

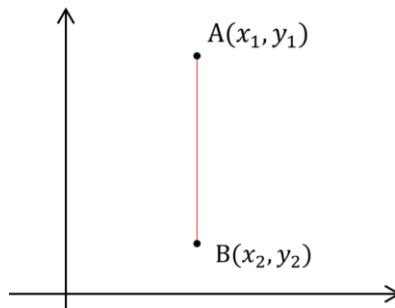
גיאומטריה אנליטית

הקו הישר (אחרי שכבר נלמד הבסיס בקורס אנליזה)

נוסחה למציאת מרחק בין 2 נקודות

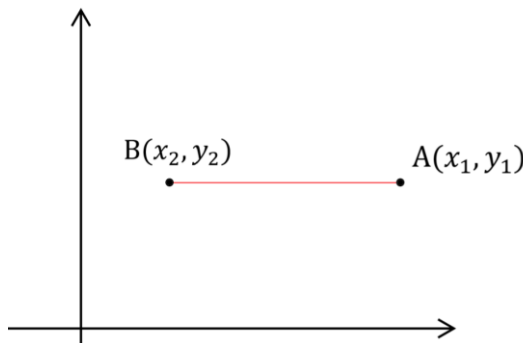
הנוסחה למציאת מרחק d בין שתי הנקודות $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$ היא:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



* אם AB מאונך לציר ה- x אז המרחק בין הנקודות שווה פשוט להפרש בין ערך ה- y הגדול לבין ערך ה- y הקטן:

$$AB = y_1 - y_2$$



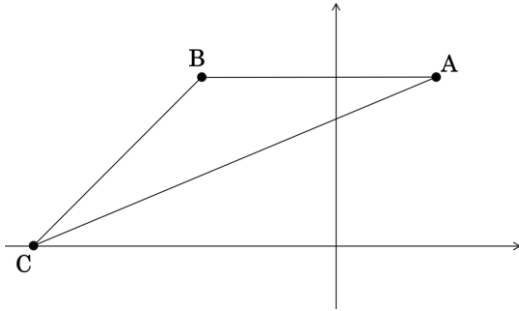
* אם AB מאונך לציר ה- y אז המרחק בין הנקודות שווה פשוט להפרש בין ערך ה- x הגדול לבין ערך ה- x הקטן:

$$AB = x_1 - x_2$$

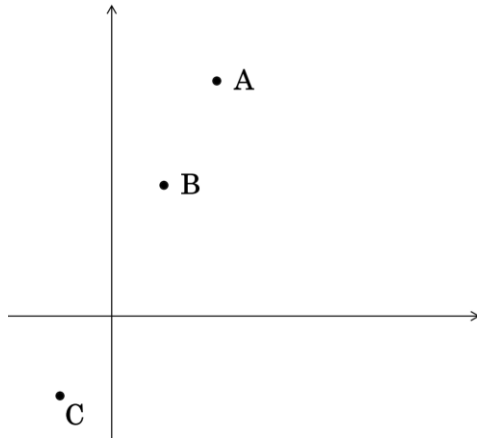
1. בתרגילים הבאים נתונות 2 נקודות. מצא את המרחק ביניהן.

- א. $(2, 1)$, $(6, -2)$.
ב. $(-2, 10)$, $(3, -2)$.
ג. $(-3, 4)$, $(5, 4)$. (בלי שימוש בנוסחה)
ד. $(1, -1)$, $(1, 7)$. (בלי שימוש בנוסחה)

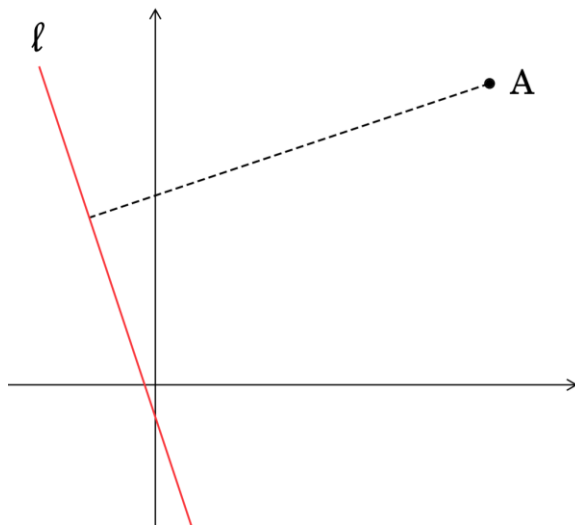
2. קודקודי משולש הם: $A(4, -3)$, $B(5, 4)$, $C(10, -1)$. הראו שהמשולש שווה שוקיים וציינו מי הנקודה שמייצגת את קודקוד הראש.



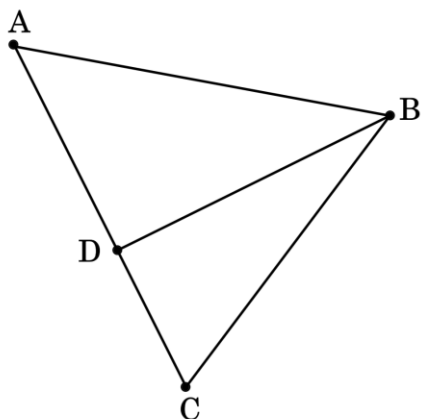
3.
 במשולש ABC נתון $A(3,5)$. הצלע AB מקבילה לציר ה- x והצלע BC מונחת על הישר $y = x + 9$. הקדקוד C מונח על ציר ה- x .
 א. חשבו את היקף המשולש ABC (תוכלו לעגל את תשובתכם או להשאירה עם שורש).
 ב. חשבו את שטח המשולש ABC.



4.
 נתונות 3 נקודות: $C(-2, -3)$, $B(2,5)$, $A(4,9)$. הראו ש-3 הנקודות נמצאות על ישר אחד. הראו זאת בשתי דרכים:
 א. בעזרת חישובי מרחקים.
 ב. בדרך אחרת.



5.
 לפניכם ישר l ונקודה $A(10,9)$. משוואת הישר l היא: $y = -3x - 1$. מצאו את המרחק בין הנקודה לישר.



6.

קודקודיו של משולש ABC הם: $A(-5,13)$, $B(6,11)$, $C(0,3)$.
 BD הוא הגובה לצלע AC. חשבו את שטח המשולש.

