $-10 < x < 1$ .



2. נתונה סדרה הנדסית  $a_1, a_2, a_3, \dots$  שכל איבריה חיוביים ומנתה  $q$ .

בונים סדרה חדשה  $b_1, b_2, b_3, \dots$  המקיימת:  $b_m = \sqrt{a_m \cdot a_{m+1}}$ .

א. הוכיחו שהסדרה  $b_1, b_2, b_3, \dots$  היא סדרה הנדסית.

ב. נתון: בסדרה  $a_1, a_2, a_3, \dots$  ישנם  $2n$  איברים. האיבר האחרון בסדרה  $a_1, a_2, a_3, \dots$

גדול פי  $\sqrt{3}$  האיבר האחרון בסדרה  $b_1, b_2, b_3, \dots$ . מצאו את  $q$ .

ג. מכפלת שני האיברים האמצעיים של הסדרה  $a_1, a_2, a_3, \dots$  בה  $2n$  איברים גדול פי 19683

ממכפלת שני האיברים הראשונים של הסדרה  $b_1, b_2, b_3, \dots$ .

מצאו את מספר אברי הסדרה  $a_1, a_2, a_3, \dots$ .

ד. נתון: סכום הסדרה האינסופית  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots$  הוא 4.5.

(1) מצאו את  $a_1$ .

(2) חשבו את סכום הסדרה האינסופית  $\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} + \dots$ .

3. ליאור התבקש לפתוח מנעול בעזרת ארבעה מפתחות שרק אחד מהם פותח את המנעול של הדלת,

אבל לא נאמר איזה מהם הוא המתאים.

א. (1) מה ההסתברות שליאור הצליח לפתוח את הדלת בניסיון השני?

(2) מה ההסתברות שליאור נזקק לשני ניסיונות לכל היותר על מנת לפתוח את הדלת?

(3) ליאור לא הצליח לפתוח את המנעול בעזרת המפתח הראשון.

מה ההסתברות שהצליח לפתוח עם המפתח השני?

(4) האם ההסתברות שליאור הצליח לפתוח את הדלת עם המפתח הרביעי גדולה, קטנה או שווה

להסתברות שהוא הצליח לפתוח אותה עם המפתח השלישי?

ב. שישה נערים קיבלו אותה משימה שניתנה לליאור.

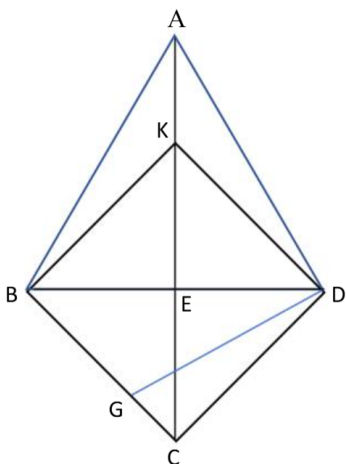
(1) מה ההסתברות שלפחות שניים מהם הצליחו לפתוח את המנעול עם המפתח השני שניסו,

ולפחות שלושה הצליחו בעזרת שאר המפתחות?

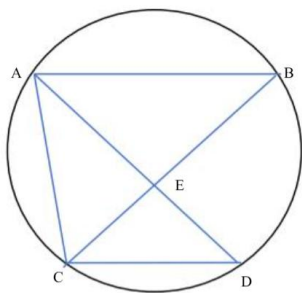
(2) ידוע שהנער האחרון הצליח לפתוח את המנעול בעזרת המפתח השני שניסה.

מה ההסתברות שלפחות שניים מן הנערים הצליחו לפתוח את המנעול עם המפתח השני?

פרק שני- גיאומטריה וטריגונומטריה במישור



4. המרובע ABCD הוא דלתון. המשולש ABD הוא שווה-צלעות ומשולש BCD הנו משולש ישר-זווית. E נקודת המפגש של אלכסוני הדלתון. הנקודה K נמצאת על האלכסון הראשי של הדלתון, כך ש-  $KE = EC$ .  
 א. הוכיחו: המרובע BKDC הוא ריבוע.  
 ב. (1) סמנו:  $BE = a$ ; הביעו בעזרת a את אורך האלכסון הראשי AC.  
 (2) פי כמה גדול שטח הדלתון ABCD משטח הריבוע BKDC?  
 ג. מן הקודקוד D יוצא קטע DG, כך ש-  $\angle CDG = 15^\circ$ .  
 נתון גם:  $S_{ABDG} = 17.15$ .  
 (1) הוכיחו:  $\triangle BDG \sim \triangle CAD$   
 (2) חשבו את שטח הדלתון ABCD.  
 ד. המשך הקטע DG חותך את המעגל החוסם את הריבוע BKDC בנקודה P. חישבו את הזווית  $\angle PEC$ .

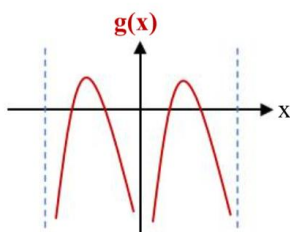


5. הנקודות A, B, C, D נמצאות על היקפו של מעגל. נתון:  
 $AE = k$ ,  $\angle CAD = 20^\circ$ ,  $\angle BAD = \alpha$ ,  $AB \parallel CD$ .  
 א. (1) הביעו באמצעות  $\alpha$  את זוויות המשולש ACE.  
 (2) הביעו באמצעות k ו- $\alpha$  את אורכי הקטעים AB ו-CD.  
 ב. נתון: שטח המשולש ABE גדול פי 6.41147 משטח המשולש CDE. נתון:  $\alpha > 20^\circ$ . חישבו את  $\alpha$ .  
 ג. אורך התיכון לצלע CD במשולש ACD הוא 22.44. מצאו את k.

**פרק שלישי - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ופונקציות טריגונומטריות**

6. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^n x}$ ,  $n$  מספר טבעי, בתחום  $-\pi \leq x \leq \pi$ .

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- (2) מצאו אסימפטוטות לגרף הפונקציה המאונכות לצירים.
- (3) מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ב. (1) מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה. הבחינו בין  $n$  זוגי לבין  $n$  אי-זוגי.
- (2) הראו שלפונקציה  $f(x)$  אין נקודות קיצון בתחום  $-\pi \leq x \leq \pi$ .
- ג. לפונקציה  $g(x)$  יש אותו תחום הגדרה כמו לפונקציה  $f(x)$ .  
נתון:  $g'(x) = f(x)$ .



- בציור שלפניכם מתואר גרף הפונקציה  $g(x)$ .
- (1) קבעו האם  $n$  הוא מספר זוגי או אי-זוגי ונמקו.
- (2) נתון: הישר  $y = 0.5$  משיק לגרף הפונקציה  $g(x)$ .
- הפונקציה  $h(x)$  מקיימת:  $h(x) = -2g(x) + k$ .
- מצאו את הערכים של  $k$  עבורם גרף הפונקציה  $h(x)$  אינו חותך את ציר ה- $x$ . נמקו.

7. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{a}{x^2 + 3} + 0.5x - 2.5$ ,  $a \neq 0$ . המשיק לגרף הפונקציה באחת

- מנקודות הפיתול של הפונקציה הנמצאת ברביע הרביעי מקביל לישר  $y = x$ .
- א. מצאו את  $a$ .
  - ב. נסמן:  $m(x) = f'(x)$ . הציבו  $a = -4$  וענו על הסעיפים הבאים:
    - (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .
    - (2) מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה  $m(x)$  וקבע את סוגן.
    - (3) מצאו, לפונקציה  $m(x)$  אסימפטוטות מאונכות לצירים (אם יש כאלה).
    - (4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $m(x)$ .
  - ג. (1) מבין כל המשיקים לגרף הפונקציה  $f(x)$ , מצאו את משוואת המשיק בעל השיפוע המקסימלי ואת משוואת המשיק בעל השיפוע המינימלי.
  - (2) האם קיימות נקודות על גרף הפונקציה  $f(x)$  בהן שיפוע המשיק שלילי? נמקו.
  - (3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$  (אם יש כאלה).
  - (4) מצאו את תחומי הקעירות כלפי מעלה  $\cup$  והקעירות כלפי מטה  $\cap$  של הפונקציה  $f(x)$ .
  - (5) סרטטו וסקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .
  - ד. (1) הראו שהמשיקים לגרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודות הפיתול שלה נחתכים על ציר ה- $y$ .
  - (2) קבעו איזה מן הערכים הבאים הנו הקרוב הטוב ביותר לשיטת  $S$  המוגבל בין גרף הפונקציה  $f(x)$  והמשיקים לגרף הפונקציה בנקודות הפיתול שלה. נמקו.
- I.  $0 < S < 0.5$  . II.  $0.5 < S < 1$  . III.  $1 < S < 2$

8. א. נתונה הפונקציה  $f(x) = \sqrt{-x^2 + 25}$ .

(1) הראו שהפונקציה  $f(x)$  היא פונקציה זוגית.

(2) מצאו את תחום ההגדרה ואת שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ .

ב. הפונקציה  $g(x)$  מקיימת:  $g(x) = f(x-5)$ .

(1) מצאו את תחום ההגדרה ואת שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $g(x)$ .

(2) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .

(3) האם יש ציר סימטריה לגרף הפונקציה  $g(x)$ ? נמקו.

ג. נסמן ב- A ו- B את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $g(x)$  עם ציר ה- x (A משמאל ל- B).

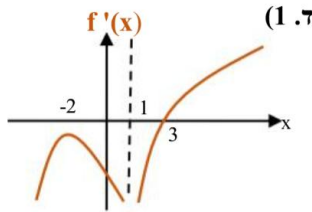
הנקודות P נמצאת על גרף הפונקציה  $g(x)$  בתחום  $x > 5$ . בנקודה P מעבירים ישר המקביל לציר

ה- x. ישר זה חותך את גרף הפונקציה  $g(x)$  בנקודה נוספת Q.

מצאו את שיעורי הנקודה P עבורה שטח הטרפז ABPQ מקסימלי.

**בהצלחה!**

**תשובות**

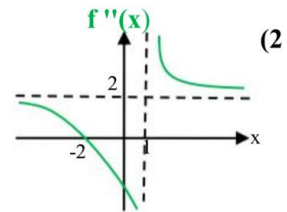


1. א. (1) הוכחה (2) 1738 ב. הוכחה ג. (1)  $p + q - pq$  (2) 0.8 ד. (1)

(3) תחום העלייה:  $-10 < x < -2$ ,

תחום הירידה:  $-2 < x < 1$

(4) לא (5) S - 22



2. א.  $q = 3$  ב.  $a_1 = \frac{1}{3}$  ג. 12 ד. (1)  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$  (2)

3. א. (1)  $\frac{1}{4}$  (2)  $\frac{1}{2}$  (3)  $\frac{1}{3}$  (4) שוות ב. (1)  $\frac{1755}{4096} = 0.4285$  (2)  $\frac{781}{1024} = 0.7627$

4. א. (1)  $(\sqrt{3} + 1)a = 2.732a$  (2) 1.366 ג. (2) 64 ד.  $30^\circ$

5. א. (1)  $\sphericalangle CAD = 20^\circ$ ,  $\sphericalangle AEC = 2\alpha$ ,  $\sphericalangle ACE = 160^\circ - 2\alpha$

$$k \approx 18 \quad \alpha = 50^\circ \quad \text{ג.} \quad CD = \frac{2k \cdot \sin 20^\circ \cos \alpha}{\sin(160^\circ - 2\alpha)}, AB = \frac{k \sin(2\alpha)}{\sin \alpha} \quad (2)$$

$$\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right), \left(\frac{\pi}{2}; 0\right) \quad (3) \quad x = -\pi, x = 0, x = \pi \quad (2) \quad -\pi < x < 0, 0 < x < \pi \quad (1) \quad \text{א.} \quad (1) \quad \text{א.} \quad (1)$$

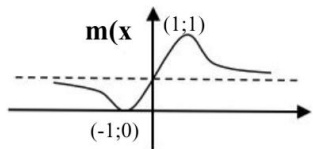
ב. 1) עבור n זוגי:

$$-\pi < x < -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < x < \pi: \text{תחומי השליליות}; -\frac{\pi}{2} < x < 0, 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

עבור n אי-זוגי:

$$-\pi < x < -0.5\pi, 0 < x < 0.5\pi: \text{תחומי החיוביות}$$

$$k > 1 \quad (2) \quad \text{תחומי השליליות: } -0.5\pi < x < 0, 0.5\pi < x < \pi \quad (1) \quad \text{א.} \quad \text{אי-זוגי}$$



(4)

7. א.  $a = -4$  ב. כל  $x$  (2) מקסימום (1;1)

ו- (1;0) מינימום (3)  $y = 0.5$

ג. משוואת המשיק בעל השיפוע המקסימלי:  $y = x - 4$

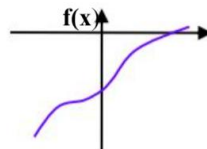
משוואת המשיק בעל השיפוע המינימלי:  $y = -4$ ; (2) לא

(3) עולה בכל תחום הגדרתה.

(4) קעירות כלפי מעלה:  $-1 < x < 1$ ;

(5) קעירות כלפי מטה:  $x < -1, x > 1$

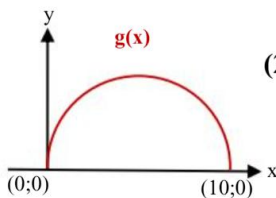
ד. 2) טענה I



8. א. 2) תחום ההגדרה:  $-5 \leq x \leq 5$ , נקודות הקיצון: (0;5) מינימום, (5;0) מקסימום,

(5;0) מינימום ב. 1) תחום ההגדרה:  $0 \leq x \leq 10$ ,

נקודות הקיצון: (0;0) מינימום, (5;5) מקסימום, (10;0) מינימום (2)



(3) כן, הישר  $x = 5$  ג.  $P\left(7.5; \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$

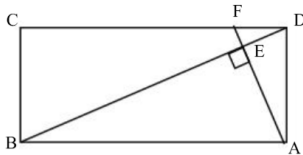
### מבחן מס' 3

פרק ראשון - שאלות קצרות, סדרות והסתברות

1. א. נתונה נוסחת הסכום של סדרה:  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + (3 \cdot 4^n - 5) = 4^{n+1} - (5n + 4)$ .

- 1) הוכיחו את הטענה: אם קיים מספר טבעי  $k$  עבורו הנוסחה נכונה, אזי היא נכונה גם עבור  $k + 1$ .
- 2) האם ניתן להסיק מן הסעיף הקודם שהנוסחה נכונה עבור כל  $n$  טבעי? נמקו.
- 3) נתון כי הנוסחה נכונה לכל  $n$  טבעי. חשבו את  $a_1$ .

ב. הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת וגזירה לכל ערך של  $x$ . לפונקציה יש נקודת מינימום עבור  $x = c$ . נתון:  $f(c) \neq 0$ . הראו שלפונקציה  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$  יש נקודת מקסימום בנקודה שבה  $x = c$ .



ג. במלבן ABCD הקטע AF מאונך לאלכסון BD

בנקודה E (ראו ציור). נתון:  $CF = 19.2$ ,  $FD = 4.8$ .

- 1) חשבו את היחס  $DE:EB$ .
- 2) חשבו את המרחק בין מרכז המעגל החוסם את המשולש BCD לבין מרכז המעגל החוסם את המשולש AED.
- 3) חשבו את היחס בין שטח המשולש FDE לשטח המלבן ABCD.

ד. בבית ספר תיכון כלשהו נמצא כי 75% מן התלמידים אוהבים שיעורי ספורט ו-45% מן התלמידים אוהבים שיעורי מתמטיקה.

- נבחר באקראי תלמיד מבית-הספר. נסמן ב- $x$  את ההסתברות שהתלמיד אוהב גם את שיעורי הספורט וגם את שיעורי המתמטיקה. נסמן ב- $y$  את ההסתברות שהתלמיד שנבחר אוהב לפחות את אחד מן השיעורים: ספורט או מתמטיקה.
- 1) הראו כי  $0.75 \leq y \leq 1$ .
  - 2) הראו כי  $0.2 \leq x \leq 0.45$ .
  - 3) נבחר באקראי תלמיד שאוהב שיעורי מתמטיקה. האם יתכן שההסתברות שהוא גם שיעורי ספורט היא 0.4? נמקו.

2. נתונה סדרה הנדסית  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ .  $S_n$  היא סדרת הסכומים החלקיים של הסדרה הנתונה.

מגדירים סדרה נוספת  $b_n$  המקיימת:  $b_n = b_1 + S_{n-1}$ .

א. הראו כי מתקיים:  $b_{n+1} - b_n = a_n$ .

ב. נתון: סכום  $n - 1$  האיברים האחרונים בסדרה ההנדסית  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  גדול פי 4 מסכום

$n - 1$  האיברים הראשונים בסדרה.

(1) מצאו את מנת הסדרה ההנדסית.

(2) נתון:  $a_1 = 4$ . מצאו את הסכום  $(b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + (b_4 - b_3) + \dots + (b_{10} - b_9)$ .

(3) נתון:  $b_6 = 1367$ . מצאו את  $b_1$ .

3. במפעל גדול מאד יצאו כל העובדים לחופשה בחודש אוגוסט. בסקר שנערך בקרב העובדים

לאחר החופשה התברר שחלקם נפשו בארץ וחלקם נפשו בחו"ל. התברר כי  $\frac{2}{9}$  מבין אלה שנפשו

בארץ טיילו בחיק הטבע. 20% מבין העובדים שטיילו בחיק הטבע בחופשתם, נפשו בארץ.

נסמן ב- $p$  את ההסתברות לבחור באקראי עובד במפעל שבילה את חופשתו בארץ.