7. משוואת הישר עליו מונחת אחת מצלעות המשולש היא $y = 2$ המשוואות של שניים מהישרים עליהם מונחים גבהי המשולש הן: $y = x$ ו- $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$. מצאו את קודי המשולש ואת שטחו.

8. קודקודיו של משולש ABC הם: $A(1,3)$, $B(-2,10)$, $C(-7,8)$.
 א. חשבו את זווית C.
 ב. חשבו את שטח המשולש (ללא מציאת אורך של אחד הגבהים).

9. קודקודיו של מרובע ABCD הם: $A(1,2)$, $B(3,6)$, $C(7,8)$ ו- $D(5,4)$.
 א. הוכיחו שהמרובע הוא מעוין וחשבו את שטחו.
 ב. חשבו את גובה המעוין.

10. במקבילית ABCD משוואת הצלע AB היא $y = -x + 12$ ומשוואת הצלע AD היא $y = \frac{1}{2}x + 6$.
 אחת מקודקודי המקבילית נמצא בנקודה $(4,2)$. חשבו את שטח המקבילית.

11. ישר שמשוואתו $y = -2x + 8$ חותך את ציר ה-y בנקודה A.
 ישר שמשוואתו $y = -2x - 2$ חותך את ציר ה-y בנקודה C.
 מנקודה A מורידים אנך החותך את הישר $y = -2x - 2$ בנקודה B.
 מנקודה C מורידים אנך החותך את הישר $y = -2x + 8$ בנקודה D.
 א. שרטטו את המרובע במערכת צירים וחשבו את שטחו.
 ב. חשבו את הזווית החדה שבין אלכסוני המרובע.

12. מצאו נקודה (או נקודות) על ציר ה-x שמרחקה מנקודה $A(-2,4)$ הוא 5.

13. מצאו נקודה (או נקודות) על ציר ה-x שמרחקה מנקודה $A(-2,4)$ הוא 4.

14. מצאו על הישר $y = 2x - 1$ נקודה (או נקודות) שמרחקן מנקודה $A(-10, -2)$ הוא 13.

15. מצאו על הישר $y = -\frac{3}{4}x + 2\frac{1}{4}$ נקודה (או נקודות) שמרחקן מנקודה $A(1, -1)$ הוא 2.

16. מצא על הישר $y = -x + 3$ נקודה אשר מרחקה מהנקודה $A(1, 2)$ שווה למרחקה מהנקודה $B(5, 4)$.

17. מצאו נקודה (או נקודות) על ציר ה- x שמרחקה מנקודה $A(4, 10)$ גדול פי 2 ממרחקה מנקודה $B(1, -4)$.

18. מצאו נקודה על החלק השלילי של ציר ה- y הנמצאת במרחק שווה מהנקודה $A(4, -2)$ ומציר ה- x .

19. מצאו נקודה (או נקודות) על הישר $y = -2x + 6$ שנמצאת במרחק שווה משני הצירים.

מסקנות חשובות מתרגיל 19 לגבי הישרים $y = x$ ו- $y = -x$

$y = x$

- אוסף כל הנקודות אשר שיעור ה- x וה- y שלהן שווים.
- עובר בראשית.
- יוצר זווית של 45° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .
- אוסף כל הנקודות המרוחקות במידה שווה מציר ה- x ומציר ה- y .

$y = -x$

- אוסף כל הנקודות אשר שיעור ה- x וה- y שלהן הם מספרים נגדיים.
- עובר בראשית.
- יוצר זווית של 135° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .
- אוסף כל הנקודות המרוחקות במידה שווה מציר ה- x ומציר ה- y .

20. מצאו נקודה (או נקודות) על הישר $y = 3x - 4$ שנמצאת במרחק שווה משני הצירים.

21. מצאו נקודה (או נקודות) על הישר $y = x + 4$ שנמצאת במרחק שווה משני הצירים.

22. מצאו נקודה (או נקודות) על הישר $y = -2x + 5$ אשר סכום המרחקים שלה מראשית הצירים ומציר ה- y הוא 9. (שיעורי אחת הנקודות אינם מספרים רציונאליים ולכן תוכלו לעגל).

23. מצאו נקודה על הישר $y = -\frac{1}{2}x + 1$ אשר סכום המרחקים שלה מראשית הצירים ומציר ה- x הוא 18 אם ידוע שהנקודה נמצאת מתחת לציר ה- x . העזרו בשרטוט במערכת צירים.

24. מצאו נקודות על ציר ה- x אשר סכום המרחקים שלהן מהנקודות $A(7, -6)$ ו- $B(-6, 0)$ הוא 15. (אחד מהפתרונות יוצא מספר לא שלם. תוכלו לעגל את תשובתכם או להשאיר כשבר).

25. מצאו עבור אילו ערכי m המרחק בין נקודות $A(8, m)$ ו- $B(2, 3)$:
א. שווה 10.
ב. קטן מ-10.
ג. גדול מ-10.

26. במשולש שווה שוקיים ABC ($AB=AC$) נתון: $A(2, 6)$ ו- $B(4, 0)$. הצלע AC מונחת על הישר $y = 3x$. מצאו את שיעורי הנקודה C . (מצאו את שתי האפשרויות ונסו לחשוב מדוע יש שתיים).

27. בריבוע $ABCD$ הצלע AD מונחת על הישר $y = 2x$. נתון $B(6, 2)$. מצאו את שיעורי שאר קודקודי הריבוע (יש 2 אפשרויות). מומלץ לשרטט במערכת צירים ולהבין מה 2 האפשרויות.

28. $ABCD$ הוא מלבן אשר שניי מקודקודיו הם: $A(1, -1)$ ו- $D(0, 3)$. אורך הצלע AB הוא $2\sqrt{17}$. מצאו את שיעורי שאר הקודקודים (יש 2 אפשרויות).

29. הקודקודים של הבסיס הקטן בטרפז $ABCD$ הם $A(0, 1)$ ו- $B(4, 4)$. אחד מקודקודי הבסיס הגדול, שאורכו 10 יחידות אורך, הוא $D(-2, -3)$. מצאו את שיעורי הקודקוד C .

30. $ABCD$ הוא מלבן שנמצא כולו ברביע הראשון. הצלע AB מונחת על הישר $y = -\frac{1}{2}x + 6$ ואורכה הוא $3\sqrt{5}$ יחידות אורך. שיעורי הקודקוד A הם $A(2, 5)$ ואורכה של הצלע BC הוא $2\sqrt{5}$ יח אורך. מצאו את שיעורי הקודקודים האחרים.