א. בטאו באמצעות  $p$  את ההסתברות לבחור עובד מן המפעל שבילה את חופשתו בחו"ל ולא טייל בחיק הטבע.

ב. נתון כי מספר העובדים שבילו את החופשה בחו"ל ולא טיילו בחיק הטבע מהווים  $\frac{3}{8}$  מבין אלה

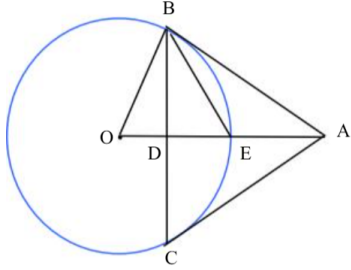
שבילו בחו"ל וכן טיילו בחיק הטבע. בוחרים באקראי עובד שלא טייל בחיק הטבע. מה ההסתברות שבילה את חופשתו בחו"ל?

ג. בוחרים באקראי שניים מן העובדים שטיילו בטבע בחופשתם. מה ההסתברות שרק אחד מהם נפש בארץ?

ד. בוחרים באקראי 5 עובדים מן המפעל שטיילו בחיק הטבע במהלך חופשתם. מה ההסתברות שלפחות אחד מהם נפש בחו"ל ולפחות אחד מהם נפש בארץ?

פרק שני- גיאומטריה וטריגונומטריה במישור

4. AB ו- AC משיקים למעגל O בנקודות B ו- C (ראה ציור).



הנקודה E היא נקודת החיתוך של הקטע OA עם המעגל.

א. הוכיחו: DE הוא רדיוס המעגל החסום ב-  $\Delta ABC$ .

ב. הוכיחו:  $AB^2 = AO \cdot AD$ .

ג. נסמן: R הוא רדיוס המעגל שמרכזו O.

נתון:  $AO = 12.5$ ,  $R = 7.5$ .

(1) חשבו את אורך הקטע AD.

(2) חשבו את היחס בין שטח המעגל שמרכזו O לבין שטח המעגל החסום במשולש ABC.

ד. המעגל החסום במשולש ABC משיק לצלע AB בנקודה P ולצלע AC בנקודה Q.

חשבו את אורך הקטע PQ.

5. נתון מלבן ABCD. אלכסוני המלבן נחתכים בנקודה M.

מנקודה M מעלים אנך ל-AC החותך את DC בנקודה P.

( $MP \perp AC$ ). נתון:  $\angle BMC = 2\alpha$ ,  $BC = k$ .

א. הביעו ואת אורך הקטע CP באמצעות  $\alpha$  ו- k.

ב. (1) הביעו באמצעות  $\alpha$  את היחס בין שטח המשולש

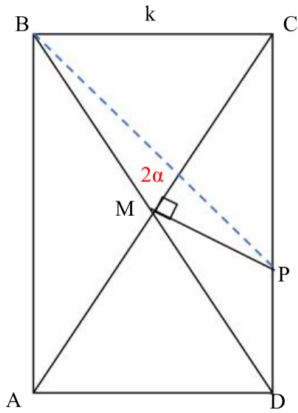
CMP לבין שטח המשולש BMC.

(2) האם יתכן כי שטח המשולש BMC גדול

פי 2 משטח המשולש CMP? נמקו.

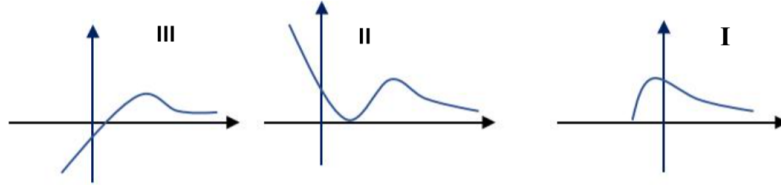
(3) נתון:  $S_{ACMP} = 0.213 \cdot S_{ABCD}$ . חשבו את  $\alpha$ .

ג. נתון: אורך הקטע BP הוא 14.26. מצאו את k.



**פרק שלישי - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ופונקציות טריגונומטריות**

6. נתונה הפונקציה  $f(x)$  המקיימת:  $f(x) \geq 0$  לכל  $x$  בתחום ההגדרה של הפונקציה; לפונקציה יש בדיוק נקודה אחת שבה  $f(x) = 0$  ונקודה אחת שבה  $f'(x) = 0$ .  
 א. (1) איזה מן הציורים הבאים מתאים להיות הגרף של הפונקציה  $f(x)$ ? נמקו.



(2) נתון: הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת בתחום  $x \geq a$ ,  $f(a) = 0$ ,  $f'(b) = 0$ ,  $f''(b) < 0$ ,  $b > a$ ,  $f(x) \leq c$ ,  $f(b) = c$  לכל  $x$  בתחום ההגדרה של הפונקציה.

רשמו באמצעות  $a$ ,  $b$  ו- $c$  לפי הצורך, את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  וקבעו את סוגן.

ב. הפונקציה  $g(x)$  מקיימת:  $g(x) = [f(x)]^n$  ( $n$  מספר טבעי גדול מ-1).

(1) הביעו את  $g'(x)$  באמצעות  $n$ ,  $f(x)$  ו- $f'(x)$ .

(2) מצאו לפונקציה  $g(x)$ : תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם ציר ה- $x$ , נקודות קיצון וקבעו את סוג הקיצון (הביעו באמצעות  $a$ ,  $b$  ו- $c$  לפי הצורך).

ג. נתון:  $c > 1$ .

(1) הסבירו מדוע קיימת נקודה על גרף הפונקציה  $f(x)$  עבורה  $f(x) = 1$ .

(2) הסבירו מדוע עבור  $c > 1$  תהיה לפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$  נקודה משותפת בתחום  $x > a$  שנמצאת על הישר  $y = 1$ .

(3) הסבירו מדוע עבור  $0 < c < 1$  לא יהיו לפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$  נקודות משותפות בתחום  $x > a$ .

ד. נתון:  $f(x) = \frac{\sqrt{6x^3 - 12}}{x^2}$ .

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) נתון:  $x = 2$  הנו הפתרון היחיד של המשוואה  $f'(x) = 0$ . מצאו את  $a$ ,  $b$  ו- $c$ .

(3) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגן.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

(5) נתון:  $f(5.94) = 1$ . שרטטו, באותה מערכת צירים, בקו עבה יותר, את גרף

הפונקציה  $g(x) = [f(x)]^3$ .

7. א. נתונות הפונקציות  $f(x)$  ו-  $g(x)$  כך שמתקיים:  $g(x) = [f(x)]^2$ .

(1) הביעו את  $g'(x)$  באמצעות  $f(x)$  ו-  $f'(x)$ .

(2) הראה שבתחום בו  $f(x)$  חיובית ועולה,  $g(x)$  עולה.

ב. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sin x}{1 - \sin x}$  בתחום  $-\frac{3\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ .

(1) מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים.

(2) מצאו אסימפטוטות מקבילות לצירים לגרף הפונקציה  $f(x)$ .

(3) מצאו את תחומי העלייה, תחומי הירידה ואת נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  בתחום הנתון.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

(5) מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

ג. (1) מצאו את תחומי העלייה והירידה ואת נקודות הקיצון של הפונקציה  $g(x) = [f(x)]^2$

בתחום  $-\frac{3\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ .

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$  בתחום  $-\frac{3\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ .

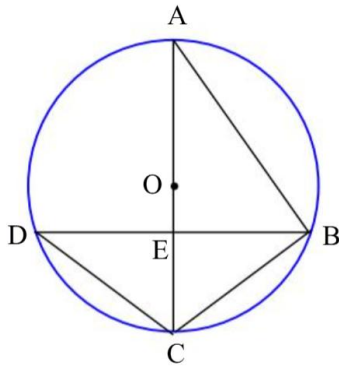
ד. (1) סרטט סקיצה של פונקציית הנגזרת  $f'(x)$  בתחום  $-\frac{3\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ .

(2) סרטטו סקיצה של פונקציית הנגזרת  $g'(x)$  בתחום  $-\frac{3\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ .

ה. נתונה הפונקציה  $h(x) = \frac{\sin(x - 2\pi)}{1 - \sin(x - 2\pi)}$  בתחום  $\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2}$ .

הסביר ומדוע השטח המוגבל בין גרף הפונקציה  $f(x)$  וציר ה-  $x$  שווה לשטח המוגבל בין גרף

הפונקציה  $h(x)$  וציר ה-  $x$ .



8. AC הנו קוטר במעגל שמרכזו O. רדיוס המעגל הוא 5.

BD מיתר במעגל המאונך לקוטר AB. הנקודה E היא נקודת

המפגש של המיתר BD עם הקוטר AC.

א. סמנו:  $BC = x$  ובטאו את אורך הקטע CE באמצעות  $x$ .

ב. מצאו את השטח המקסימלי של המשולש DBC.

תשובות

1. א. 2) לא  $a_1 = 7$  (3) ג. 1)  $\frac{DE}{EB} = \frac{1}{5}$  (2) 12 (3)  $\frac{1}{60}$  . 7 (3) לא

2. ג. 1)  $q = 4$  (2) 349524 (3)  $b_1 = 3$

3. א.  $1 - \frac{17p}{9}$  . ג. 0.3 . ג. 0.32 . 7. 0.672

4. ג. 1)  $AD = 8$  (2) 6.25 . 7. 4.8

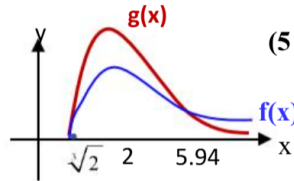
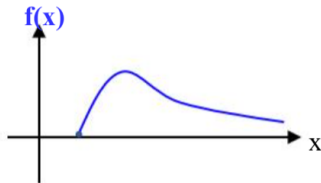
5. א.  $CP = \frac{k}{\sin 2\alpha}$  (1) ג. 1)  $\frac{1}{2\cos^2 \alpha}$  (2) לא  $\alpha = 40^\circ$  . ג.  $k = 10$

6. א. 1) גרף I (2) נקודת מינימום (נקודת קצה),  $(b; c)$  מקסימום מוחלט

ג. 1)  $g'(x) = n[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$  (2) תחום ההגדרה:  $x \geq a$  . חיתוך עם ציר  $x$ :  $(a; 0)$ ;

$(a; 0)$  מינימום מוחלט,  $(b; c^n)$  מקסימום מוחלט . ד. 1)  $x \geq \sqrt[3]{2}$  (2)  $a = \sqrt[3]{2}$ ,  $b = 2$ ,

3)  $c = 1.5$  (3) מינימום  $(\sqrt[3]{2}; 0)$  , מקסימום  $(2; 1.5)$  (4)



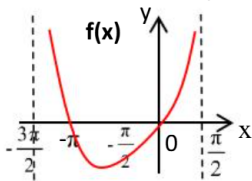
7. א. 1)  $g'(x) = 2f(x) \cdot f'(x)$  (1) ג. 1)  $(0; 0)$ ,  $(-\pi; 0)$  (2)  $x = -\frac{3\pi}{2}$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$

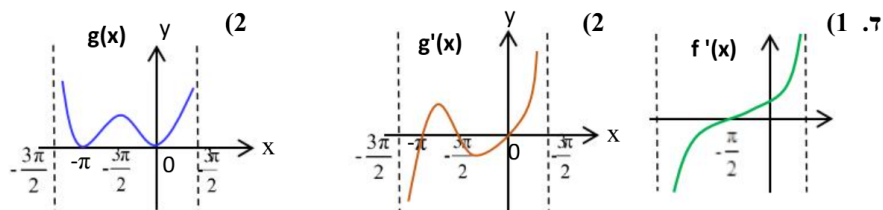
3) תחום עלייה:  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ , תחום ירידה:  $-\frac{3\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{2}$ , מינימום  $(-\frac{\pi}{2}; -\frac{1}{2})$  (4)

5) תחום החיוביות:  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ,  $-\frac{3\pi}{2} < x < -\pi$ , תחום השליליות:  $-\pi < x < 0$

ג. 1) תחומי העלייה:  $-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$ ,  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ; תחומי הירידה:

$-\frac{\pi}{2} < x < 0$ ,  $-\frac{3\pi}{2} < x < -\pi$ , מינימום  $(-\pi; 0)$ ; מקסימום  $(-\frac{\pi}{2}; \frac{1}{4})$ , מינימום  $(0; 0)$





ה.  $h(x)$  מתקבלת על-ידי הזזה של  $f(x)$  ב-  $2\pi$  יחידות ימינה.

$$8. \text{ א. } CE = \frac{x^2}{10} \quad \text{ב. } \frac{75\sqrt{3}}{4} \approx 32.476$$

### מבחן מס' 4

פרק ראשון- שאלות קצרות, סדרות והסתברות

1. א. נתונה הסדרה:  $1, 2, 5, 12, 27, \dots$

(1) האם אברי הסדרה הנתונים מקיימים את הנוסחה:  $a_n = 2^n - n$ ? נמקו.

(2) האם אברי הסדרה הנתונים מקיימים את נוסחת הסכום:  $S_n = 2^{n+1} - 2 - \frac{n(n+1)}{2}$ ? נמקו.

(3) האם ניתן להסיק משני הסעיפים הקודמים, בוודאות, כי סכום 99 האיברים הראשונים של הסדרה הוא  $2^{100} - 4952$ ? נמקו.

(4) נתון: עבור מספר טבעי כלשהו  $n$  מתקיים:  $a_n = 2^n - n$ ,  $S_n = 2^{n+1} - 2 - \frac{n(n+1)}{2}$

אזי מתקיים:  $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = 2^{n+2} - 2 - \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

האם ניתן לקבוע כי סכום 35 האיברים הראשונים של הסדרה הוא  $2^{36} - 632$ ? נמקו.

ב. נתונה הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$  המוגדרת לכל ערך של  $x$ :  $f'(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 24x + 7}{(x^2 + 1)^2}$ .

(1) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $g(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 7$  וקבעו את סוגן.

(2) האם יש לפונקציה  $f(x)$  נקודת מקסימום בתחום  $-2 < x < 4$ ? נמקו.

ג. נתונה הפונקציה  $f(x) = |x^2 - 4x|$  בתחום  $x \geq -2$  ונתונה הפונקציה  $g(t) = \int_{-2}^t f(x) dx$ .

(1) חשבו את הערכים של  $g(-1)$  ו- $g(4)$ .

(2) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $g(t)$  (אם יש כאלה).

ד. נתון מרובע ABCD. הנקודה E נמצאת על הצלע CD כך שהמרובע ABED הוא מקבילית.

(1) האם ניתן לקבוע בוודאות שהמרובע ABCD הוא טרפז? נמקו.

(2) נתון:  $\angle ADE = 40^\circ$ ,  $AE = 10.53$ ,  $AB = 10$ . חשבו את זוויות  $\angle AEC$ .

2. בסדרה הנדסית עולה  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ . סכום  $n - 2$  האיברים הראשונים בסדרה

קטן פי 9 מסכום  $n - 2$  האיברים האחרונים בסדרה.

א. מצאו את מנת הסדרה.

ב. הסדרה  $b_n$  מוגדרת כך:  $b_n = a_n + a_{n+1}$ .

(1) הוכיחו:  $b_n = 4a_n$ .

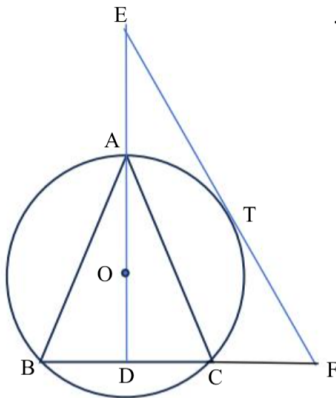
(2) סכום 5 האיברים הראשונים של הסדרה  $b_n$  הוא  $53\frac{7}{9}$ . מצאו את  $a_1$ .

ג. נתון: בסדרה  $a_n$  ישנם 16 איברים.

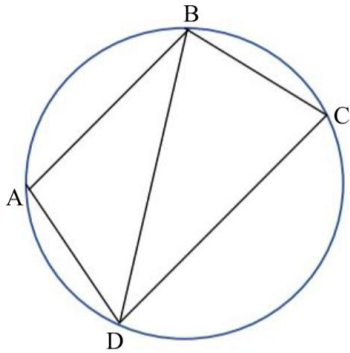
חשבו את סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה  $b_n$ .

3. בשכונה כלשהי נערך סקר בקרב 150 משפחות שגרות בבניינים זהים. 105 משפחות הם זוגות צעירים. בכל אחד מן הבניינים יש דירות בנות 4 חדרים ודירות בנות 3 חדרים. 84 משפחות של זוגות צעירים גרות בדירה בת 3 חדרים. ידוע שהמאורע "נבחר זוג צעיר" והמאורע "נבחרה משפחה שגרה בדירה בת 3 חדרים" הם מאורעות בלתי תלויים.
- א. האם ההסתברות לבחור זוג צעיר מבין המשפחות הגרות בדירה בת 3 חדרים גדולה, קטנה או שווה להסתברות לבחור זוג צעיר מבין כלל המשפחות שהשתתפו בסקר? נמקו.
- ב. כמה משפחות שאינם זוגות צעירים גרות בדירה בת 3 חדרים?
- ג. בוחרים באקראי שלוש משפחות של זוגות צעירים הגרים בשכונה (הוצאה ללא החזרה).
- (1) מה ההסתברות שלפחות אחת המשפחות גרה בדירה בת 3 חדרים?
- (2) מה ההסתברות שהמשפחה הראשונה שנבחרה גרה בדירה בת 3 חדרים ושתי המשפחות שנבחרו אחריה גרות בדירות בנות 4 חדרים?
- (3) מה ההסתברות שאחת המשפחות שנבחרה גרה בדירה בת 3 חדרים ושתי המשפחות האחרות גרות בדירות בנות 4 חדרים, אם ידוע שהמשפחה הראשונה שנבחרה גרה בדירה בת 4 חדרים?

**פרק שני – גיאומטריה וטריגונומטריה במישור**



4. נתון משולש שווה שוקיים  $ABC$  ( $AB = AC$ ) החוסם במעגל שמרכזו  $O$ . המשך הקטע  $AO$  חותך את הצלע  $BC$  בנקודה  $D$ . הנקודה  $E$  נמצאת על המשך הקטע  $AD$  (ראו ציור). הנקודה  $F$  נמצאת על המשך הבסיס  $BC$  כך שהקטע  $EF$  משיק למעגל בנקודה  $T$ .
- א. הוכיחו:  $AD \perp BC$ .
- ב. הוכיחו:  $\angle ODT = \angle OFT$ .
- ג. נתון: הנקודה  $T$  היא אמצע הקטע  $EF$ .
- (1) נסמן:  $\angle ODT = \alpha$ . הביעו באמצעות  $\alpha$  את גודל הזווית  $\angle ATE$ .
- (2) נסמן ב- $R$  את רדיוס המעגל  $O$ . נתון גם:  $AE = 0.84R$ . הביעו באמצעות  $R$  את רדיוס המעגל החוסם את המשולש  $ODF$ .



5. נתון טרפז ABCD ( $AB \parallel CD$ ) החסום במעגל שרדיוסו R.

נתון:  $\angle BDC = \alpha$ ,  $\angle DBC = \beta$ .

א. הביעו באמצעות  $\alpha$  ו- $\beta$  את הזווית  $\angle ADB$ .

ב. הביעו באמצעות R,  $\alpha$  ו- $\beta$  את אורכי הקטעים CD ו-AB.

ג. נתון:  $\angle ABC = 120^\circ$ . הביעו באמצעות  $\alpha$  את היחס  $\frac{AB}{DC}$ .

ד. נתון:  $\frac{AB}{DC} = \frac{3}{4}$ . חשבו את  $\alpha$  ו- $\beta$ .

ה. M אמצע הקטע AB.

א. הביעו את אורך הקטע MC באמצעות R.

ב. r הוא רדיוס המעגל החוסם את המשולש MBC. חשבו את היחס  $\frac{r}{R}$ .

6. בציור שלפניכם מתואר גרף פונקציית הנגזרת של הפונקציה

$$f(x) \text{ בתחום } 0 \leq x \leq 0.5\pi.$$

א. האם יש לפונקציה  $f(x)$  נקודות קיצון פנימיות? נמקו.

ב. האם יש לפונקציה  $f(x)$  נקודות פיתול?

נמקו על פי הסרטוט של  $f'(x)$ .

ג. נתון:  $f(x) = ax - 3 \tan(2x)$  (a פרמטר).

א. מצאו את האסימפטוטה לגרף הפונקציה  $f(x)$  המאונכת לציר ה-x.

ב. סמנו את התשובה הנכונה ונמקו:

I.  $a < 0$ . II.  $0 < a < 6$ . III.  $a \geq 6$ .

ד. הראו כי  $f'(0) = f'(0.5\pi)$ .

ה. הראו שאין לפונקציה  $f(x)$  נקודות פיתול בתחום  $0 \leq x \leq 0.5\pi$ .

ו. נתון: הישר  $y = mx + b$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  בתחום  $0 \leq x \leq 0.5\pi$ .

נתון:  $m \leq 18$ . מצאו את הערך של a.

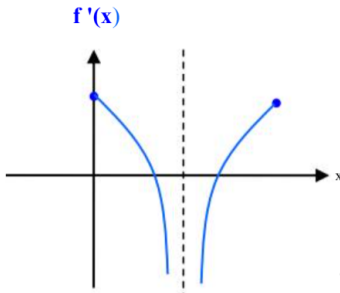
ז. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  בתחום  $0 \leq x \leq 0.5\pi$  וקבעו את סוגן.

ח. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  בתחום  $0 \leq x \leq 0.5\pi$ .

ט. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה  $f'(x)$ , ציר ה-y וציר ה-x.

י. הנו השטח המוגבל בין גרף הפונקציה  $f(x)$  וציר ה-x בתחום  $0 \leq x < 0.25\pi$ .

יא. נתון:  $S = 2.6$ . האם יתכן שגרף הפונקציה  $f(x)$  חותך את ציר ה-x בנקודה  $(0.75; 0)$ ? נמקו.



7. נתונה הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$  המוגדרת לכל ערך של  $x$ :  $f'(x) = (a - x)^3 + b$ ,  $a > 0$ .

הישר  $y = -48x + 64$  משיק לגרף פונקציית הנגזרת  $f'(x)$  בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$ .  
א. מצאו את  $a$  ו- $b$ .

הציבו:  $a = 4$ ,  $b = 0$  וענו על הסעיפים הבאים:

ב. (1) האם יש לפונקציה  $f(x)$  נקודת פיתול בנקודה שבה  $x = 4$ ? נמקו.

(2) מצאו ואת תחומי הקעירות כלפי מעלה ואת תחומי הקעירות כלפי מטה של הפונקציה  $f(x)$ .

(3) מצאו לפונקציה  $f'(x)$  נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון, תחומי העלייה והירידה, נקודות פיתול (אם יש כאלה).

(4) סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ .

ג. (1) נתון: הישר  $y = 4$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x)$ . מצאו את הפונקציה  $f(x)$ .

(2) מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים.

(3) מצאו ואת תחומי העלייה, תחומי הירידה ונקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ .

(4) הוסיפו לסרטוט של הפונקציה  $f'(x)$  את הגרף של  $f(x)$  (היעזרו בצבע אחר).

ד. נתונה הפונקציה  $g(x) = \frac{1}{f'(x)}$ .

(1) מצאו לפונקציה  $g(x)$  את תחום ההגדרה ואת האסימפטוטות המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

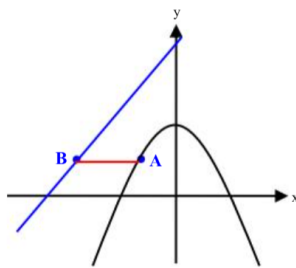
(2) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $g(x)$  (אם יש כאלה).

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציות  $f'(x)$  ו- $g(x)$ .

(4) הוסיפו לסרטוט של הפונקציות  $f(x)$  ו- $f'(x)$  את גרף הפונקציה  $g(x)$  בתחום  $x > 4$ .

היעזרו בצבע אחר.

ה. חשבו את השטח המוגבל בין הגרפים של הפונקציות  $f(x)$ ,  $f'(x)$ ,  $g(x)$ , והישר  $x = 6$ .



8. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה  $f(x) = -x^2 + a$  ( $a > 0$ ).

הנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה  $y = x + 18$  כך שהקטע AB

מקביל לציר ה- $x$ . הנקודות A ו-B נמצאות ברביע השני.

נסמן את שיעור ה- $x$  של הנקודה A ב- $t$ .

א. בטאו באמצעות  $a$  את תחום הערכים של  $t$ .

ב. האורך המינימלי של הקטע AB המתקבל באופן זה הוא 8.75.

חשבו את  $a$ .

ג. עבור הערך של  $a$  שחישבתם בסעיף ב', חשבו את השטח המוגבל

בין גרף הפונקציה  $f(x)$ , הישר  $y = x + 18$ , ציר ה- $y$  והקטע AB.

תשובות

1. א. 1) כן 2) כן 3) לא 4) כן ב. 1) (-2;35) מקסימום, (4;-73) מינימום 2) כן

ג. 1)  $g(4) = 21\frac{1}{3}$ ,  $g(-1) = 8\frac{1}{3}$  2) עולה לכל ערך של t

ד. 1) כן 2)  $77.62^\circ$

2. א. 3 ב. 2)  $a_1 = \frac{1}{9}$  ג.  $797161\frac{1}{3}$

3. א. שווה ב. 36 ג. 1)  $\frac{2659}{2678} = 0.9929$  2)  $\frac{42}{1339} = 0.0314$  3)  $\frac{420}{1339} = 0.3137$

4. א. הוכחה ב. הוכחה ג. 1)  $\alpha$  2)  $0.92R$

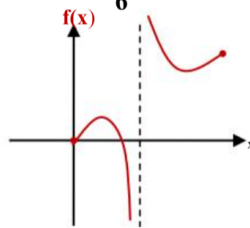
5. א. 1)  $AB = 2R\sin(\alpha + \beta)$ ,  $CD = 2R\sin\beta$  2)  $180^\circ - (2\alpha + \beta)$

ב.  $\frac{\sin(60^\circ - \alpha)}{\sin(120^\circ - \alpha)}$  ג.  $\alpha = 13.9^\circ$ ,  $\beta = 106.1^\circ$  1)  $1.046R$  2)  $0.6039$

6. א. 1) כן, שתי נקודות קיצון 2) אין ב. 1)  $x = \frac{\pi}{4}$  2) III  $a \geq 6$

3)  $f'(0) = f'(0.5\pi) = a - 6$

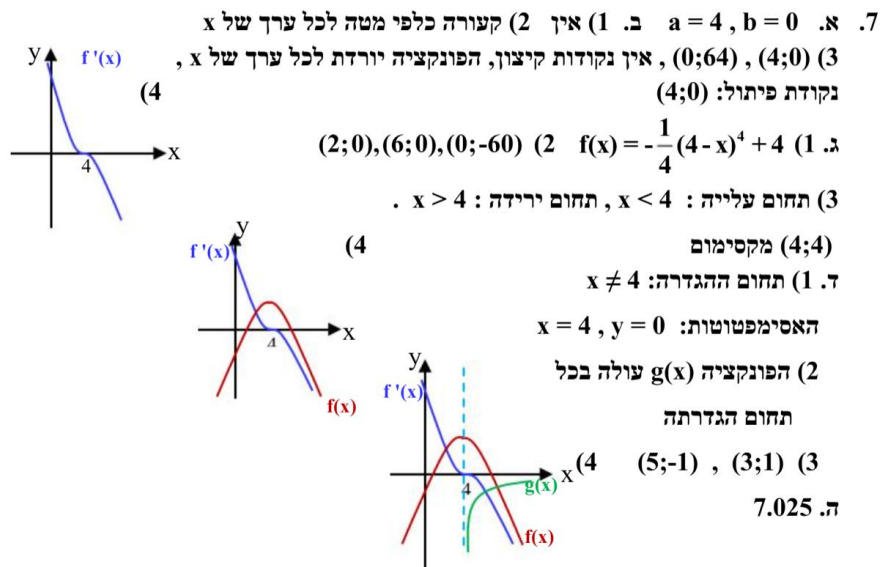
ג.  $a = 24$  1) ד. 1) (0;0) מינימום,  $(\frac{\pi}{6}; 7.37)$  מקסימום,  $(\frac{\pi}{3}; 30.33)$  מינימום,



2) מקסימום  $(\frac{\pi}{2}; 37.7)$

3) 7.87

ה. לא יתכן

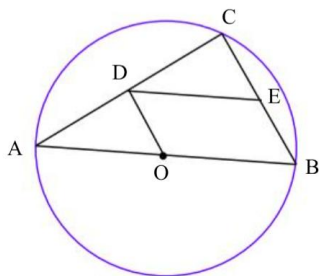


8. א.  $-\sqrt{a} < t < 0$  ב.  $a = 9$  ג.  $42 \frac{67}{96}$

### מבחן מס' 5

פרק ראשון- שאלות קצרות, סדרות והסתברות

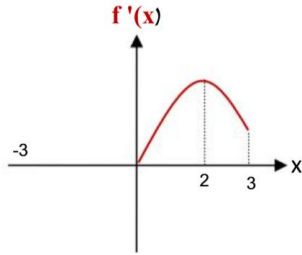
1. א. נתונה הסדרה:  $a_n, \dots, 198, 136, 84, 42, 10$ .  
 1 זהו איזה מן הביטויים הבאים עשוי לייצג את האיבר הכללי  $a_n$  של הסדרה:  
 I.  $a_n = n^2 + 29n - 20$  II.  $a_n = 5n^2 + 17n - 12$  III.  $a_n = 2n^2 + 26n - 18$   
 2 נתון כי איברי הסדרה מקיימים, לכל  $n$  טבעי, את הכלל:  $a_{n+1} = a_n + 10n + 22$ .  
 הראו שהנוסחה שבחרתם בסעיף הקודם מייצגת את האיבר  $a_n$  לכל  $n$  טבעי.



- ב. משולש ABC חסום במעגל O. AB קוטר במעגל.  
 הנקודות D ו-E נמצאות על הצלעות AC ו-BC בהתאמה  
 כך שמתקיים:  $DE \parallel AB, OD \perp AC$ .  
 1 הוכיחו: המרובע ODEB הוא מקבילית.  
 2 הוכיחו: המרובע ODCE הוא מלבן.

ג. הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת לכל ערך של  $x$ . גרף הפונקציה  $f(x)$  חותך את ציר ה- $x$  בנקודות  $(1;0)$ ,  $(-7;0)$ ,  $(4;0)$ . נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  הן:  $(0;-8)$  נקודת מינימום והנקודה  $(2;3)$  היא נקודת מקסימום.

מצאו את נקודות החיתוך עם ציר ה- $x$  ואת שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $g(x) = -2f(x+8)$ . קבעו גם את סוג הקיצון.



ד. הפונקציה  $f(x)$  רציפה וגזירה בתחום  $-3 \leq x \leq 3$ . הפונקציה  $f(x)$  זוגית ופונקציית הנגזרת  $f'(x)$  אי-זוגית. בצירוף שלפניכם מתואר הגרף של  $f'(x)$  בתחום  $0 \leq x \leq 3$ . I. הוסיפו את הסימנים:  $<$ ,  $=$ ,  $>$  במקומות המסומנים. בכל אחד מן הסעיפים הבאים ונמקו.

$$1. f(-2) \_ f(-1) \quad 4. f''(2) \_ 0$$

$$2. f(0) \_ f(2) \quad 5. f''(0) \_ 0$$

$$3. f'(2) \_ 0 \quad 6. f''(2.5) \_ 0$$

II. מצאו את שיעורי ה- $x$  של נקודות הקיצון ושל נקודות הפיתול של

הפונקציה  $f(x)$  בתחום  $-3 \leq x \leq 3$ .

III. נתון:  $f(-2) = 1$ ,  $f(0) = -3$ .

חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה  $f'(x)$ , ציר ה- $x$  והישר  $x = 2$ .

שאלון 35571

מבחנים ממוקדים א.מ. ספרי מתמטיקה  
קיץ תשפ"ה (2025)

2. נתונה הסדרה האינסופית  $a_1, a_2, a_3, \dots$  שמנתה  $q$ .

נתון: הסדרה מתכנסת ועולה,  $a_1 = 8x^2 - 3x$ ,  $q = 4x - 1$ .

א. מצאו את תחום הערכים של  $x$ .

ב. סכום הסדרה גדול פי  $\frac{4}{3}$  מן האיבר הראשון שלה.

(1) מצאו את מנת הסדרה.

(2) מצאו את האיבר הראשון של הסדרה.

ג. נתונה סדרה הנדסית אינסופית נוספת שאינה עולה ואינה יורדת  $b_1, b_2, b_3, \dots$ .

נתון:  $b_1 = 64$ ,  $a_1 \cdot b_5 = -160$ . מצאו את מנת הסדרה  $b_1, b_2, b_3, \dots$ .

ד. נתונה סדרה אינסופית נוספת  $c_1, c_2, c_3, \dots$  המקיימת:  $c_1 = a_1 b_1$ ,  $c_2 = a_2 b_2$ ,  $c_3 = a_3 b_3, \dots$ .

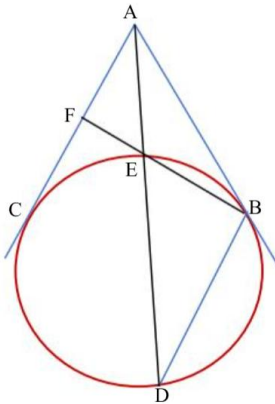
(1) האם הסדרה  $c_1, c_2, c_3, \dots$  היא סדרה הנדסית? אם כן, האם היא מתכנסת? נמקו.

(2) אם הסדרה  $c_1, c_2, c_3, \dots$  היא סדרה הנדסית מתכנסת, מצאו את סכום הסדרה.

3. בית קפה מזמין מדי יום שישי עוגיות משלושה ספקים- ספק A, ספק B ו- ספק C. ספק A מספק לבית הקפה 40% מן הארגזים, ספק B מספק 36% מן הארגזים ואת השאר מספק ספק C. העוגיות מכל הספקים מגיעות בארגזים שבתוכן העוגיות ארוזות ב- 24 קופסאות. ספק A מספק לבית הקפה בכל ארגז 20 קופסאות של עוגיות עם סוכר ו- 4 קופסאות של עוגיות ללא סוכר. בכל ארגז שמגיע מספק B יש 16 קופסאות של עוגיות עם סוכר ו- 8 קופסאות של עוגיות ללא סוכר. בכל ארגז שמגיע מספק C יש n קופסאות של עוגיות עם סוכר והשאר הן עוגיות ללא סוכר. א. פותחים ארגז שהגיע מספק C ומוציאים ממנו, בזו אחר זו, שתי קופסאות שנבחרו באקראי. ההסתברות שהוצאו שתי קופסאות של עוגיות ללא סוכר היא  $\frac{15}{92}$ . מצא את n. ב. בוחרים באקראי באחת מן הארגזים שסופקו לבית הקפה ומן הארגז שנבחר מוציאים בזו אחר זו שתי קופסאות של עוגיות שנבחרו באקראי. (1 לפחות אחת מן הקופסאות שנבחרו מכילה עוגיות עם סוכר. מה ההסתברות שנבחרו שתי קופסאות של עוגיות עם סוכר שהגיעו מספק B? (2 מה ההסתברות שלאחר הוצאת שתי הקופסאות מן הארגז שנבחר, נותרו בו 2 קופסאות של עוגיות ללא סוכר?