31. במשולש שווה שוקיים ABC , הבסיס BC מונח על הישר $-x + 2y + 2 = 0$. קודקוד הראש במשולש הוא $A(2, 5)$ ואורך שוק המשולש הוא $\sqrt{65}$. מצאו את שיעורי הנקודות B ו- C .

32. קודקוד זווית הראש במשולש שווה שוקיים ABC הוא $A(-3, 0)$. הבסיס של משולש זה, שאורכו $2\sqrt{5}$, נמצא על הישר $y = -2x + 4$. מצאו את שיעורי הקודקודים B ו- C .

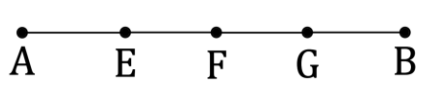
33. (תרגיל קשה-רמז בתשובות) במשולש ABC נתון: $A(6, 10)$, נקודת מפגש הגבהים היא $P(6, 8)$, שיפוע הישר עליו מונח הגובה לצלע AC הוא 1, ואורך הצלע BC הוא 10. מצאו את שיעורי הקודקודים B ו- C .

פתרונות

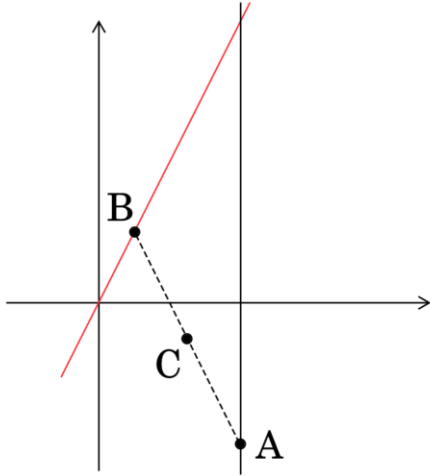
1. א. 5. ב. 13. ג. 8. ד. 8. 2. B הוא קודקוד הראש. 3. א. $20 + 2\sqrt{5}$. ב. 17.5. יח"ר. 5. $4\sqrt{10}$. 6. 50 יח"ר.
 7. $(2,2), (-1,8), (5,2)$ והשטח הוא 9 יח"ר. 8. א. $\sphericalangle C = 53.807^\circ$. ב. 20.5. יח"ר. 9. א. 12 יח"ר. ב.
 $\frac{6\sqrt{5}}{5}$. 10. 24 יח"ר. 11. א. 40 יח"ר. ב. 53.13° . 12. $(1,0), (-5,0)$. 13. $(-2,0)$. 14.
 $(2,3), (-6.8, -14.6)$. 15. $(2.2, 0.6)$. 16. $(6, -3)$. 17. $(-4,0), (4,0)$. 18. $(0, -5)$. 19.
 $(6, -6), (2,2)$. 20. $(1, -1), (2,2)$. 21. $(-2,2)$. 22. $(-1.3, 7.6), (4, -3)$. 23. $(12, -5)$. 24. $(-1,0)$
 ו- $(-6\frac{5}{14}, 0)$. 25. א. $m = -5, m = 11$. ב. $-5 < m < 11$. ג. $m > 11$ או $m < -5$. 26.
 $(4,12), (0,0)$. 27. אפשרות אחת: $A(2,4), C(8,6), D(4,8)$, אפשרות שנייה: $A(2,4)$,
 $C(4, -2), D(0,0)$. 28. אפשרות אחת: $B(9,1), C(8,5)$, אפשרות שנייה: $B(-7, -3), C(-8,1)$. 29.
 $C(6,3), B(8,2), C(10,6), D(4,9)$. 30. $C(0,4)$ (או הפוך). 31. $B(10,4), C(-2, -2)$ (או הפוך). 32. $B(2,0)$,
מקביל לציר ה-x. אפשרות אחת: $B(12,14), C(2,14)$. אפשרות שנייה: $B(2,4), C(12,4)$.

נוסחה למציאת נקודת אמצע קטע

$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$	אמצע קטע שקצותיו הם (x_1, y_1) ו- (x_2, y_2) הוא בנקודה
---	---

1. מצאו את נקודת האמצע של הקטעים שקצותיהם נתונים להלן:
 א. $(6,7), (0,1)$ ב. $(-4, -2), (-6, -2)$
2. הנקודה M היא אמצע הקטע AB. בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונים שיעורי הנקודות M ו-B. מצאו את שיעורי הנקודה A:
 א. $B(-4,1), M(1, -1)$ ב. $B(6,2), M(-3,4)$
3. הנקודות A(-12,6) ו-B(4, -8) הן קצות הקטע AB. נקודות E, F ו-G מחלקות את הקטע AB ל-4 חלקים שווים. מצאו את שיעורי הנקודות.
- 

4. הנקודות A(-2,2) ו-B(4, -3) מחלקות קטע ל-3 קטעים שווים. מצאו את שיעורי הנקודות של קצות הקטע.



5. בציר מתוארים הישרים $y = 2x - 1$ ו- $x = 4$. דרך הנקודה $C(2.5, -1)$ מעבירים ישר נוסף החותך את הישרים הנ"ל בנקודות A ו-B בהתאמה, כך שנקודה C היא אמצע הקטע AB. מצאו את שיעורי הנקודות A ו-B.

6. נתון קטע AB שבו $A(16, -1)$ ו-B נמצאת על ציר ה-y. מצאו את שיעורי הנקודה B אם נתון שהישר $4y - x + 4 = 0$ חוצה את הקטע AB.

7. שלושה קודקודים של מקבילית ABCD הם: $A(-4, 5)$, $B(-1, 9)$, $C(3, -1)$. מצאו את שיעורי הנקודה D.

8. קודקודי משולש הם: $A(6, 6)$, $B(9, -3)$, $C(3, 0)$. מצאו את נקודת מפגש התיכונים.

9. במשולש ABC משוואת הישר עליו מונחת הצלע AB היא $y = -2x + 1$. נתון: $B(6, -11)$. משוואת התיכון לצלע AB היא $y = -\frac{1}{2}x + 10$.

א. מצאו את שיעורי הנקודה A.

ב. נתון: אורך התיכון לצלע AB הוא $\sqrt{5}$. מצאו את שיעורי נקודה C אם ידוע שהיא מעל הישר שעליו מונחת הצלע AB.