**פרק שני – גיאומטריה וטריגונומטריה במישור**

4. מנקודה A יוצאים שני ישרים המשיקים למעגל בנקודות B ו- C. BD הוא מיתר במעגל המקביל למשיק AC. הקטע AD חותך את המעגל במעגל בנקודה E. המשיך המיתר BE חותך את המשיק AC בנקודה F (ראה ציור).



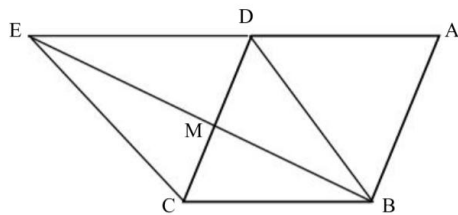
א. (1 הוכיחו:  $AF \cdot DB = BF \cdot EB$  .

(2 נתון:  $EB = 1.5 \cdot FE$  . הראו כי  $\frac{AF}{FE} = \sqrt{2.5}$  .

ב. נתון : שטח המשולש AEF הוא S .

בטאו באמצעות S את שטח המשולש AFB.

ג. נתון:  $DE = 6$  ,  $AF = \sqrt{10}$  . חשבו את AC.



5. המרובע ABCD הוא מעוין.

חוצה הזווית DBC חותך את המשך

הצלע AD בנקודה E. הקטע BE חותך

את הצלע CD בנקודה M (ראו ציור).

נתון:  $MC = 4a$  ,  $DM = 5a$  .

א. הביעו בעזרת a את אורך האלכסון DB.

ב. חשבו את זוויות המעוין ABCD.

ג. נתון:  $CE = 25.554$  ס"מ. חשב ואת a .

6. נתונה הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$  :  $f'(x) = \frac{3x-15}{\sqrt{x^2-10x+c}}$ .

הפונקציה  $f'(x)$  מוגדרת לכל ערך של  $x$ .

א. (1) מצאו את תחום הערכים של הפרמטר  $c$ .

(2) מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f'(x)$  עם הצירים (בטאו באמצעות  $c$  לפי הצורך).

(3) מצאו אסימפטוטות לגרף הפונקציה  $f'(x)$ .

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f'(x)$ .

ב. הישר המשיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$  מקביל

לישר  $y = -\frac{15}{11}x$ . מצאו את הערך של  $c$ .

ג. נתון : לפונקציה  $f'(x)$  יש נקודת פיתול בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$ .

הנקודות A ו-B נמצאות על גרף הפונקציה  $f'(x)$ . נתון  $x_B = 15$ ,  $x_A = 0$ .

חלקיק נע לאורך גרף הפונקציה  $f'(x)$  מנקודה A לנקודה B. נסמן ב- $L$  את אורך המסלול שעבר

החלקיק. איזה מן הביטויים הבאים מתאים לאורך המסלול שעבר החלקיק? נמקו.

(1)  $L > 15.2$  (2)  $L < 15.2$ .

ד. נתונה הפונקציה  $g(x) = f'(x+5)$ . הראו כי מתקיים:  $\int_{-a}^a g(x)dx = 0$  ( $a > 0$ ).

7. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x) + 1}$  בתחום  $-\pi \leq x \leq \pi$ .

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

2) הראו שהפונקציה  $f(x)$  אי-זוגית.

3) מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ב. נתונה הפונקציה  $g(x) = \tan x$  בתחום  $-\pi \leq x \leq \pi$ .

1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה  $g(x)$ .

2) הראו כי  $f(x) = g(x)$ .

3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$  (אם יש כאלה).

4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  בתחום הנתון.

ג. הפונקציה  $f'(x)$  היא הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$ .

1) מצאו את נקודות החיתוך של פונקציית הנגזרת  $f'(x)$  עם הצירים (אם יש כאלה).

2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f'(x)$ .

ד. נתונה הפונקציה  $h(x) = f(0.5x)$  בתחום  $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ .

1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה  $h(x)$ .

2) מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $h(x)$  עם הצירים.

ה. נתון:  $A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f'(x) dx$ ,  $B = \int_{\frac{2\pi}{3}}^0 h'(x) dx$ . סמנו את הטענה הנכונה ונמקו:

(1)  $A = B$  (2)  $A < B$  (3)  $A > B$

8. הישר  $y = -\frac{1}{t}x + \frac{1}{t+1}$ ,  $t > 0$ , חותך את ציר ה- $y$  בנקודה  $A$  ואת ציר ה- $x$  בנקודה  $B$ .

א. מצאו את הערך של  $t$  עבורו שטח המשולש  $ABO$  (ראשית הצירים) מקסימלי.

ב. עבור הערך של  $t$  שמצאתם בסעיף א', הישר  $y = -\frac{1}{t}x + \frac{1}{t+1}$  הוא המשיק בעל השיפוע

המינימלי לגרף הפונקציה  $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + b$ ,  $b$  הוא פרמטר.

1) מצאו את  $b$ .

2) הראו שהישר  $y = -\frac{1}{t}x + \frac{1}{t+1}$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודת הפיתול שלה.

3) נתונה הפונקציה  $g(x) = \int_0^x f''(t) dt$ . מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה  $g(x)$

וקבעו את סוגה (תוכלו להיעזר בסעיפים קודמים).

תשובות

1. א. 1) נוסחה II. ב. הוכחה ג. נקודות החיתוך עם ציר ה- $x$ :  $(-7;0)$ ,  $(-4;0)$ ,  $(-15;0)$ .  
נקודות הקיצון:  $(-8;16)$  נקודת מקסימום,  $(-6;-6)$  נקודת מינימום.

ד. I.  $0.1 > 0.2 < 0.3 > 0.4 = 0.5 > 0.6$

II.  $x = -3$  מקסימום,  $x = 0$  מינימום,  $x = 3$  מקסימום,  $x = -2$  פיתול,  $x = 2$  פיתול

4. III

2. א.  $\frac{1}{4} < x < \frac{3}{8}$  (1. ב.  $q = \frac{1}{4}$  (2. ג.  $a_1 = -\frac{5}{32}$  (2. ד.  $-2$

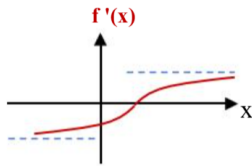
ד. 1) הנדסית מתכנסת  $(2) -6\frac{2}{3}$

3. א.  $n = 14$  (1. ב.  $\frac{20}{117}$  (2. ג.  $\frac{1}{115}$

4. א. ב.  $S_{\Delta AFB} = 2.5 \cdot S$ . ג.  $AC = 2\sqrt{10} \approx 6.32$

5. א.  $11.25a$  ב.  $\angle A = \angle DCB = 77.36^\circ$ ,  $\angle ADC = \angle ABC = 102.64^\circ$  ג.  $a = 2$

6. א. 1)  $c > 25$  (2.  $(0; \frac{-15}{\sqrt{c}})$  (3.  $(5;0)$ ,  $y = 3$ ,  $y = -3$  (4. ג.  $c = 121$  (1.



7. א. 1)  $-\pi \leq x < -\frac{\pi}{2}$ ,  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$  (3.  $(-\pi;0)$ ,  $(0;0)$ ,  $(\pi;0)$

ב. 1)  $-\pi \leq x < -\frac{\pi}{2}$ ,  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$

3) עולה בכל תחום הגדרתה

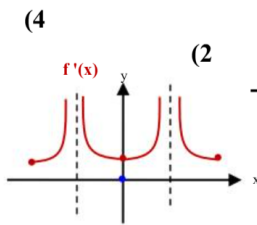
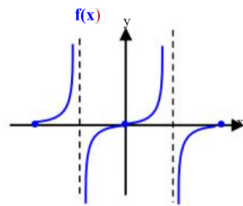
ג. 1)  $(0;1)$

ד. 1)  $-2\pi < x < -\pi$ ,  $-\pi < x < \pi$

$\pi < x \leq 2\pi$

2)  $(-2\pi;0)$ ,  $(0;0)$ ,  $(2\pi;0)$

ה. טענה 1)



8. א.  $t = 1$  (1. ב.  $b = \frac{1}{6}$  (3. מינימום מוחלט  $(1;-1)$

## מבחן מס' 6

**פרק ראשון - שאלות קצרות, סדרות והסתברות**

1. א. נתונה נוסחת הסכום של סדרה:

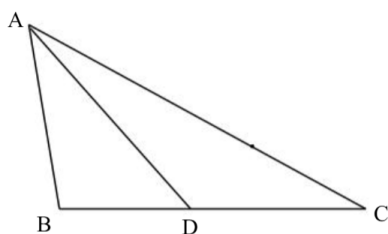
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \dots + \frac{1}{(7n-3)(7n+4)} = \frac{n}{4(7n+4)}$$

(1) הוכיחו את הטענה הבאה:

- אם הנוסחה נכונה עבור מספר טבעי כלשהו  $n$  אזי היא נכונה גם עבור  $n + 1$ .
- (2) האם ניתן לקבוע על פי הסעיף הקודם כי סכום 10 האיברים הראשונים של

הסדרה הוא  $\frac{5}{148}$ ? נמקו.

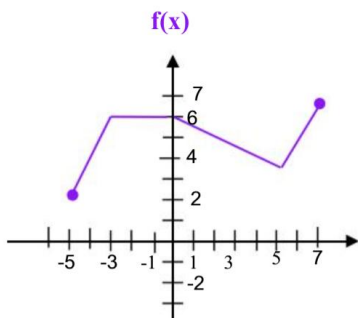
(3) נתון כי נוסחת הסכום של הסדרה נכונה לכל  $n$  טבעי. מצאו את  $a$  ואת  $b$ .



ב. הקטע  $AD$  חוצה את הזווית  $\sphericalangle BAC$  במשולש  $ABC$ .

נתון:  $AB = 9$ ,  $AC = 16$ .

- חשבו את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש  $ABD$  לבין רדיוס המעגל החוסם את המשולש  $ADC$ .



ג. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה  $f(x)$  בתחום  $-5 \leq x \leq 7$ .

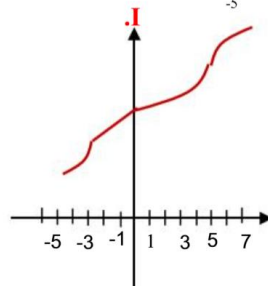
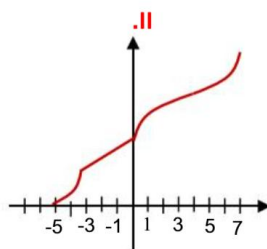
(1) חשבו את ערך האינטגרל  $\int_{-5}^7 f(x) dx$ .

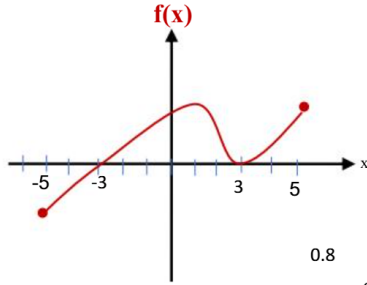
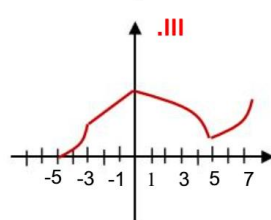
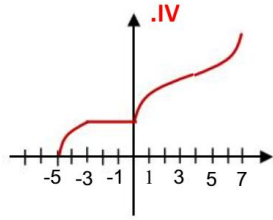
(2) הפונקציה  $g(x)$  מוגדרת גם היא בתחום  $-5 \leq x \leq 7$  ומקיימת  $g(x) = f(x) - 1$ . היעזרו בסעיף הקודם

וחשבו את ערך האינטגרל  $\int_{-5}^7 g(x) dx$ .

(3) קבעו איזה מן הגרפים הבאים מתאים להיות הגרף של

הפונקציה  $h(x) = \int_{-5}^x f(t) dt$ ? נמקו קביעתכם.





ד. הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת בתחום  $-5 \leq x \leq 5$  (ראו סרטוט).

$$t \geq -5, g(t) = \int_{-5}^t f(x) dx$$

1) הוסיפו את אחד הסימנים  $<$ ,  $>$ ,  $=$  במקומות המסומנים כך שתתקבל טענה נכונה:

$$g(-3) \text{ \_\_\_\_\_\_ } g(3), \quad g(-3) \text{ \_\_\_\_\_\_ } g(-4)$$

$$g(0) \text{ \_\_\_\_\_\_ } g(3), \quad g(-3) \text{ \_\_\_\_\_\_ } 0, \quad g(-5) \text{ \_\_\_\_\_\_ } 0$$

2) מצאו את ערכי  $t$  בנקודות הקיצון של הפונקציה  $g(t)$  וקבעו את סוג הקיצון.

2. סדרה מקיימת לכל  $n$  טבעי:  $a_1 = c$ ,  $a_{n+1} = \frac{2 \cdot 4^{n-1}}{a_n}$ .

א. 1) הוכיחו כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:  $\frac{a_{n+2}}{a_n} = 4$ .

2) בטאו בעזרת  $c$  את 5 האיברים הראשונים של הסדרה.

ב. 1) מצאו שני ערכים של  $c$  עבורם הסדרה  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$  היא סדרה הנדסית.

2) רשמו את 5 האיברים הראשונים של הסדרה עבור כל אחד מערכי  $c$  שמצאתם קודם.

ג. 1) בחרו ערך של  $c$  עבורו הסדרה  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$  איננה סדרה הנדסית ורשמו את 5 האיברים הראשונים של הסדרה.

2) עבור הערך של  $c$  שבחרתם, חשבו את הסכום:  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{19}$ .

ד. נתון: הסדרה  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$  היא סדרה הנדסית עולה.

מגדירים סדרה  $b_1, b_2, b_3, \dots$  המקיימת:  $b_n = a_n - t$ ,  $b_{n+1} = 2b_n - 5$ .

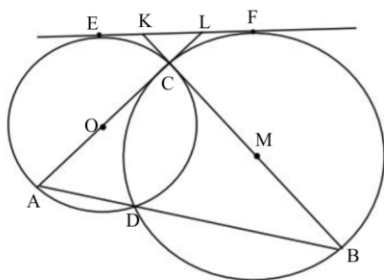
1) מצאו את  $t$ .

2) מצאו את הסכום  $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_9$ .

3. 40% מתלמידי שכבת י"א בבית ספר מסוים לומדים במגמה לתקשורת או במגמה לביולוגיה (או בשתי המגמות). 90 תלמידים אינם לומדים תקשורת וגם לא ביולוגיה.  
 א. כמה תלמידים בשכבת י"א באותו בית-ספר?  
 ב. בוחרים באקראי שני תלמידים משכבת י"א בביה"ס. ההסתברות שהתלמיד הראשון לומד במגמה לתקשורת והתלמיד השני אינו לומד במגמה לתקשורת היא  $\frac{24}{149}$ .  
 ידוע שרוב תלמידי השכבה אינם לומדים תקשורת. כמה תלמידים לומדים במגמה לתקשורת?

- ג. בשבוע מסוים נבחר מדי יום באקראי תלמיד מן השכבה שאינו לומד במגמה לתקשורת לעזור בהפקת מופע שמכינה המגמה (אותו תלמיד יכול להיבחר יותר מפעם אחת). מה ההסתברות שבדיוק בשניים מששת ימי הלימודים באותו שבוע נבחר תלמיד הלומד במגמה לביולוגיה?

4. המעגלים שמרכזיהם O ו-M נחתכים בנקודות C ו-D.



דרך הנקודה C עוברים שני קטרים: CA ו-CB ( $AC < BC$ ).

CA קוטר המעגל O ו-CB קוטר המעגל M.

א. הוכיחו: הנקודות A, D ו-B נמצאות על ישר אחד.

ב. נתון: AC משיק למעגל M בנקודה C.

(1) הוכיחו: BC משיק למעגל O בנקודה C.

(2) הוכיחו:  $CD^2 = AD \cdot DB$ .

(3) נתון:  $DB = 9$ ,  $AD = 4$ .

חשבו את אורכי הרדיוסים של המעגלים O ו-M.

ג. משיק משותף לשני המעגלים חותך את המעגל O בנקודה E ואת המעגל M בנקודה F (ראה

שרטוט). המשכי הקטרים AC ו-BC חותכים את המשיק המשותף בנקודות L ו-K

בהתאמה. חשבו את הזווית  $\angle ECF$ .

5. משולש חד-זווית החסום במעגל O. הנקודה D היא

אמצע הקשת BC (ראה ציור).

נתון: רדיוס המעגל O הוא R,  $\angle ABC = 60^\circ$ ,  $\angle BAC = \alpha$ .

א. (1) הביעו באמצעות R ו- $\alpha$  את שטחי המשולשים

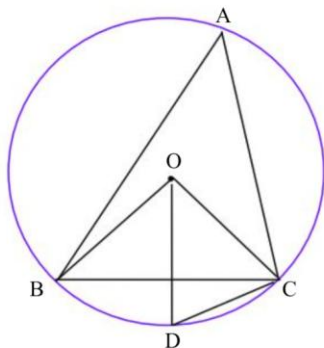
$\triangle ABC$  ו- $\triangle ODC$ .

(2) נתון יחס השטחים:  $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ODC}} = 5.31 \sin \alpha$ . הראו כי  $\alpha = 40^\circ$ .

ב. המשיק למעגל בנקודה A חותך את המשך המיתר DC בנקודה E.

(1) רדיוס המעגל החוסם את המשולש ACE הוא 6.736. מצאו את R.

(2) חשבו את אורך הקטע BE.



6. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{ax + b}{x + \sqrt{x}}$ .

גרף הפונקציה חותך את האסימפטוטה האופקית שלה בנקודה  $(\frac{1}{64}, 8)$ .

א. מצאו את  $a$  ואת  $b$ .

ב. (1) מצאו את תחום הגדרה של הפונקציה.

(2) האם גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $x$ ? נמקו.

(3) מצאו נקודות קיצון של הפונקציה וקבעו את סוג הקיצון.

(4) מצאו אסימפטוטות לגרף הפונקציה המאונכות לצירים.

ג. לפונקציה  $f(x)$  יש נקודת פיתול יחידה בנקודה שבה  $x = 0.54$ .

(1) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

(2) מצאו אסימפטוטות מאונכות לצירים לפונקציית הנגזרת  $f'(x)$ ,

(3) סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ .

(4) חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה  $f'(x)$ , ציר ה- $x$  והישר  $x = 4$ .

ד. (1) נגדיר:  $g(x) = f(x - 2) - 3$ . מצאו את ערכי  $m$  עבורם הישר  $y = m$  חותך את

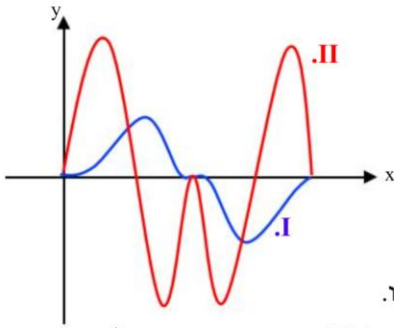
גרף הפונקציה  $g(x)$  בנקודה אחת.

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $g'(x)$ .

(4) האם השטח המוגבל בין גרף הפונקציה  $g'(x)$ , ציר ה- $x$  והישר  $x = 6$  שווה לשטח

שחישבתם בסעיף ג-4? נמקו.



7. בציור שלפניכם מתוארים הגרפים של הפונקציות

$f(x)$  ו- $f'(x)$  המוגדרות לכל  $x$  בתחום  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

א. התאימו כל אחד מן הגרפים I ו-II לפונקציות

$f(x)$  ו- $f'(x)$ . נמקו את קביעתכם.

ב. נתון:  $f'(x) = (2\sin x - \sin 2x)^n (\cos x - \cos 2x)$ ,

$n$  מספר טבעי.

(1) היעזרו בציור וקבעו האם  $n$  מספר זוגי או אי-זוגי? נמקו.

(2) הפונקציה  $f'(x)$  מוגדרת לכל ערך של  $x$ . האם הפונקציה  $f'(x)$  זוגית או אי-זוגית או לא

זוגית ולא אי-זוגית? הוכיחו את טענתכם.

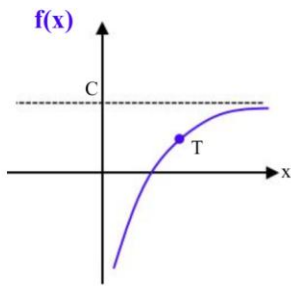
ג. נתונה הפונקציה  $g(x) = \int_0^x f'(t)dt$ ,  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $g(x)$ .

ד. נתון:  $f'(0) = 0$ ,  $f(\frac{2\pi}{3}) = \frac{27\sqrt{3}}{16}$ ,  $f'(\frac{\pi}{2}) = 4$ .

(1) מצאו את  $n$ .

(2) מצאו את הערך המקסימלי של הפונקציה  $g(x)$  בתחום  $0 \leq x \leq 2\pi$ .



8. בצירור שלפניכם מתואר גרף הפונקציה  $f(x) = 2 - \frac{2}{x^2}$  בתחום  $x > 0$ .

הנקודה C היא נקודת החיתוך של האסימפטוטה לגרף הפונקציה עם ציר ה-y. בנקודה T הנמצאת על גרף הפונקציה  $f(x)$  מעבירים משיק לגרף הפונקציה.

א. נסמן את שיעור ה-x של הנקודה T ב-t.

(1) הביעו את משוואת המשיק באמצעות t.

(2) המשיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודה T חותך את ציר ה-y בנקודה A ואת האסימפטוטה לגרף הפונקציה המאונכת לציר ה-y בנקודה B.

הביעו באמצעות t את שיעורי הנקודות A ו-B.

(3) מצאו את הערך של t עבורו סכום הקטעים  $CA + CB$  מינימלי.

ב. עבור הערך של t שמצאתם בסעיף הקודם, חישבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה  $f(x)$ ,

המשיק לגרף הפונקציה בנקודה T וציר ה-x.

### תשובות

1. א. (2 לא ניתן)  $b = 198, a = 44$  ב.  $\frac{9}{16}$

ג. (1 62 (2 50 (3 גרף II.

ד. (1  $g(-3) < g(-4)$  ,  $g(-3) < g(3)$

$g(0) < g(3)$  ,  $g(-3) < 0$  ,  $g(-5) = 0$

(2  $t = -5$  נקודת מקסימום,  $t = -3$  נקודת מינימום,  $t = 5$  נקודת מקסימום

2. א. (2  $c = \frac{2}{c}, 4c, \frac{8}{c}, 16c$  ב. (1  $c = \pm 1$  (2 עבור  $c = 1$  : 1, 2, 4, 8, 16

עבור  $c = -1$  : -1, -2, -4, -8, -16

ג. (1 לדוגמא, עבור  $c = 10$  נקבל : 10, 0.2, 40, 0.8, 160 (2 3, 512, 726.2

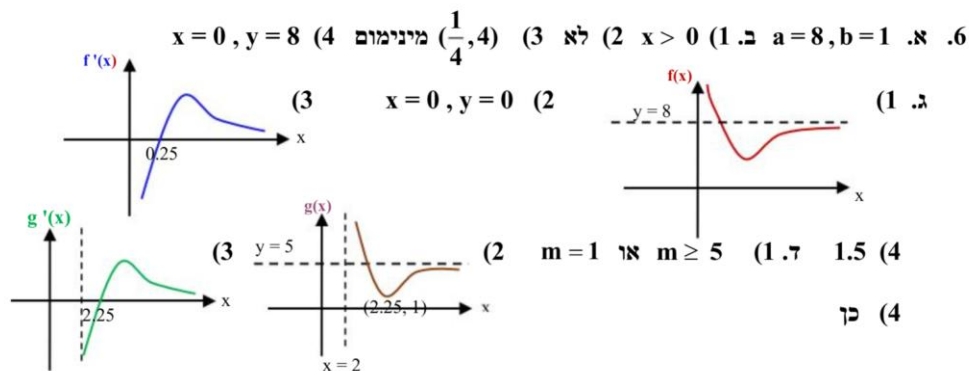
ד. (1  $t = -5$  (2 556

3. א. 150 ב. 30 ג.  $\frac{1215}{4096} \approx 0.2966$

4. ב.  $OC = \sqrt{13}$  ,  $MC = 1.5\sqrt{13}$  ג.  $135^\circ$

5. א. (1  $S_{\triangle ABC} = \sqrt{3}R^2 \sin(\alpha) \sin(120^\circ - \alpha)$  ,  $S_{\triangle ODC} = \frac{R^2 \sin \alpha}{2}$

ב. (1  $R = 5$  (2  $BE = 17.84$



7. א. גרף I -  $f(x)$ , גרף II -  $f'(x)$  (1. ב.  $n$  מספר זוגי (2 זוגית

ג. תחומי עלייה:  $0 < x < \frac{2\pi}{3}$  ו-  $\frac{4\pi}{3} < x < 2\pi$ , תחום ירידה:  $\frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3}$

$$\frac{27\sqrt{3}}{16} \quad (2 \quad n=2 \quad (1.7$$

8. א.  $y = \frac{4x}{t^3} - \frac{6}{t^2} + 2$  (1. ב.  $t=2$  (3  $B(1.5t; 2)$ ,  $A(0; 2 - \frac{6}{t^2})$  (2  $t=2$  (3  $B(1.5t; 2)$ ,  $A(0; 2 - \frac{6}{t^2})$ )

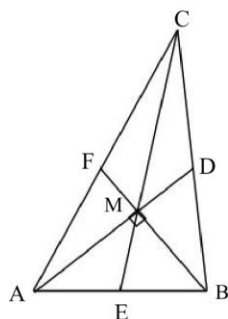
## מבחן מס' 7

פרק ראשון - שאלות קצרות, סדרות והסתברות

1. א. (1 הוכיחו באמצעות אינדוקציה מתמטית, כי הנוסחה  $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$

נכונה לכל  $n$  טבעי.

(2 חשבו את הסכום:  $\frac{9}{2^9} + \frac{10}{2^{10}} + \dots + \frac{28}{2^{28}}$



ב. הנקודה M היא נקודת מפגש התיכונים במשולש ABC,  $CA \neq CB$ .

התיכון AD מאונך לתיכון BF.

סמנו "נכון" או "לא נכון" ליד הטענות הבאות ונמקו:

(1  $CM = AB$

(2 M מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC.

(3  $FD = ME$

(4 שטח המשולש CMB גדול פי 2 משטח המשולש CMD.

(5 שטח המעגל החוסם את המשולש ABM גדול פי 4

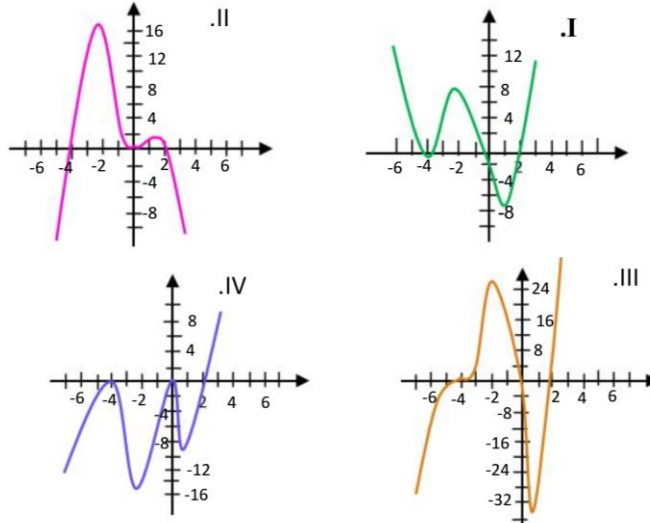
משטח המעגל החוסם את המשולש FDM.

ג. נתונות הפונקציות:

$$f(x) = -0.5x^2(x+4)(x-2), \quad g(x) = 0.25x^2(x+4)^2(x-2),$$

$$h(x) = 0.25x(x+4)^2(x-2), \quad j(x) = 0.25x(x+4)^3(x-2)$$

התאימו לכל אחד מן הגרפים I - IV את הפונקציה המתאימה. נמקו.



ד. נתונות הפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$  כך שמתקיים  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ .

(1) הביעו את הנגזרת של הפונקציה  $g(x)$  באמצעות  $f(x)$  ו- $f'(x)$ .

(2) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} - 2x^3 - \frac{28}{5}$ .

מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגן.

(3) הראו כי  $g(x) = \frac{20}{4x^5 - 5x^4 - 40x^3 - 112}$  ומצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $g(x)$ .

2. נתונה הסדרה ההנדסית  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  שמנתה 3. מן הסדרה הנתונה יצרו סדרה חדשה על-ידי

חיבור כל שלושה איברים סמוכים בסדרה:  $a_1 + a_2 + a_3, a_2 + a_3 + a_4, a_3 + a_4 + a_5, \dots$ .

א. הראו שהסדרה החדשה היא סדרה הנדסית ומצאו את מנתה.

(2) הראו שהיחס בין סכום  $n - 2$  האיברים האחרונים בסדרה המקורית לבין סכום הסדרה החדשה הוא  $\frac{9}{13}$ .

ב. נתון:  $a_1 = 1$  וההפרש בין סכום הסדרה החדשה לבין סכום  $n - 2$  האיברים האחרונים

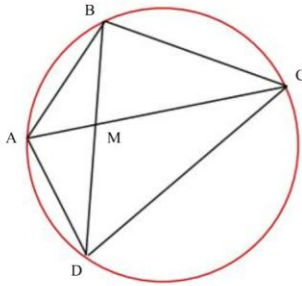
בסדרה המקורית הוא 118096. מצאו את מספר האיברים בסדרה המקורית.

ג. מן הסדרה המקורית יוצרים סדרה חדשה על ידי חיבור כל  $k$  איברים עוקבים בסדרה:

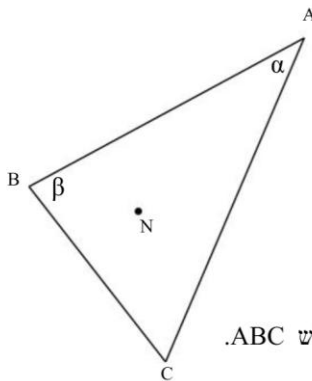
$a_1 + a_2 + \dots + a_k, a_2 + a_3 + \dots + a_{k+1}, a_3 + a_4 + \dots + a_{k+2}, \dots$

הביעו ובאמצעות  $k$  את סכום איברי הסדרה שנוצרה באופן זה.

3. רבים מתושבי ישראל חלו בחורף האחרון בשפעת. בסקר שנערך בקרב קבוצה גדולה של תושבים בוגרים בחורף האחרון, נמצא כי 40% מבין הנבדקים שחלו בשפעת היו נשים. מספר הנבדקים בסקר שלא חלו בשפעת גדול פי k ממספר הנשים שחלו בשפעת.
- א. בטאו באמצעות k את ההסתברות שנבדק (גבר או אישה) שנבחר באקראי חלה בשפעת.
- ב. ידוע שהמאורעות "נבחרה אישה" ו- "נבחר נבדק (גבר או אישה) שחלה בשפעת" הם מאורעות בלתי תלויים. חשבו את ההסתברות שנבדק שנבחר באקראי הנו גבר.
- ג. נתון כי  $\frac{2}{13}$  מבין הנבדקים היו נשים שחלו בשפעת.
- (1) מצאו את k.
- (2) נבחר באקראי גבר שהשתתף בסקר. מה סביר יותר, שהוא חלה בשפעת או לא חלה בשפעת?
- ד. נבחר באקראי 5 נבדקים שהשתתפו בניסוי. מה ההסתברות שרובם היו גברים שחלו בשפעת?



4. המרובע ABCD חסום במעגל. M נקודת החיתוך של האלכסונים AC ו-BD. נתון:  $AB = AD$ .
- א. הוכיחו:  $\frac{CB}{CD} = \frac{BM}{MD}$
- ב. (1) הוכיחו:  $\angle ABC = \angle DMC$ .
- (2) הוכיחו:  $CD \cdot BM = AD \cdot CM$ .
- ג. נתון:  $AB = a$ ,  $BC = 1.2a$ ,  $CD = 1.6a$ ,  $BD = 40.96$ .  
חישבו את אורך הקטע CM.
- ד. נתון: שטח המשולש ABC גדול פי 1.156 משטח המשולש DMC.
- (1) חשבו את a.
- (2) חשבו את היחס בין שטח המשולש ABM לבין שטח המשולש CBM.



5. נתון משולש ABC. הנקודה N היא נקודת מפגש חוצי זוויותיו.
- נתון:  $\angle B = \beta$ ,  $\angle A = \alpha$ .
- א. (1) הביעו בעזרת  $\alpha$  ו- $\beta$  את יחס השטחים  $\frac{S_{ABC}}{S_{ABN}}$ .
- (2) נתון:  $\beta = 80^\circ$ , שטח המשולש ABC גדול פי 2.75 משטח המשולש ANB. הראה כי  $\alpha = 36^\circ$ .
- (3) חשבו את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC לבין רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABN.
- ב. נתון:  $AB = 15$  ס"מ. חשבו ואת אורך רדיוס המעגל החוסם במשולש ABC.

6. א. הישר  $8y = 5x - 7$  המשיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודה שבה  $x = -1$ .

חשבו  $f(-1) + f'(-1)$ .

ב. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 25}$ . מצאו את  $a$  ו- $b$ .

ג. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצאו את האסימפטוטות לגרף הפונקציה המאונכות לצירים.

(3) הראו כי  $f'(x) = \frac{10}{(x+5)^2}$ .

(4) הסבירו מדוע הפונקציה עולה בכל תחום בו היא מוגדרת.

(5) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

(6) מצאו את ערכי  $m$  עבורם אין פתרון למשוואה  $f(x) = m$ .

(7) מצאו ואת תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה  $f(x)$ .

ד. נתון:  $k = \int_t^{t+4} -\frac{f'(x)}{(f(x))^3} dx$ .

(1) מצאו ערך של  $t$  עבורו בוודאות  $k > 0$  וערך של  $t$  עבורו בוודאות  $k < 0$ .

(2) חשבו את  $\int_{-10}^{-6} -\frac{f'(x)}{(f(x))^3} dx$ .

7. הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת וגזירה לכל ערך של  $x$ .

נגדיר פונקציה נוספת:  $g(x) = f(x-p) + k$ .

א. (1) הראו שאם הנקודה  $(x_1; y_1)$  נקודת מקסימום של פונקציה  $f(x)$ , אז הנקודה

$(x_1 + p; y_1 + k)$  היא נקודת מקסימום של הפונקציה  $g(x)$ .