10. במשולש ABC נתון $A(0, 6)$. המשוואה שעליה מונח קטע האמצעים המחבר את אמצעי הצלעות AB ו-AC היא $y = \frac{1}{2}x + 4.5$. המשוואה שעליה מונח קטע האמצעים המחבר את אמצעי הצלעות AC ו-BC היא $y = x + 5$. מצאו את שיעורי הקודקודים B ו-C.

11. בריבוע ABCD נתונים שיעורי הנקודות של 2 מהקודקודים: $A(0, -4)$ ו- $C(1, 3)$. מצאו את שיעורי הנקודות של קודקודים B ו-D.

12. הנקודה A נמצאת על הישר $y = 3x$. הנקודה B נמצאת על הישר $y = -x + 1$. הנקודה $C(5, -\frac{1}{2})$ היא אמצע הקטע AB. מצאו את שיעורי נקודות A ו-B.

13. במשולש ABC משוואות הצלעות AB ו-AC הן $y = -\frac{1}{2}x + 6$ ו- $y = 2x - 14$ בהתאמה. AD הוא תיכון לצלע BC. נתון: $D(6, 13)$. מצאו את שיעורי הקודקודים B ו-C.

14. במשולש ABC משוואת התיכון לצלע BC היא $y = \frac{1}{2}x + 3$. משוואת הצלע AC היא $y = 3x - 2$. נתון: $B(8, 2)$. מצאו את שיעורי הקודקוד C.

15. משולש ABC הוא ישר זווית ושווה שוקיים ($AB=AC$). נתון $B(0,2)$ ו- $C(8,6)$. מצאו את שיעורי הנקודה A (יש 2 אפשרויות- נסו להבין למה).

פתרונות

1. א. $(3,4)$. ב. $(-5, -2)$. 2. א. $A(6, -3)$. ב. $A(-12,6)$. 3. $G(0, -4.5)$, $F(-4, -1)$, $E(-8,2.5)$.
 4. $(-8,7)$, $(10, -8)$. 5. $A(4, -4)$, $B(1,2)$. 6. $B(0,3)$. 7. $D(0, -5)$. 8. $(6,1)$. 9. א. $A(-18,15)$.
 ב. $C(-4,12)$. 10. $B(-6,0)$, $C(-2,2)$. 11. $D(-3,0)$, $B(4, -1)$ (או הפוך). 12. $A(2,6)$, $B(8, -7)$.
 13. $C(16,18)$, $B(-4,8)$. 14. $C(4,10)$. 15. $(2,8)$ או $(6,0)$.

חלוקת קטע ביחס נתון.

שיעורי הנקודה C המחלקת (בחלוקה פנימית) את הקטע שקצותיו הם $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$ ביחס $\frac{AC}{BC} = \frac{k}{l}$

$$C\left(\frac{lx_1 + kx_2}{l+k}, \frac{ly_1 + ky_2}{l+k}\right)$$

1. נתון: $A(7, -1)$ ו- $B(-5,11)$ מצאו על הקטע AB את הנקודה P כך שמתקיים $\frac{AP}{PB} = \frac{1}{3}$.
2. נתון: $A(6, -5)$ ו- $B(-2,3)$ מצאו על הקטע AB את הנקודה P כך שמתקיים $\frac{AP}{PB} = \frac{3}{5}$.
3. נתון: $A(3,8)$ ו- $B(-12, -2)$ מצאו על הקטע AB את הנקודה P כך שמתקיים $\frac{AP}{PB} = \frac{2}{3}$.
4. נתון: $A(12,1)$ ו- $B(0,10)$ מצאו על הקטע AB את הנקודה P כך שמתקיים $\frac{AP}{PB} = \frac{1}{2}$.
5. הנקודה P מחלקת את הקטע AB כך שמתקיים $\frac{AP}{PB} = \frac{3}{4}$. נתון: $P(-2, -1)$ ו- $A(-8, -4)$ מצאו את שיעורי הנקודה B.
6. הנקודה P מחלקת את הקטע AB כך שמתקיים $\frac{AP}{PB} = \frac{3}{2}$. נתון: $P(-6, -2)$ ו- $A(-18,1)$ מצאו את שיעורי הנקודה B.
7. הנקודה P מחלקת את הקטע AB כך שמתקיים $AP = 3BP$. נתון: $P(6,10)$ ו- $B(2,7)$ מצאו את שיעורי הנקודה A.

8. נתון: $A(7,8)$ ו- $B(-2,2)$ מצאו על הקטע AB שתי נקודות שמחלקות את הקטע AB ל-3 קטעים שווים באורכם.

9. הנקודה $P(3,6)$ נמצאת על הקטע AB , שקצותיו בנקודות $A(-9,14)$ ו- $B(24,-8)$. מצאו באיזה יחס מחלקת הנקודה P את הקטע AB .

10. הנקודה $P(3,1.5)$ נמצאת על הקטע AB , שקצותיו בנקודות $A(-2,4)$ ו- $B(6,0)$. מצאו באיזה יחס מחלקת הנקודה P את הקטע AB .

11. הנקודה $P(k, 2)$ נמצאת על הקטע AB , שקצותיו בנקודות $A(-2, -1)$ ו- $B(5,6)$.
א. מצאו באיזה יחס מחלקת הנקודה P את הקטע AB .
ב. מצאו את k .

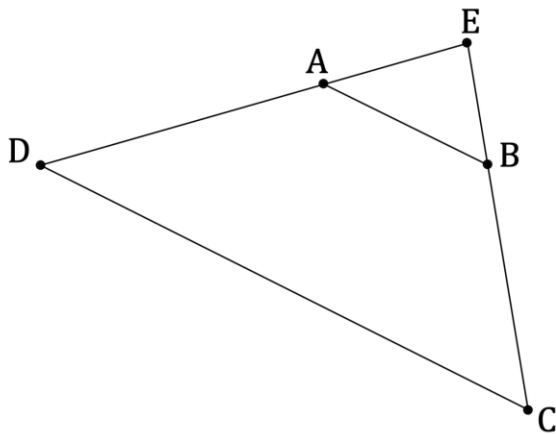
12. קודקודיו של משולש ABC הם $A(1,0)$, $B(-4, -2)$ ו- $C(-3,5)$. מצאו את נקודת מפגש התיכונים.

13. שני קודקודים של משולש ABC הם $B(2,0)$ ו- $C(-4,2)$. מפגש התיכונים הוא בנקודה $(1,5)$.
א. מצאו את הקודקוד A .
ב. מצאו את אורך התיכון היוצא מקודקוד A .