(2) נתון:  $k > 0, p > 0$ . השלימו: הפונקציה  $g(x)$  מתקבלת על-ידי:

הזזה אופקית של הפונקציה  $f(x)$  יחידות ימינה/שמאלה (הקף תשובה נכונה)

הזזה אנכית של הפונקציה  $f(x)$  יחידות כלפי מעלה/מטה (הקף תשובה נכונה).

ב. נתונה הפונקציה  $f(x) = 2\sin^2 x - x$  בתחום  $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .

(1) מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

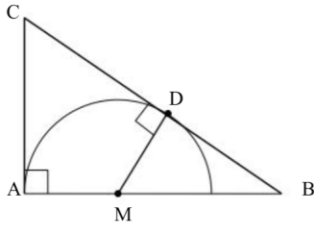
ג. היעזרו בסעיפים הקודמים וסרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x) = 2\sin^2(x - \frac{\pi}{4}) - x + \frac{\pi}{4} + 1$

בתחום  $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$ .

ד. (1) סרטטו, באותה מערכת צירים, את גרפים של  $f'(x)$  ושל  $g'(x)$ .

(2) האם  $f'(0) = g'(\frac{\pi}{4})$ ? נמקו.

(3) חשבו את השטח המוגבל בין הגרף של  $f'(x)$  וציר ה- $x$  בתחום  $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ .



8. במשולש ישר-זווית ABC ( $\angle A = 90^\circ$ ) חסום חצי מעגל

שמרכזו M נמצא על הצלע AB. הצלע AC משיקה לחצי המעגל

בנקודה A והצלע BC משיקה לחצי המעגל בנקודה D (ראו סרטוט).

אורך רדיוס המעגל הוא R.

א. סמנו:  $BM = x$  ובטאו בעזרת R את הערך של x עבורו

שטח המשולש ABC מינימלי.

ב. כאשר שטי המשולש ABC מינימלי, שטח המרובע ACDM הוא  $25\sqrt{3}$ . מצאו את R.

### תשובות

1. א. 2  $\approx 0.039$  ב. 1 נכון 2 לא נכון 3 נכון 4 נכון 5 נכון

ג. גרף I -  $h(x)$ , גרף II -  $f(x)$ , גרף III -  $j(x)$ , גרף IV -  $g(x)$

ד. 1  $g'(x) = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$  2 : (2;0) מקסימום, (3;-31.25) מינימום

3 (3;-0.032) מקסימום

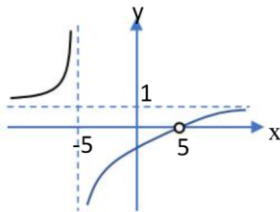
2. א. 1 3 ב.  $n = 12$  ג.  $\frac{(3^k - 1)(3^{13-k} - 1)}{4}$

3. א.  $\frac{1}{1+0.4k}$  ב. 0.6 ג.  $k = 4$  2 סביר יותר שהגבר שנבחר לא חלה בשפעת

ד. 0.08428

4. א.  $CM = 28.08$  ב.  $a = 25.16$  2 0.54

5. א. 1  $\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right)}$  3 0.94 ב. 3.51



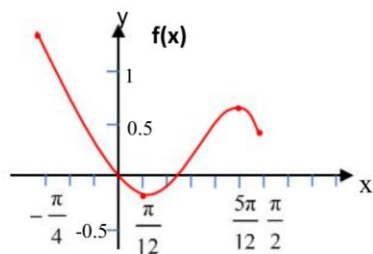
6. א.  $-\frac{7}{8}$  ב.  $a = -10, b = 25$  ג. 1  $x < -5, -5 < x < 5, x > 5$

5  $x = -5, y = 1$  2

7  $m = 0, m = 1$  תחומי החיוביות:  $x < -5, x > 5$

תחום השליליות:  $-5 < x < 5$  1. ד.  $k > 0$  עבור:  $-5 < t < 1$

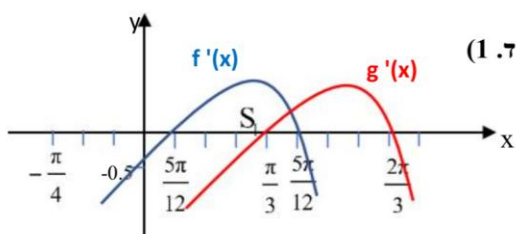
2  $k < 0$  עבור:  $t < -9$  או  $t > 5$   $-\frac{56}{1089}$



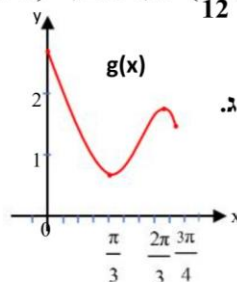
7. א. הזזה אופקית של הפונקציה  $f(x)$  יחידות ימינה  $p$  והזזה אנכית  $k$  יחידות כלפי מעלה.

ב. 1)  $(-\frac{\pi}{4}; 1.785)$  מקסימום,  $(\frac{\pi}{12}; -0.128)$  מינימום,

$(\frac{5\pi}{12}; 0.558)$  מקסימום,  $(\frac{\pi}{2}; 0.429)$  מינימום



1.7



ג.

2) כן

3) 0.685

8. א.  $x = 2R$  ב.  $R = 5$

## מבחן מס' 8

פרק ראשון- שאלות קצרות, סדרות והסתברות

1. א. הוכיחו בעזרת אינדוקציה מתמטית, או בכל דרך אחרת, כי עבור כל  $n$  טבעי מתקיים:

$$-12 - 7 + \dots + (n-3)(n+5) = \frac{n(2n^2 + 9n - 83)}{6}$$

ב. חברת הסעות מפעילה רק שני קווי אוטובוס: קו אחד מחיפה לאילת וקו שני מחיפה לצפת.

מספר האוטובוסים המופעלים בקו חיפה- צפת גדול פי 1.5 ממספר האוטובוסים בקו חיפה- אילת. חלק מן האוטובוסים של החברה הם חשמליים.

1) אם נבחר באקראי אוטובוס של החברה בקו חיפה - צפת, ההסתברות שנבחר אוטובוס

חשמלי היא  $p$ . בטאו בעזרת  $p$  את ההסתברות שהאוטובוס שנבחר איננו חשמלי.

2) ידוע כי אם נבחר באקראי אוטובוס של החברה בקו חיפה - צפת, ההסתברות שנבחר אוטובוס

חשמלי גבוהה מן ההסתברות שנבחר אוטובוס שאיננו חשמלי.

מצאו את תחום הערכים האפשריים של  $p$ .

ג. 1) הראו כי עבור כל ערך של  $x$  בתחום  $x < 1.5$  או  $1.5 < x < 5$  או  $x > 5$  מתקיים:

$$\frac{2}{(2x-3)^2} - \frac{1}{(x-5)^2} = \frac{-2x^2 - 8x + 41}{(2x-3)^2(x-5)^2}$$

2) חשבו את ערך האינטגרל:  $\int_2^4 \frac{-2x^2 - 8x + 41}{(2x-3)^2(x-5)^2} dx$

7. (1) נתונות הפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$  המקיימות  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ . הראו, שעבור כל ערך של  $x$  בו

$$g'(x) = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$$

הפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$  מוגדרות וגזירות, מתקיים

$$(2) \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = 3x + 6\sqrt{5-2x}$$

מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ , את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגן.

(3) גרף הפונקציה  $f(x)$  חותך את הצירים בנקודות  $(0; 6\sqrt{5})$  ו- $(-10; 0)$ .

סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

(4) הפונקציות  $g(x)$  המקיימות  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ . מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה  $g(x)$ ,

את שיעורי נקודות הקיצון שלה וסרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .

2. סדרה מוגדרת לכל  $n$  טבעי על ידי הכלל:

$$a_1 = -\frac{1}{27}$$

$$a_n \cdot a_{n+1} = -3^{n-4}$$

א. הוכיחו כי האיברים במקומות האי-זוגיים  $a_1, a_3, a_5, \dots$  וגם האיברים

במקומות הזוגיים  $a_2, a_4, a_6, \dots$  מהווים סדרה הנדסית.

ב. בסדרה זו ישנם 17 איברים.

(1) חשבו את האיבר האמצעי בסדרה.

(2) חשבו את סכום כל אברי הסדרה.

ג. מגדירים סדרה חדשה  $b_1, b_2, b_3, \dots$  המקיימת:

$$b_n = -\frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}}$$

(1) הראו שהסדרה  $b_1, b_2, b_3, \dots$  היא סדרה הנדסית מתכנסת.

(2) האם הסדרה  $b_1, b_2, b_3, \dots$  עולה יורדת או לא עולה ולא יורדת? נמקו.

(3) חשבו את סכום הסדרה האינסופית  $b_1 + b_2 + b_3 + \dots$ .

3. דניאל ויונתן נוהגים לשחק משחק מזל: הם מטילים בכל תור קובייה הוגנת .  
 אם מתקבל באותו תור מספר זוגי דניאל מנצח , ואם מתקבל מספר אי-זוגי יונתן מנצח.  
 המשחק מסתיים כאשר אחד השחקנים צובר 4 ניצחונות.  
 המנצח במשחק מקבל מחברו חפיסת שוקולד.  
 א. יום אחד נאלצו החברים לסיים את המשחק לפני סיומו, בשלב שבו צבר דניאל 3 ניצחונות ויונתן צבר רק ניצחון אחד.  
 (1) אילו נמשך המשחק כמתוכנן, מהי ההסתברות שדניאל יזכה בשוקולד ?  
 (2) פי כמה גדולה ההסתברות שדניאל יזכה בחפיסת השוקולד מן ההסתברות שיונתן יזכה בה ?  
 (3) בחפיסת השוקולד יש 32 קוביות שוקולד. החברים החליטו לחלק ביניהם השוקולד על פי הסיכוי של כל אחד מהם לזכות לו היו מסיימים את המשחק. כמה קוביות יקבל כל אחד מהם?  
 ב. ביום אחר שיחקו שוב דניאל ויונתן את אותו משחק . יונתן זכה בחפיסת השוקולד.  
 (1) מה ההסתברות שהמשחק הסתיים אחרי 6 הטלות קובייה ?  
 (2) ידוע שיונתן זכה במשחק אחרי 6 הטלות קובייה. מה ההסתברות שבחמשת ההטלות הראשונות התקבל מספר אי-זוגי בשלוש הטלות קובייה רצופות ?

4. AD תיכון לצלע BC במשולש  $\triangle ABC$ . הנקודה E

נמצאת על הצלע AC כך שהנקודות A, B, D, E הן נקודות

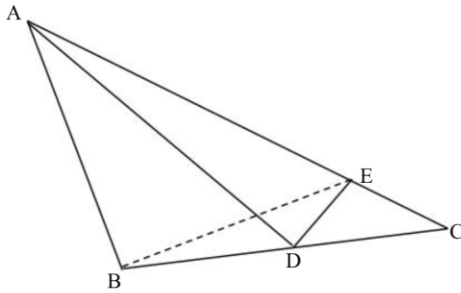
$$\frac{AE}{EC} = \frac{7}{2} \text{ נתון: } .$$

א. הוכיחו:  $BC = \frac{2}{3} AC$  .

ב. נתון: שטח המשולש BEC הוא 16.

חשבו את שטח המשולש ABC .

ג. האם יתכן כי  $\angle DAE + \angle BED = 90^\circ$  ? נמקו.



5. בטרפז ABCD הנקודה E נמצאת על הבסיס הגדול

DC כך ש-  $AD \parallel BE$  (ראו ציור).

נתון:  $\angle ADC = \alpha$ ,  $\angle BCD = \beta$ ,  $AD = AE$  .

$R_1$  הוא רדיוס המעגל החוסם את המשולש BCE

ו-  $R_2$  הוא רדיוס המעגל החוסם את המשולש ADE .

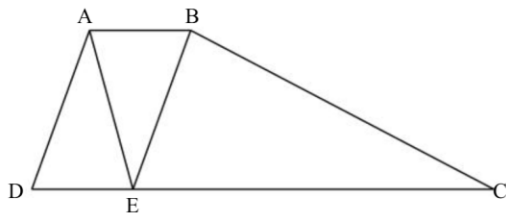
א. הביעו את היחס  $\frac{R_1}{R_2}$  באמצעות  $\alpha$  ו-  $\beta$  .

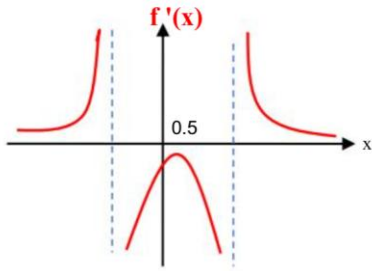
ב. נתון:  $\alpha = 2\beta$  . הראו כי  $\sqrt{2} < \frac{R_1}{R_2} < 2$  .

ג. נתון:  $\beta = 40^\circ$  .

(1) הביעו את שטח הטרפז באמצעות  $R_2$  .

(2) נתון:  $AC = 17.844$  . חשבו את  $R_2$  ו-  $R_1$  .





6. א. הפונקציה  $f(x)$  גזירה ומוגדרת בתחום  $x < -2$ ,  $-2 < x < 3$ ,  $x > 3$ .

בציור שלפניכם מתואר גרף הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$ :

הנקודה  $(0.5; -0.05)$  היא נקודת מקסימום של הפונקציה  $f'(x)$ .

(1) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$ .

(2) נתון: גרף הפונקציה  $f(x)$  חותך את האסימפטוטה לגרף

הפונקציה המאונכת לציר ה- $y$  רק בנקודה  $(0.5; 2)$ .

מצאו את האסימפטוטות לגרף הפונקציה  $f(x)$  המאונכות לצירים.

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ב. הפונקציה הנתונה בסעיף א' מתוארת על-ידי הכלל:  $f(x) = \frac{a - 2x}{(x^2 + bx + c)^2} + k$

מצאו את  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ו- $k$ .

ג. הפונקציה  $g(x)$  מקיימת:  $g(x) = f(x + 0.5) - 2$ .

(1) סרטטו את גרף הפונקציה  $g(x)$ .

(2) הראו כי:  $g(x) = -\frac{2x}{(x^2 - 6.25)^2}$

(3) הראו שהפונקציה  $g(x)$  אי-זוגית.

(4) הפונקציה  $h(x) = \int_{-1.5}^x g(t) dt$  מוגדרת בתחום  $-1.5 \leq x \leq 0$ .

האם הפונקציה עולה או יורדת? נמקו.

(5) חישבו את ערך האינטגרל  $\int_{-2}^2 g(x) dx$ .

(6) חישבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה  $g(x)$ , ציר ה- $x$ , הישר  $x = -2$  והישר  $x = 2$ .

ד. היעזרו בסעיפים הקודמים וחשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה  $f(x)$ , הישר  $y = 2$ ,

הישר  $x = -1.5$  והישר  $x = 2.5$ .

7. בציור שלפניך מתואר גרף הנגזרת של  $f'(x)$  של

הפונקציה  $f(x)$  בתחום  $-\pi \leq x < a$ ,  $a < x < b$ ,  $b < x \leq \pi$ .

הישרים  $x = a$  ו- $x = b$  הם אסימפטוטות לגרף הפונקציות  $f(x)$ ,

$f'(x)$  ו- $f''(x)$ . הנקודות  $(c; 0)$  ו- $(d; 0)$ ,  $c < d$ , הן נקודות

פיתול של הפונקציה  $f'(x)$ .

א. (1) האם יש לפונקציה  $f(x)$  נקודות פיתול? נמקו.

(2) מצאו את תחומי הקעירות כלפי מעלה ותחומי הקעירות

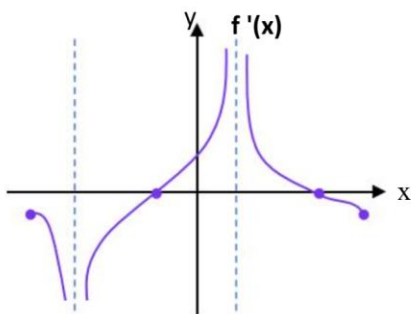
כלפי מטה של הפונקציה  $f(x)$ .

(3) האם יש לפונקציית הנגזרת השנייה  $f''(x)$  נקודות קיצון? נמקו.

(4) הביעו באמצעות  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ו- $d$  את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$ .

(5) נתון:  $f(0) = f(c) + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ . חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה  $f'(x)$ , ציר ה- $x$

וציר ה- $y$ .



ב. נתון:  $f(x) = \frac{k}{\cos x - \sin x} + p$   
 מצאו את  $a, b, c, d$ .

(2) נתון:  $f(c) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . מצאו את  $k$  ואת  $p$ .

ג. (1) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

(2) הפונקציה  $g(x)$  מקיימת:  $g(t) = \int_{-0.5\pi}^t f(x) dx$ ,  $-0.5\pi < t \leq -0.25\pi$ .

האם הפונקציה  $g(t)$  עולה או יורדת? נמקו.

8. נתון מעוין ABCD שצלעו  $\sqrt{2} \cdot a$ .

אלכסוני המעוין נחתכים בנקודה O. נסמן:  $AO = x$ .

א. (1) רשמו פונקציה  $f(x)$  המתארת את שטח המעוין ABCD.

(2) רשמו את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

ב. (1) בטאו באמצעות  $a$  את הערך מקסימלי של שטח המעוין.

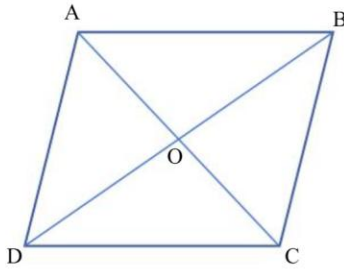
(2) האם השטח של מעוין עבורו  $AC = 2.6a$  גדול יותר או קטן

יותר משטחו של מעוין עבורו  $AC = 2.2a$ ? נמקו.