14. קודקודיו של משולש ABC הם $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ו- $C(x_3, y_3)$. הראו שנקודת מפגש התיכונים היא $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$.

15. אמצעי שתי צלעות במשולש הם בנקודות $(-1,1)$ ו- $(3,1.5)$. מפגש התיכונים הוא בנקודה $(1,0)$. מצאו את קודקודי המשולש.

16. בטרפז $ABCD$ שבו $AB \parallel CD$ (הבסיס הקצר), נתון: $A(-5,2)$, $B(7, -2)$ ו- $C(5,1)$. המשכי שוקי הטרפז נפגשים בנקודה $E(-1,10)$. מצאו את נקודה D .



17. בטרפז $ABCD$ מתקיים $DC = 3AB$. נתון: $A(-1,3)$, $B(3,1)$ ו- $C(4,-5)$. מצאו את שיעורי הקודקוד D (ללא שימוש בנוסחה למציאת מרחק בין 2 נקודות).

18. קודקודיו של משולש ABC הם $A(3,2)$, $B(-5,-2)$ ו- $C(-1,4)$. מצאו את אורך חוצה זווית A.

19. במשולש ABC, שיעורי הנקודה A הם $A(2,-5)$ ומשוואות התיכונים היוצאים מנקודות B ו-C הם $y = -\frac{4}{5}x$ ו- $y = \frac{1}{3}x$. מצא את שיעורי הקודקודים B ו-C.

20. שניים מצלעותיו של משולש מונחות על הישרים $y = \frac{5}{6}x + \frac{5}{3}$ ו- $y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$. נקודת מפגש התיכונים היא $M(2,1)$. מצאו את קודקודי המשולש.

פתרונות

1. $P(4,2)$. 2. $P(3,-2)$. 3. $P(-3,4)$. 4. $P(8,4)$. 5. $B(6,3)$. 6. $B(2,-4)$. 7. $A(18,19)$. 8. הנק' הקרובה יותר ל-A היא: $(4,6)$, הנק' הקרובה יותר ל-B היא: $(1,4)$. 9. $\frac{AP}{PB} = \frac{4}{7}$. 10. $\frac{AP}{PB} = \frac{5}{3}$. 11. א. $\frac{AP}{PB} = \frac{3}{4}$. ב. $K = 1$. 12. $(-2,1)$. 13. א. $(5,13)$. ב. $6\sqrt{5}$. 15. $(1,5)$, $(5,-2)$, $(-3,-3)$. 16. $D(-4,4)$. 17. $D(-8,1)$. 18. $5\frac{1}{3}$. 19. $B(-5,4)$ ו- $C(3,1)$. 20. $(-2,0)$, $(4,-2)$ ו- $(4,5)$.

מרחק בין ישרים מקבילים.

$d = \frac{ C_1 - C_2 }{\sqrt{A^2 + B^2}}$	<p style="text-align: center;">המרחק בין הישרים המקבילים $Ax + By + C_1 = 0$ ו-$Ax + By + C_2 = 0$ הוא:</p> <p style="text-align: right;">--הערות--</p> <ul style="list-style-type: none"> • חשוב להעביר את הישרים להצגה הכללית שלהם. • חשוב לדאוג שיהיו לשני הישרים את אותם המקדמים של x ו-y
--	---

1. מצאו את המרחק בין הישרים המקבילים הבאים:

$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x + 1.75 \\ y = \frac{3}{4}x - 2 \end{cases} \quad \text{ב.}$	$\begin{cases} 12x + 5y - 12 = 0 \\ 12x + 5y + 14 = 0 \end{cases} \quad \text{א.}$
$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = 3x - 9 \end{cases} \quad \text{ד.}$	$\begin{cases} 5x - 12y + 17 = 0 \\ 10x - 24y - 44 = 0 \end{cases} \quad \text{ג.}$

$$\begin{cases} 2y - 3 = 0 \\ y = 3 \end{cases} .\text{ו.}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 6x - 3y + 40 = 0 \end{cases} .\text{ה.}$$

$$\begin{cases} 2x - 10 = 0 \\ x = 0 \end{cases} .\text{ז.}$$

2. נתון הישר $4x - 2y + 3 = 0$. מצאו את משוואות שני הישרים המקבילים אליו ונמצאים במרחק $\sqrt{20}$ ממנו.

3. נתונים שני ישרים היוצרים זווית של 30° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x . אחד עובר בנקודה $(1,0)$ והשני בנקודה $(0, \frac{7\sqrt{3}}{3})$. מצאו את המרחק בין הישרים.

4. נתונים שני ישרים היוצרים זווית של 60° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x . אחד עובר בנקודה $(6,0)$ והשני בנקודה $(0,3)$. מצאו את המרחק בין הישרים (התשובה אינה מספר שלם-תוכלו להשאיר שורש בתשובתכם).

5. נתון ישר העובר בנקודה $(0,2)$ ויוצר זווית של 135° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x . מצאו את משוואות הישרים הנמצאים במרחק $4\sqrt{3}$ ממנו. (השאירו שורש בתשובתכם).

6. נתונים הישרים $5x + 4y - 3 = 0$ ו- $15x + 12y + 42 = 0$ מצאו את הישר שמקביל אליהם ונמצא במרחק שווה משניהם.

7. מצאו את משוואות 2 הישרים שמרחקם מהישר $-4x + 6y + 14 = 0$ גדול פי 2 ממרחקו מהישר $2x - 3y + 2 = 0$.

8. המרחק בין הישרים $y = \frac{1}{3}x + n$ ו- $-x + 3y - 4 = 0$ הוא $\sqrt{10}$. מצאו את n .

9. נתון ריבוע שאורך צלעו 3 ושתיים מצלעותיו מונחות על הישרים שמשוואותיהם $3x + 4y + 8 = 0$ ו- $4x - 3y + 6 = 0$. מצאו את משוואות הצלעות האחרות אם ידוע שראשית הצירים נמצאת בתוך הריבוע. (מומלץ להעזר בשרטוט מתאים במערכת צירים).

10. נתון מעוין שגובהו 5 ושתיים מצלעותיו מונחות על הישרים שמשוואותיהם $3x - 4y - 16 = 0$ ו- $3x + 4y - 9 = 0$. מצאו את משוואות הצלעות האחרות אם ידוע שראשית הצירים נמצאת בתוך המעוין. (מומלץ להעזר בשרטוט מתאים במערכת צירים).

11. שני קודקודים של מקבילית $ABCD$ הם $A(1,5)$ ו- $B(5,8)$ שטח המקבילית הוא 13. הצלע DC נמצאת מתחת לצלע AB .

א. מצאו את משוואת הישר עליו מונחת הצלע DC .

ב. מצאו את משוואת הישר העובר דרך נקודת מפגש אלכסוני המקבילית ומקביל לצלע AB .

ג. שיעור ה- y של קודקוד C הוא 4 מצאו את שיעורי הקודקוד D .

12. 3 צלעות של מעוין נמצאות על הישרים :

$$4x - 3y = 0, 4x - 3y - 10 = 0, 5x + 12y - 7 = 0$$

מצאו את משוואת הישר עליו מונחת הצלע הרביעית אם נתון שהישר וראשית הצירים נמצאים מאותו הצד של הצלע המקבילה לה.

13. משוואת הישר עליו מונח הבסיס הגדול בטרפז שווה שוקיים היא $-x + 2y + 6 = 0$ ומשוואת הישר עליו מונחת אחת השוקיים היא $-4x + y + 3 = 0$. מצאו את משוואת 2 הצלעות האחרות אם ידוע שגובה הטרפז הוא $\sqrt{20}$ ואחד מקודקודי הבסיס הקטן נמצא על הישר $x = 4$.

14. שני ישרים מקבילים שהמרחק ביניהם הוא $\sqrt{20}$ עוברים דרך הנקודה $(3,0)$ והשני דרך הנקודה $(-5,1)$.

א. מצאו את משוואותיהם אם ידוע שהשיפוע שלהם חיובי.

ב. נתון מעוין שכל 4 הקודקודים שלו נמצאים על הישרים שמצאתם בסעיף א. שיעור ה- x של קודקוד אחד הוא 3 ושיעור ה- y של הקודקוד הנגדי לו, שנמצא על הישר העליון, הוא 1. מצאו את שיעורי הקודקודים האחרים של המעוין.

פתרונות

1. א. 2. ב. 3. ג. ד. ה. $\frac{8\sqrt{5}}{3}$ ו. 1.5 ז. 2. 3. $4x - 2y - 17 = 0$ ו- $4x - 2y + 23 = 0$
4. $10x + 8y + 11 = 0$ ו- $x + y - 2 + 4\sqrt{6} = 0$ ו- $x + y - 2 + 4\sqrt{6} = 0$ 5. $\frac{3+6\sqrt{3}}{2} \approx 6.7$
6. $3x + 4y - 7 = 0$ ו- $2x - 3y + 11 = 0$ 7. $2x - 3y - 1 = 0$ ו- $2x - 3y + 11 = 0$ 8. $n = -2$ או $n = 4\frac{2}{3}$ 9.
10. $3x + 4y + 16 = 0$ ו- $3x - 4y + 9 = 0$ 11. $-3x + 4y - 4 = 0$ ו- $3x + 4y + 16 = 0$ 12. $-6x + 8y - 21 = 0$ ו- $3x + 4y + 16 = 0$ 13. $-x + 2y - 4 = 0$ ו- $3x + 4y + 16 = 0$ 14. $8x + 19y - 108 = 0$ ו- $-x + 2y - 7 = 0$ ו- $-x + 2y + 3 = 0$ 15. $(-\frac{4}{3}, -2\frac{1}{6})$ ו- $(-\frac{2}{3}, 3\frac{1}{6})$

מרחק בין נקודה לישר.

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

מרחק הנקודה (x_0, y_0) מהישר $Ax + By + C = 0$ הוא:

--הערות--

- חשוב להעביר את הישר להצגה הכללית שלו.
- **אם המקדם של y חיובי** (ותמיד ניתן להביאו להיות חיובי ע"י הכפלה במינוס במידת הצורך) אז:
 - אם הנקודה (x_0, y_0) **מעל הישר**, אז הביטוי $Ax_0 + By_0 + C$ חיובי ולכן הערך המוחלט מיותר – לכן נוריד אותו.

$$d = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$
 - אם הנקודה (x_0, y_0) **מתחת לישר**, אז הביטוי $Ax_0 + By_0 + C$ שלילי ולכן אם נכפיל אותו ב- (-1) הוא יהפוך לחיובי ואז נוכל שוב להוריד את הערך המוחלט.

$$d = \frac{-(Ax_0 + By_0 + C)}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$
- אם הישר מאונך לציר ה- x **אין צורך בנוסחה**. המרחק יהיה שווה פשוט להפרש ערכי ה- x .
- אם הישר מאונך לציר ה- y **אין צורך בנוסחה**. המרחק יהיה שווה פשוט להפרש ערכי ה- y .

1. בכל אחד מהסעיפים הבאים מצאו את מרחק הנקודה מהישר:

ב. $5x - 12y + 50 = 0$
(0,2)

א. $4x + 3y + 4 = 0$
(5,2)

ד. $y = \frac{3}{4}x$
(-2,1)

ג. $3x + 4y - 19 = 0$
(-3,2)

ו. $y = -3x + 4$
(1, -2)

ה. $2x - y + 4 = 0$
(1, -2)

ח. $y = 3$
(-4, -1)

ז. $2x - 10 = 0$
(1, -2)