(3) האם נכונה הטענה: מעוין ששטחו מקסימלי הוא ריבוע? נמקו.

ג. האם נכונה הטענה: שטח המעוין מקסימלי כאשר סכום האורכים של אלכסוני המעוין מקסימלי?

הוכיחו את טענתכם.



**בהצלחה!**

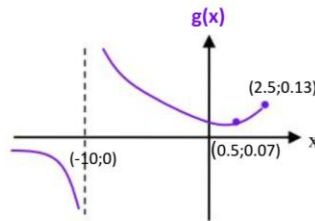
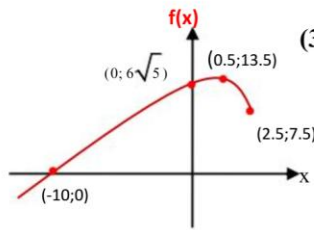
**תשובות**

1. א. הוכחה ב. (1)  $1-p$  (2)  $\frac{1}{2} < p < 1$  ג. (2)  $\frac{2}{15}$

ד. (2) תחום ההגדרה:  $x \leq 2.5$ , מקסימום (0.5;13.5), מינימום (2.5;7.5) (3)

(4) תחום ההגדרה:  $x \leq 2.5$  וגם  $x \neq -10$ ,

מקסימום (2.5;0.13), מינימום (0.5;0.07)



2. (1) ב. (1) -3 (2)  $\frac{14}{27}$  2915 ג. (1)  $q = \frac{1}{3}$  (2) עולה (3) -40.5

3. א. 1)  $\frac{7}{8}$  (2) פי 7 (3) יונתן: 4 קוביות, דניאל: 28 קוביות

ב. 1)  $\frac{5}{32} = 0.15625$  (2) 0.3

4. ב. 72 ג. לא

5. א.  $\frac{R_1}{R_2} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$  (1) ג.  $R_1 = 7.66$  (2)  $R_2 = 5$ ,  $3.9 R_2^2$

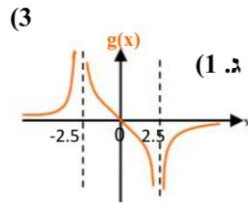
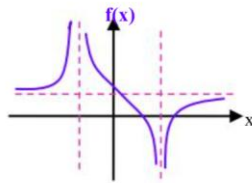
6. א. 1) תחום עלייה:  $x > 3$ ,  $x < -2$ ; תחום ירידה:  $-2 < x < 3$

(2)  $y = 2$ ,  $x = -2$ ,  $x = 3$

ב. 1)  $k = 2$ ,  $c = -6$ ,  $b = -1$ ,  $a = 1$

(4) עולה 0 (5)

(6)  $\frac{128}{225}$  .7  $\frac{128}{225}$



7. א. 1) אין (2) תחומי הקעירות כלפי מעלה:  $a < x < b$ ,

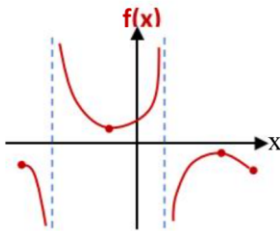
תחומי הקעירות כלפי מטה:  $-\pi < x < a$ ,  $b < x < \pi$

(3) כן (4) תחומי העלייה:  $c < x < b$ ,  $b < x < d$ ,

תחומי הירידה:  $-\pi < x < a$ ,  $a < x < c$ ,  $d < x < \pi$  (5)  $\approx 0.293$

ב. 1)  $p = 0$ ,  $k = 1$  (2)  $d = \frac{3\pi}{4}$ ,  $c = -\frac{\pi}{4}$ ,  $a = -\frac{3\pi}{4}$ ,  $b = \frac{\pi}{4}$

(2) עולה



8. א. 1)  $f(x) = 2x\sqrt{2a^2 - x^2}$  (2)  $0 < x < a\sqrt{2}$  (1) ב.  $2a^2$  (2) קטן יותר (3) כן

ג. כן

## מבחן מס' 9

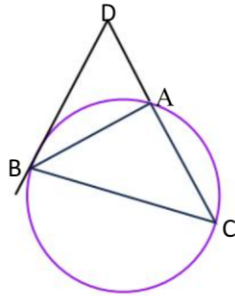
פרק ראשון- שאלות קצרות , סדרות והסתברות

1. א. נתונה הנוסחה :

$$26 + 64 + 174 + \dots + (2 \cdot 3^n + 2n + 4) = 3^{n+1} + n^2 + 5n - 3$$

1) הוכיחו את הטענה הבאה : אם נוסחת הסכום של הסדרה נכונה עבור מספר טבעי כלשהו  $k$ , אזי היא נכונה גם עבור  $k + 1$ .

2) האם נוסחת הסכום נכונה לכל  $n$  טבעי? נמקו.



ב. משולש שווה-שוקיים  $ABC$  ( $AB = AC$ ) חסום במעגל.

המשיק למעגל בנקודה  $B$  חותך את המשך הצלע  $AC$  בנקודה  $D$  (ראו שרטוט).

נתון:  $\angle BAC = 100^\circ$ . חשבו את היחס בין שטח המשולש  $ABC$  לבין שטח המשולש  $ABD$ .

ג. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה  $f(x)$ .

הפונקציה מוגדרת וגזירה בתחום  $0 \leq x < 9$ ,  $x > 9$ .

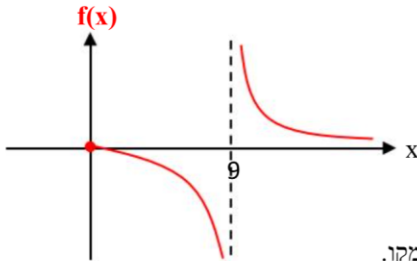
הישר  $y = 0$  הנו אסימפטוטה לגרף הפונקציה  $f(x)$ .

1) נתון:  $f'(0) = -1$ . סרטוט גרף אפשרי של פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ .

2) נתונה הפונקציה  $g(x) = f(x) - x$ .

כמה נקודות חיתוך יש לפונקציה  $g(x)$  עם ציר ה- $x$ ? נמקו.

3) סרטוט סקיצה אפשרית של הפונקציה  $g'(x)$ .



ד. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 2x + 8}$

1) הראו כי הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת לכל ערך של  $x$ .

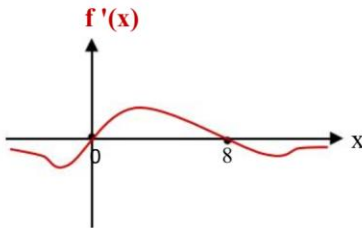
2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

3) בסרטוט שלפניכם מתואר גרף פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ .

מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  וקבעו את סוגן.

4) נתונה פונקציה  $g(x)$  המקיימת:  $g(x) = \sqrt{f(x)}$ .

מצאו את תחום ההגדרה ואת שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $g(x)$ .



2. הסדרה  $a_1, a_2, a_3, \dots$  מקיימת לכל  $n$  טבעי:  $a_{n+1}^2 = a_n \cdot a_{n+2}$ .

א. הוכיחו שהסדרה היא סדרה הנדסית.

ב. עבור  $k$  טבעי כלשהו, אברי הסדרה מקיימים:

$$a_{k+1} - a_k = 3, \quad a_k \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2} = 64$$

(1) מצאו את מנת הסדרה.

(2) נתון:  $S_{k-1} = \frac{21}{64}$ . מצאו את  $a_1$ .

ג. נתבונן בסדרה  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{11}$ . בין כל שני איברים סמוכים של הסדרה הוכנס איבר נוסף כך

שנוצרה סדרה הנדסית חדשה שאינה עולה ואינה יורדת.

נסמן ב- $S$  את סכום הסדרה  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{11}$ , נסמן ב- $A$  את סכום האיברים בסדרה החדשה

העומדים במקומות האי-זוגיים, נסמן ב- $B$  את סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה

החדשה ונסמן ב- $T$  את סכום כל אברי הסדרה החדשה.

רשמו נכון/לא נכון ליד הטענות הבאות ונמקו:

(1)  $A + B = S$

(2) מספר האיברים בסדרה החדשה גדול פי 2 ממספר האיברים בסדרה הנתונה

(3)  $A = S$

(4)  $A - B = S$

(5)  $S - a_{11} = \frac{B}{2}$

3. קר בדק את אופן קניית מוצרי הביגוד בעיר גדולה כלשהי בשנת 2020. הסקר נערך רק בקרב אנשי

העיר שרכשו בגדים במהלך השנה. חלק מן הנבדקים קנו בגדים רק בחנויות רחוב, חלקם רק

בקניונים והשאר קנו רק בהזמנה באינטרנט. מספר הנבדקים שקנו בגדים באינטרנט היה גדול

פי 1.6 ממספר הנבדקים שקנו בקניונים.

בוחרים באקראי שני נבדקים. ההסתברות שלפחות אחד מהם קונה בגדים רק

בחנויות רחוב היא 0.5775.

א. מה ההסתברות שנבדק שנבחר באקראי קנה בגדים רק באינטרנט?

ב. בוחרים באקראי 4 נבדקים.

(1) מה ההסתברות שלפחות אחד מהם אך לא כולם קנו בגדים באינטרנט?

(2) ידוע שלא כל הנבדקים קונים בגדים באינטרנט. מה ההסתברות שלפחות שניים מהם קונים

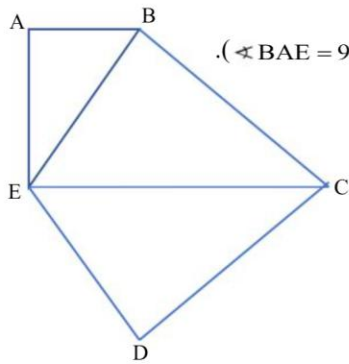
בגדים באינטרנט?

ג. אחד מעורכי הסקר רוצה להפיץ פרסומת בקרב 60 מן המשתתפים בסקר שנבחרו באקראי.

בשלב הראשון הוא בוחר שניים מהם באקראי (ללא החזרה). התברר שהרגלי קניית הבגדים

של 60 המשתתפים תואמים את אלה של כלל הנבדקים.

מה ההסתברות שאחד מהם קונה באינטרנט והשני לא קונה באינטרנט?



4. בצויר שלפניכם המרובע ABCE הוא טרפז ישר-זווית ( $\angle BAE = 90^\circ$ ,  $AB \parallel EC$ ).

נתון גם:  $BE = DE$ ,  $BC = DC$ , המרובע BCDE הוא בר חסימה.

א. הוכיחו:  $\triangle ABE \sim \triangle BEC$

ב. נתון:  $EC = 2.25AB$ .

(1) חשבו את היחס  $\frac{AB}{BE}$ .

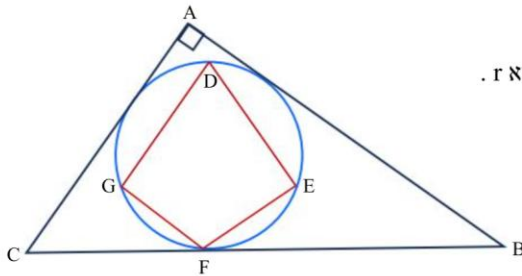
(2) פי כמה גדול שטח המרובע BCDE משטח המשולש ABE?

ג. נתון:  $AB = 4$

(1) חשבו את רדיוס המעגל החוסם את המרובע BCDE.

(2) חשבו את אורך הקטע BD.

(3) חשבו את שטח המחומש ABCDE.



5. נתון משולש ישר-זווית ABC ( $\angle A = 90^\circ$ ).

מעגל שמרכזו O חסום במשולש ABC. רדיוס המעגל O הוא r.

במעגל O חסום דלתון DEFG ( $DG = DE$ ,  $FG = FE$ ).

הצלע BC של המשולש משיקה למעגל בנקודה F.

(ראו ציור). נתון:  $\angle ABC = \angle EFB = \alpha$ .

א. בטאו את זוויות המשולש DFE באמצעות  $\alpha$ .

ב. נתון: רדיוס המעגל O הוא r.

(1) בטאו באמצעות r ו- $\alpha$  את שטח הדלתון DEFG.

(2) בטאו באמצעות r ו- $\alpha$  את שטח המשולש ABC.

ג. נתון: היחס בין שטח הדלתון DEFG לבין משטח המשולש ABC הוא  $24.4294 \cdot \left(\sin \frac{\alpha}{2}\right)^4$ .

חשבו את  $\alpha$ .

ד. נסמן ב-M את מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC.

בטאו באמצעות r את אורך הקטע OM.

פרק שלישי - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ופונקציות טריגונומטריות

6. נתונות הפונקציות  $f(x) = \sqrt{8x^2 - x^4}$  ו-  $g(x) = x\sqrt{8 - x^2}$ .

א. מצאו את תחום ההגדרה של כל אחת מן הפונקציות.  
 ב. מצאו את תחומי העלייה, תחומי הירידה ואת נקודות קיצון של כל אחת מן הפונקציות.

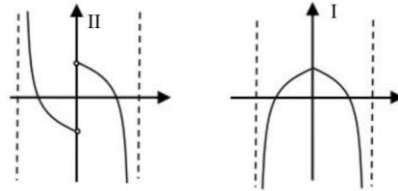
3. סרטטו סקיצה של הגרפים של הפונקציות  $f(x)$  ו-  $g(x)$ .

ב. קבעו לגבי כל אחת מן הטענות הבאות נכון/לא נכון ונמקו:

(1)  $f(x) = |g(x)|$  (2)  $g(x) = -f(x)$  (3)  $f(x) = g(x)$

ג. 1. בציורים שלפניכם מתוארים הגרפים של  $f'(x)$  ו-  $g'(x)$ .

איזה מן הגרפים I או II הוא גרף הפונקציה  $f'(x)$ ? נמקו.



2. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה  $g'(x)$  וציר ה-  $x$ .

7. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{(\cos x)^4 - (\sin x)^4}{\sin x \cdot \cos(2x)}$  בתחום  $0 \leq x \leq \pi$ .

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

2. מצאו אסימפטוטות לגרף הפונקציה המאונכות לציר ה-  $x$ .

3. הראו שגרף הפונקציה אינו חותך את הצירים בתחום הנתון.

ב. 1. הראו כי  $f'(x) = -\frac{\cos x}{(\sin x)^2}$ .

2. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הנתון וקבעו את סוגן.

3. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  בתחום הנתון.

4. סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת  $f'(x)$  בתחום הנתון.

ג. 1. הישר  $y = \frac{2}{3}$  חותך את גרף הפונקציה  $f'(x)$  בנקודה A.

הראו כי שיעורי ה-  $x$  של הנקודה A היא  $x = \frac{2\pi}{3}$ .

(2) חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה  $f'(x)$ , הישר  $y = \frac{2}{3}$ , ציר ה- $x$  וציר ה- $y$ .

8. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה  $f(x) = x^2 + 27$  ברביע הראשון. ישר מקביל לציר ה- $y$

העובר בנקודה A חותך את ציר ה- $x$  בנקודה C. הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה A חותך את ציר ה- $x$  בנקודה B. נסמן:  $x_A = t$  (שיעור ה- $x$  של הנקודה A).

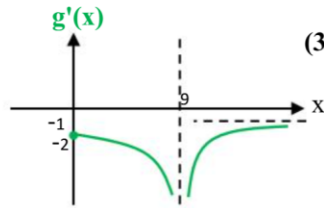
א. (1) מצאו את הערך של  $t$  עבורו שטח המשולש ABC הוא מינימלי.

(2) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודה A עבור הערך של  $t$  שמצאתם בסעיף א-1).

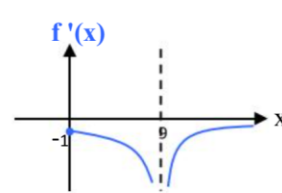
ב. הנקודה K היא נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ . הציבו  $t = 3$  וחשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה  $f(x)$ , המשיק לגרף הפונקציה בנקודה A והקטע BK. היעזרו בסרטוט מתאים.

### תשובות

1. א. 2 לא ב. 1.347



(2) שתי נקודות (3)



(1) ג.