2. מצאו את מרחק הנקודה $(0, -2)$ מהישר העובר דרך הנקודות $(5, -5)$ ו- $(-3, 10)$.
3. הנקודה A נמצאת על הישר שמשוואתו היא $3x - 4y + 19 = 0$ והיא הנקודה הקרובה ביותר לנקודה $B(2, 0)$. מצאו את המרחק בין נקודות A ו-B.
4. מצאו נקודה על ציר ה-y שמרחקה מהישר $y = -3x + 4$ הוא $\frac{\sqrt{10}}{2}$. (יש שתי אפשרויות).
5. א. מצאו נקודות על הישר $y = 2x + 1$ אשר מרחקן מהישר $3x - 4y - 1 = 0$ הוא 3.
 ב. הראו שנקודת החיתוך של שני הישרים הנ"ל היא אמצע הקטע שקצותיו הם שתי הנקודות מסעיף א'.
6. הישר $3x + py + 1 - p = 0$ נמצא במרחק 3 יחידות מהנקודה $(2, 3)$. מצאו את שני ערכי p האפשריים.
7. מצאו לאילו ערכי p מרחק הישר $4x + 3y + 2p + 5 = 0$ מהנקודה $(0, 1)$ קטן מ-2.
8. מצאו על הישר $x + y - 3 = 0$ את הנקודות הנמצאות במרחקים שווים מהישרים $x - 7y = 0$ ו- $x - y = 0$.
9. שלוש מצלעותיו של משולש מונחות על הישרים שמשוואותיהם הן:
 $x - 8y + 11 = 0$ (1)
 $4x + 7y + 5 = 0$ (2)
 $-4x + 3y + 56 = 0$ (3)
 מצאו בתוך המשולש נקודה הנמצאת במרחקים שווים מישרים (1) ו-(2) ובמרחק 5 מישר (3).
 (*מומלץ לשרטט במערכת צירים ולהעזר בהערה המופיעה מתחת לנוסחה ומתיחסת למיקום הנקודה ביחס לישר ועל סימן הביטוי שבתוך הערך המוחלט).
10. שלוש מצלעותיו של משולש מונחות על הישרים שמשוואותיהם הן:
 $-x + 3y + 1 = 0$ (1)
 $-3x + y + 11 = 0$ (2)
 $x + 3y + 33 = 0$ (3)
 מצאו בתוך המשולש נקודה הנמצאת במרחקים שווים מישרים (1) ו-(2) אשר מרחקה מישר (3) גדול פי 2 מהמרחק הנ"ל.
 (*מומלץ לשרטט במערכת צירים ולהעזר בהערה המופיעה מתחת לנוסחה ומתיחסת למיקום הנקודה ביחס לישר ועל סימן הביטוי שבתוך הערך המוחלט).
11. שלוש מצלעותיו של משולש מונחות על הישרים שמשוואותיהם הן:
 $4x + 3y + 20 = 0$ (1)
 $12x - 5y + 60 = 0$ (2)
 $x - 10 = 0$ (3)

- א. מצאו את מרכז המעגל החסום במשולש.
 ב. מצאו את רדיוס המעגל החסום במשולש.
 (*מומלץ לשרטט במערכת צירים ולהעזר בהערה המופיעה מתחת לנוסחה ומתייחסת למיקום הנקודה ביחס לישר ועל סימן הביטוי שבתוך הערך המוחלט).

איך לפתור תרגילים שמנוסחים כך (יש סרטון הסבר):

“מצאו את משוואת הישר (או הישרים) העובר בנקודה $A(x_A, y_A)$ ומרחקו מהנקודה $B(x_B, y_B)$ הוא d .”

--הערות--

- אם המרחק בין נקודת A ו- B גדול מ- d (המקרה הנפוץ) אז יש 2 ישרים.
- אם המרחק בין נקודת A ו- B שווה ל- d אז יש ישר אחד והוא מאונך לקטע AB .
- אם המרחק בין נקודת A ו- B קטן מ- d אז אין ישר כזה.

--שלבי עבודה-- (אני ממליץ להבין ולא לזכור בעל פה).

1. נסמן את שיפוע הישר ב- m .

2. נשתמש בנוסחה $y - y_1 = m(x - x_1)$ כדי להביע באמצעות m את אינסוף הישרים העוברים בנקודה A . נציב את נקודה A ואת m . אחרי הצבה זה ייראה כך:
 $y - y_A = m(x - x_A)$

3. נשתמש בנוסחה למציאת מרחק בין נקודה לישר כדי להביע את המרחק בין הנקודה B לישר שהבענו בסעיף 2.

4. נשווה את המרחק מסעיף 3 ל- d הנתון בשאלה, נפתור את המשוואה כדי למצוא את m ונציב אותו (או אותם) בישר שהבענו בסעיף 2.

a. אם מצאנו ערך אחד של m ו-המרחק בין נקודת A ו- B גדול מ- d אז יש ישר רלוונטי נוסף שמאונך לציר ה- x ועובר דרך A והוא $x = x_A$ לכן נגיש גם אותו.

b. אם מצאנו ערך אחד של m ו-המרחק בין נקודת A ו- B שווה ל- d יש רק ישר אחד רלוונטי (זה שמצאנו בסעיף 4) ורק אותו נגיש.

c. אם לא מצאנו אף ערך של m אז נבדוק מה המרחק בין A ל- B . אם הוא קטן מ- d אז באמת אין אף ישר. אבל אם הוא שווה ל- d . אז יש ישר רלוונטי שמאונך לציר ה- x ועובר דרך A והוא $x = x_A$ לכן נגיש אותו.

12. מצאו את משוואת הישר (או הישרים) העובר בנקודה $(3, -1)$ ומרחקו מהנקודה $(0, -2)$ הוא $\sqrt{5}$.
 13. מצאו את משוואת הישר (או הישרים) העובר בנקודה $(1, -2)$ ומרחקו מהנקודה $(-3, 7)$ הוא 4.
 14. מצאו את משוואת הישר (או הישרים) העובר בנקודה $(1, 0)$ ומרחקו מהנקודה $(-2, -1)$ הוא 3.
 15. מצאו את משוואת הישר (או הישרים) העובר בנקודה $(-2, 1)$ ומרחקו מהנקודה $(4, 7)$ הוא 6.

16. מצאו את משוואת הישר (או הישרים) העובר בנקודה $(2,3)$ ומרחקו מהנקודה $(-4,6)$ הוא $3\sqrt{5}$.

17. מצאו את משוואת הישר (או הישרים) העובר בנקודה $(3,1)$ ומשיק למעגל שרדיוסו $\sqrt{5}$ ומרכזו בראשית הצירים.

פתרונות

1. א. 6 יחידות ב. 2 יחידות ג. 4 יחידות ד. 2 יחידות ה. $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ ו. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ ז. 4 יחידות ח. 4 יחידות ט. 3 יחידות.
3. 5 יחידות. 4. $(0, -1)$ ו- $(0, 9)$. א. 5. $(-4, -7)$ ו- $(2, 5)$. 6. $p = 4$ או $p = 1.6$. 7. $-9 < p < 1$. 8. $(-3, 6)$ ו- $(2, 1)$. 9. $(7, -1)$. 10. $(-1, -4)$. א. 11. $(3, 1)$. ב. 12. $x + 2y - 1 = 0$. R=7. 13. $-2x + y + 7 = 0$ ו- $65x + 72y + 79 = 0$ ו- $x = 1$. 14. $4x + 3y - 4 = 0$ ו- $x = 1$. 15. $x = -2$ ו- $y = 1$. 16. $-2x + y + 1 = 0$. 17. $x + 2y - 5 = 0$ ו- $-2x + y + 5 = 0$.

ישרים מיוחדים ומצבים הדדים בין ישרים עם פרמטרים.

1. מצאו לאילו ערכי k המשוואות הבאות מייצגות ישר:

א. $(k^2 - 4)x + (k^2 - k - 2)y = 0$
ב. $(k^3 + 7k^2 + 12k)x + (k^2 + 3k)y - k = 0$
ג. $(k^2 - 9)x + (k^2 + k - 6)y + 2 = 0$
ד. $(k^3 - 4k^2 + 3k)x + (k^2 - k)y - 1 = 0$

2. מצאו לאילו ערכי k המשוואות הבאות מייצגות:

(1) ישר המקביל לציר ה- x (2) ישר המקביל לציר ה- y .

א. $(1 - k^2)x + (k^2 + 6k + 5)y - 7 = 0$
ב. $(k^2 - 1)x + (k^2 - k + 5)y + 2 = 0$
ג. $(k^2 - 4)x + (k^2 + k - 2)y - 4 = 0$

3. מצאו לאילו ערכי k הישרים הבאים יוצרים עם הכיוון החיובי של ציר ה- x זווית קהה.

א. $(k - 3)x + (k + 2)y - 1 = 0$
ב. $(k^2 - 9)x + (k^2 - 4k + 3)y + 5 = 0$

4. מצאו את המצב ההדדי של זוגות הישרים הבאים. (נחתכים, מקבילים, מתלכדים).

$$\begin{aligned} 6x - 3y + 10 &= 0 \\ 2x - y + 5 &= 0 \end{aligned} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{aligned} 4x + 3y + 1 &= 0 \\ x + 2y + 4 &= 0 \end{aligned} \quad \text{א.}$$

$$\begin{aligned} 4x + 2y &= 5 \\ 2x + y &= 10 \end{aligned} \quad \text{ד.}$$

$$\begin{aligned} 4x - 2y + 10 &= 0 \\ 2x - y + 5 &= 0 \end{aligned} \quad \text{ג.}$$

$$\begin{aligned} 2y &= 7 \\ \frac{1}{2}y + 3 &= 0 \end{aligned} \quad \text{ו.}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x + 1 \\ -4y + 2x &= 8 \end{aligned} \quad \text{ה.}$$

$$\begin{aligned} 6x + 3y &= 0 \\ 2x + y &= 0 \end{aligned} \quad \text{ח.}$$

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 4 \\ 4y - 6x + 8 &= 0 \end{aligned} \quad \text{ז.}$$

$$\begin{aligned} 3x - 5 &= 0 \\ 2x + y &= 0 \end{aligned} \quad \text{י.}$$

$$\begin{aligned} x - 2y - 4 &= 0 \\ -5x + 10y &= 0 \end{aligned} \quad \text{ט.}$$

$$\begin{aligned} x + 3y &= 0 \\ 2x + 4y &= 0 \end{aligned} \quad \text{יא.}$$

5. מצאו לאילו ערכי k (אם יש כאלה) זוגות הישרים הבאים הם :
(1) נחתכים (2) מקבילים (3) מתלכדים.

$$\begin{aligned} x + ky - k^2 &= 0 \\ x + 2y - 4 &= 0 \end{aligned} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{aligned} kx + y + 1 - k &= 0 \\ x - y + 2 &= 0 \end{aligned} \quad \text{א.}$$

$$\begin{aligned} 2x + (k + 6)y + 1 &= 0 \\ (k + 1)x + ky - 1 &= 0 \end{aligned} \quad \text{ד.}$$

$$\begin{aligned} k^2x - y - 3 &= 0 \\ 9x - y + k &= 0 \end{aligned} \quad \text{ג.}$$

$$\begin{aligned} kx + ky &= 0 \\ (k + 1)x + (k + 1)y &= 0 \end{aligned} \quad \text{ו.}$$

$$\begin{aligned} (k - 3)x + (k - 3)y + 2 &= 0 \\ x + y - k &= 0 \end{aligned} \quad \text{ה.}$$

6. הישר $(k^2 + 2)x - 4ky + k + 8 = 0$ עובר דרך נקודת החיתוך של הישרים: $3x - y = 0$ ו- $2x + y - 5 = 0$. מצאו את k (יש שתי אפשרויות).

7. מצאו לאיזה ערך של k הישר $(k^2 - 8k + 15)x - (k^2 - 2k - 3)y - 4 = 0$ מקביל לישר $y = -2kx + 1$.

8. מצאו את משוואתו של ישר המקביל לישר $2x + y = 0$ ויוצר משולש ששטחו 9 עם הקרניים השליליות של ציר ה- x וציר ה- y .

פתרונות

1. א. $k \neq 2$ ב. $k \neq -3$ ו- $k \neq 0$ ג. $k \neq -3$ ד. $k \neq 1$ ו- $k \neq 0$ א. (1) $k = 1$ (2) $k = -5$
2. א. (1) $k = \pm 1$ (2) $k \neq 1$ ב. $k > 3$ או $k < -2$ ג. (1) $k = 2$ (2) $k = 1$ א. (3) $k > 3$ או $k < -2$
- א. $k > 3$ או $1 < k < 3$ או $k < -3$ ב. נחתכים. ג. מקבילים. ד. מתלכדים. ה. מקבילים. ו. מקבילים. ז. מתלכדים. ח. מתלכדים. ט. מקבילים. י. נחתכים. יא. נחתכים.
5. א. נחתכים: $k \neq -1$ מקבילים $k = -1$ מתלכדים: $k = -1$ אף k .
5. ב. נחתכים: $k \neq 2$ מקבילים: $k = 2$ מתלכדים: $k = 2$ אף k .
5. ג. נחתכים: $k \neq \pm 3$ מקבילים: $k = 3$ מתלכדים: $k = -3$ אף k .
5. ד. נחתכים: $k \neq -3$ ו- $k \neq -2$ מקבילים: $k = -2$ מתלכדים: $k = -3$ אף k .
5. ה. נחתכים: $k \neq 1$ ו- $k \neq 2$ ו- $k \neq 3$ מקבילים: $k = 1$ ו- $k = 2$ מתלכדים: $k = 3$ אף k .
5. ו. נחתכים: $k \neq 1$ ו- $k \neq 2$ ו- $k \neq 3$ מקבילים: $k = 1$ ו- $k = 2$ מתלכדים: $k = 3$ אף k .
6. $k = 1$ או $k = 10$ 7. $k = 2.5$ 8. $y = -2x - 6$