ד. (2)  $(0; -1)$ ,  $(-4; 0)$ ,  $(2; 0)$  (3)  $(8; 1\frac{2}{7})$  נקודת מקסימום, נקודת מינימום

(4) תחום ההגדרה:  $x \leq -4$ ,  $x \geq 2$ ; נקודת מינימום, נקודת מינימום, נקודת מינימום

נקודת מקסימום  $(8; \frac{3\sqrt{7}}{7})$

2. א. 1. ב. 4 (1)  $a_1 = \frac{1}{64}$  (2) לא נכון (3) נכון (4) לא נכון (5) נכון

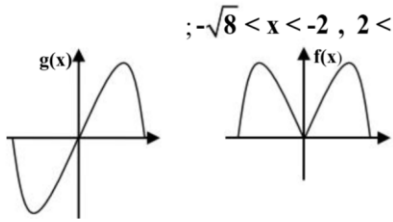
3. א. 0.4 ב. 0.8448 (1)  $\frac{144}{295} = 0.488$  ג.  $\frac{104}{203} \approx 0.5123$  (2)

4. א. 1. ב.  $\frac{2}{3}$  (2)  $\frac{9}{2}$  ג. 4.5 (1) 2  $4\sqrt{5}$  (3)  $22\sqrt{5}$

5. א.  $\angle FDE = \alpha$ ,  $\angle DEF = 90^\circ$ ,  $\angle DFE = 90^\circ - \alpha$  (1)  $S_{DEFG} = 2r^2 \sin 2\alpha$

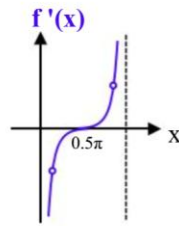
2)  $\frac{r^2 \sin 2\alpha}{8 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 (45^\circ - \frac{\alpha}{2})}$  ג.  $\alpha = 40^\circ$  ד.  $OM = 1.0446r$

6. א. 1)  $f(x)$  וגם  $g(x)$ :  $-\sqrt{8} \leq x \leq \sqrt{8}$  (2)  $f(x)$ : תחומי עלייה:  $0 < x < 2$ ,  $-\sqrt{8} < x < -2$ ;  
 תחומי ירידה:  $2 < x < \sqrt{8}$ ,  $-2 < x < 0$ ; נקודות קיצון: מינימום  $(-\sqrt{8}; 0)$ , מקסימום  $(-2; 4)$ ,  
 מינימום  $(0; 0)$ , מקסימום  $(2; 4)$ , מינימום  $(\sqrt{8}; 0)$

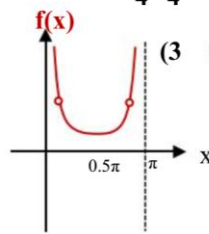


ג. 1) לא נכון (2) לא נכון (3) נכון ג. 1) גרף II (2) 8  
 2)  $g(x)$ : תחום עלייה:  $-2 < x < 2$ , תחום ירידה:  $-\sqrt{8} < x < -2$ ,  $2 < x < \sqrt{8}$ ;  
 מינימום  $(-\sqrt{8}; 0)$ , מקסימום  $(-2; 4)$ , מינימום  $(0; 0)$ , מקסימום  $(2; 4)$ , מינימום  $(\sqrt{8}; 0)$   
 3) מינימום  $(\sqrt{8}; 0)$

7. א. 1) תת  $\frac{3\pi}{4} < x < \pi$ ,  $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$ ,  $0 < x < \frac{\pi}{4}$  (2)  $x = 0$ ,  $x = \pi$



(4)



ב. 2)  $(\frac{\pi}{2}; 1)$  נקודת מינימום (3)

ג. 2) 1.241

8. א. 1)  $t = 3$  (2)  $y = 6x + 18$  ב. 22.5

### מבחן מס' 10

פרק ראשון- שאלות קצרות, סדרות והסתברות

1. א. 1) והוכיחו באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי עבור כל  $n$  טבעי מתקיים:

$$7 \cdot 1! + 44 \cdot 2! + 240 \cdot 3! + \dots + 4^{n-1} \cdot (4n+3) \cdot n! = 4^n \cdot (n+1)! - 1$$

(2) בסדרה זו ישנם 9 איברים. מצאו את ערכו של האיבר האמצעי בסדרה.

ב. נתונה סדרה אינסופית  $a_1, a_2, a_3, \dots$  שבה כל איבר גדול פי 5 מסכום כל האיברים הנמצאים

אחריו, כלומר:  $a_n = 5(a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots)$ ,  $a_{n+1} = 5(a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} + \dots)$ ,  
 וכן הלאה.

(1) הוכיחו:  $a_n = 6 \cdot a_{n+1}$ .

(2) האם הסדרה הנדסית? נמקו.

(3) האם היא מתכנסת? נמקו.

(4) האם היא יורדת? נמקו.

ג. נתונה הפונקציה  $f(x) = 4 + \frac{\sqrt{x^2 + 143}}{x - 2}$ .

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה, את משוואות האסימפטוטות לגרף הפונקציה המאונכות לצירים ואת נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

(2) נתון: הפונקציה  $f(x)$  יורדת בכל תחום הגדרתה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

(3) הפונקציה  $g(x)$  מקיימת:  $g(x) = f(x + p) + k$ . מצאו את ערכי  $p$  ו- $k$  עבורם גרף הפונקציה  $g(x)$  אינו חותך את הצירים.

ד. במשולש ישר-זווית  $ABC$  ( $\angle A = 90^\circ$ ) חסום חצי מעגל שרדיוסו  $R$ .

הנקודות  $E$  ו- $F$  הן נקודות ההשקה של הניצבים  $AB$  ו- $AC$  עם חצי המעגל (ראו סרטוט).

(1) הוכיחו כי המרובע  $AEOF$  הוא ריבוע.

(2) הוכיחו:  $BE \cdot FC = R^2$ .

(3) נתון:  $BE = \frac{3}{4}R$ . הביעו באמצעות  $R$  את אורך היתר  $BC$ .

2. נתונים ארבעת האיברים הראשונים של סדרה הנדסית  $a_n$ :  $-\frac{1}{27}, -\frac{1}{3}, -3, -27, \dots$ .

נתונה סדרה הנדסית נוספת  $b_1, b_2, b_3, \dots$  שמנתה שווה למנה של הסדרה  $a_1, a_2, a_3, \dots$ .

א. (1) מצאו את הערך של  $b_1$  עבורו סדרת המספרים  $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots$  יוצרים

סדרה הנדסית שאינה עולה ואינה יורדת.

(2) האיבר האחרון בסדרה החדשה הוא  $-243$ .

מצאו את סכום האברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה:  $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, -243$ .

ב. מגדירים סדרה נוספת  $c_1 + c_2 + c_3 + \dots$  המקיימת:  $c_n = \frac{a_n}{(b_n)^2}$ .

(1) סמנו נכון/לא נכון ליד הטענות הבאות ונמקו:

I. הסדרה  $c_1 + c_2 + c_3 + \dots$  היא סדרה הנדסית \_\_\_\_\_

II. הסדרה  $c_1 + c_2 + c_3 + \dots$  היא סדרה הנדסית יורדת \_\_\_\_\_

III. הסדרה  $c_1 + c_2 + c_3 + \dots$  היא סדרה הנדסית מתכנסת \_\_\_\_\_

(2) הסדרה  $c_1 + c_2 + c_3 + \dots$  היא סדרה אינסופית. אם היא מתכנסת, חשבו את סכום הסדרה.

3. ההנהלה של מפעל ארגנה כנס לעובדי המפעל (גברים ונשים).

במהלך הכנס התבקשו העובדים לבחור בין השתתפות בהרצאה בנושא תזונה נכונה לבין הרצאה

בנושא איכות הסביבה.  $\frac{3}{4}$  מן הנשים בחרו בהרצאה על תזונה נכונה.

א. אם נבחר באקראי 6 מן הנשים שהשתתפו בכנס (הוצאה עם החזרה), מה ההסתברות שלכל היותר ארבע מהן בחרו בהרצאה על תזונה נכונה?

ב. נמצא שאין תלות בין העובדה שנבחרה אישה לבין ההשתתפות בהרצאה על תזונה נכונה.

$\frac{8}{9}$  מבין המשתתפים בהרצאה על תזונה נכונה היו נשים.

בוחרים באקראי באחד המשתתפים בכנס.

(1) מה ההסתברות שנבחר גבר?

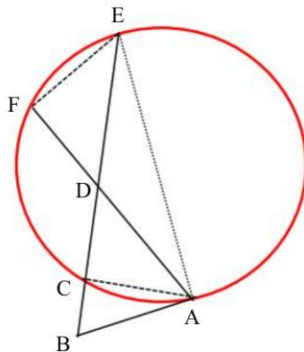
(2) מה ההסתברות שנבחר גבר או שנבחר עובד שבחר בהרצאה על איכות הסביבה?

ג. נמצא כי 144 מעובדי המפעל השתתפו בכנס. בוחרים 4 מבין העובדים שבחרו בהרצאה על איכות הסביבה (הוצאה ללא החזרה).

(1) מה ההסתברות ששני המשתתפים הראשונים שנבחרו היו נשים ושני האחרים היו גברים?

(2) מה ההסתברות שנבחרו שתי נשים ושני גברים?

(3) מה ההסתברות שנבחרו שתי נשים ושני גברים אם ידוע שהמשתתף הראשון שנבחר היה גבר?



4. BA משיק למעגל O בנקודה A. מנקודה B יוצא קטע שחותך את המעגל בנקודות C ו-E.

מנקודה A יוצא מיתר AF שחותך את הקטע BE בנקודה D (ראה ציור). הנקודה D היא אמצע המיתר AF.

א. האם ניתן לקבוע על פי הנתונים שהמשולש DEF חופף למשולש DAC? נמקן.

ב. נתון:  $AD = 3a$ ,  $DC = 2a$ ,  $BC = 0.77a$ .

בטאו באמצעות a את אורך הקטע CE.

ג. נתון:  $AB = 4.73$ .

חשבו את a (עגל תשובתך למספר שלם).

ד. נתון: AE קוטר המעגל. חשבו את שטח המעגל.

5. ABCD הוא מרובע חסום במעגל. נתון:  $AD = 3a$ ,  $CD = 2b$ ,  $BC = b$ ,  $AB = 2a$ .

א. הביעו באמצעות  $a$  ו- $b$  את קוסינוס הזווית  $\angle BAD$ .

ב. נתון:  $\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{5}{13}}$ ; הנקודה  $N$  היא אמצע הצלע  $CD$ .

(1) חשבו את הזווית  $\angle NBC$ .

(2) נתון גם כי הנקודה  $M$  היא אמצע הצלע  $AB$ .

הביעו באמצעות  $a$  את היקף המרובע  $DMBN$ .

**פרק שלישי - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ופונקציות טריגונומטריות**

6. הפונקציה  $f(x) = \frac{4}{(x+1)^2} - \frac{4}{(x-1)^2}$  היא הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$ . הפונקציות  $f(x)$

ו- $f'(x)$  מוגדרות באותו תחום. הישר  $y = -1$  הנו אסימפטוטה לגרף הפונקציה  $f(x)$ .

א. (1) מצאו את הפונקציה  $f(x)$ .

(2) מצאו את האסימפטוטות לגרף הפונקציה  $f(x)$  המאונכות לצירים.

(3) מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים.

(4) מצאו את תחומי העלייה, את תחומי והירידה ואת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ב. (1) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

(2) הוסיפו את אחד הסימנים  $<$ ,  $>$ ,  $=$  במקום המסומן ונמקו:

$$\int_2^4 f(x) d(x) \quad \text{---} \quad \int_2^5 f(x) d(x)$$

ג. (1) מצאו לפונקציה  $f'(x)$  אסימפטוטות מאונכות לצירים.

(2) מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f'(x)$  עם הצירים (אם יש כאלה)

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f'(x)$ .

(4) חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה  $f'(x)$ , גרף הפונקציה  $|f'(x)|$ ,

הישר  $x = 3$  והישר  $x = 5$ .

7. א. נתונות הפונקציות  $f(x) = \sin^2 x - 2.5 \sin x + 1$  ו- $g(x) = \sin x + \cos x$

בתחום  $0 \leq x \leq \pi$ . מצאו, לכל אחת מן הפונקציות:

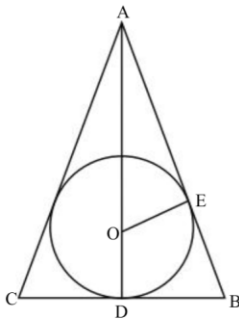
(1) את נקודות החיתוך עם הצירים.

(2) את שיעורי נקודות הקיצון (אם יש כאלה).

(3) את תחומי החיוביות והשליליות.

ב. נתונה הפונקציה  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  בתחום  $0 \leq x \leq \pi$ . היעזרו בסעיפים הקודמים ומצאו:

- (1) אסימפטוטות לגרף הפונקציה  $h(x)$  המאונכות לציר ה- $x$ .
- (2) את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- (3) את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.
- ג. נתון: גרף פונקציית הנגזרת  $h'(x)$  נמצא כולו מתחת לציר ה- $x$ .
- (1) מצאו, ללא גזירה, את נקודות הקיצון של הפונקציה  $h(x)$ .
- (2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $h(x)$ .
- (3) נתון:  $h'(0) = -3.5$ ,  $h'(\pi) = -1.5$ . סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $h(x)$ .
- ד. נסמן:  $k(x) = \frac{1}{h'(x)}$ . האם יש לגרף הפונקציה  $k(x)$  אסימפטוטות מאונכות לציר ה- $x$ ? נמקו.



8. במשולש שווה-שוקיים  $ABC$  ( $AB = AC$ ) חסום מעגל שרדיוסו 6.

AD הנו הגובה לבסיס BC.

א. סמנו:  $AD = x$  והראו כי מתקיים:  $BC = \frac{12x}{\sqrt{x^2 - 12}}$ .

ב. הפונקציה  $f(x)$  מתארת את שטח המשולש ABC.

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

(2) מצאו את הערך של  $x$  עבורו שטח המשולש ABC מינימלי.

(3) עבור הערך של  $x$  שחישיבתם בסעיף הקודם, האם הנקודה O

היא מפגש התיכונים במשולש ABC? נמקו.

(4) האם המשולש ABC ששטחו מינימלי הוא משולש שווה-צלעות? נמקו.

**בהצלחה!**

**תשובות**

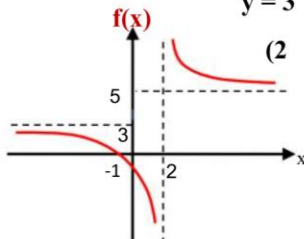
1. א. 2) 706560 ב. 2) כן 3) כן 4) לא ניתן לקבוע

ג. 1) תחום ההגדרה:  $x < 2$  או  $x > 2$ , האסימפטוטות:  $x = 2$ ,  $y = 3$ ,  $y = 5$

נקודות חיתוך עם הצירים:  $(-1; 0)$ ,  $(0; -1.98)$

3)  $-5 \leq k \leq -3$ ,  $p = 2$

ד. 3)  $BC = \frac{35}{12}R$



2. א. 1)  $b_1 = \frac{1}{9}$  2)  $-273 \frac{10}{27}$  ב. 1) I - נכון, II - לא נכון, III - נכון 2)  $-3 \frac{3}{8}$

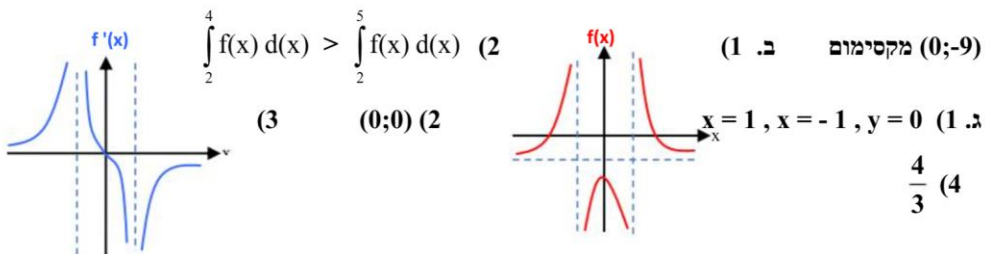
3. א. 1)  $\frac{1909}{4096}$  ב. 1)  $\frac{1}{9}$  2)  $\frac{1}{3}$  ג. 1)  $\frac{496}{58905}$  2)  $\frac{992}{19635}$  3)  $\frac{496}{19635}$

4. א. לא ב.  $6.5a$  ג.  $a = 2$  ד.  $47.25\pi$

5. א.  $\frac{13a^2 - 5b^2}{4b^2 + 12a^2}$  ב.  $45^\circ$  (1) 2)  $8.055a$

6. א. (1)  $f(x) = -\frac{4}{x+1} + \frac{4}{x-1} - 1$  (2)  $x = 1, x = -1, y = -1$  (3)  $(-3;0), (3;0), (0;-9)$

(4) תחומי העלייה:  $-1 < x < 0$ ,  $x < -1$ ; תחומי הירידה:  $0 < x < 1, x > 1$



7. א. (1)  $f(x)$  :  $(0;1), (\frac{5\pi}{6};0), (\frac{\pi}{6};0), g(x)$  :  $(0;1), (\frac{3\pi}{4};0)$

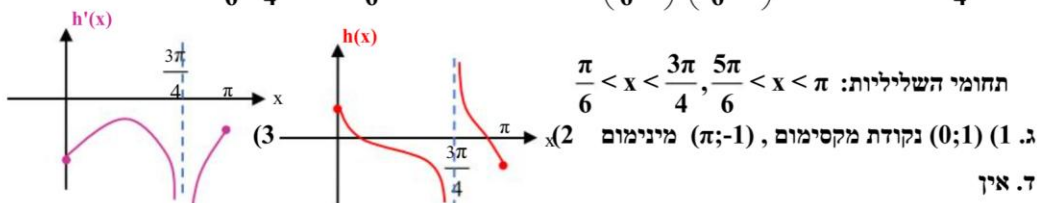
(2)  $f(x)$  :  $(\frac{\pi}{2}; -\frac{1}{2})$  מינימום,  $(0;1)$  מקסימום,  $(\pi;1)$  מקסימום

$g(x)$  :  $(\frac{\pi}{4}; \sqrt{2})$  מקסימום,  $(0;1)$  מינימום,  $(\pi;-1)$  מינימום

(3)  $f(x)$  : תחומי החיוביות:  $0 < x < \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} < x < \pi$ , תחום השליליות:  $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$

$g(x)$  : תחום החיוביות:  $0 < x < \frac{3\pi}{4}$ , תחום השליליות:  $\frac{3\pi}{4} < x < \pi$

ב. (1)  $x = \frac{3\pi}{4}$  (2)  $(0;1), (\frac{5\pi}{6};0), (\frac{\pi}{6};0)$  (3) תחומי החיוביות:  $0 < x < \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{6}$



8. א. ב. (1)  $x > 12$  (2)  $x = 18$  (3) כן (4) כן