

גיאומטריה אנליטית

המעגל

הגדרת המעגל

המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מנקודה קבועה (הנקראת מרכז המעגל) הוא קבוע (המרחק הקבוע נקרא רדיוס המעגל)

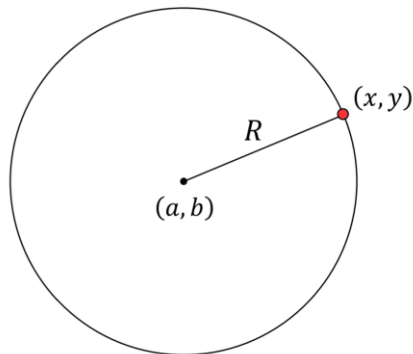
אם נסמן את שיעורי נקודת מרכז המעגל ב- (a, b) ואת רדיוס המעגל ב- R אז משוואת המעגל המתקבלת היא :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

זה נובע מנוסחת הדיסטנס שלמדנו בקו הישר. הרי אם נרצה לתאר את אוסף כל הנקודות (x, y) אשר מרחקן מהנקודה (a, b) הוא R המשוואה שתתאר את זה היא :

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = R$$

כאשר הביטוי באגף השמאלי של המשוואה הוא המרחק בין הנקודות האפשריות (x, y) לבין מרכז המעגל (a, b) והביטוי באגף הימני הוא המרחק הקבוע R . יש אינסוף נקודות שמקיימות את המשוואה הזאת ומה שמשותף לכולן הוא שמרחקן מ- (a, b) הוא R .



מעגל קנוני הוא מעגל מרכזו בראשית הצירים, אם נסמן את רדיוסו ב- R משוואתו היא :

$$x^2 + y^2 = R^2$$

1. עבור כל אחת ממשוואות המעגלים הבאות מצאו את מרכז המעגל ואת רדיוסו.

א. $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$ ב. $(x - 7)^2 + (y - 1)^2 = 9$

ג. $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 3$ ד. $x^2 + (y + \sqrt{2})^2 = 100$

ה. $x^2 + y^2 = 48$

2. עבור כל אחת ממשוואות המעגלים הבאות מצאו את מרכז המעגל ואת רדיוסו (הביעו באמצעות m במידת הצורך).

א. $(x + 2m)^2 + (y - 1)^2 = 4m^2$ נתון ש- $(m < 0)$

ב. $(x - m)^2 + (y - (1 - 3m))^2 = 4 + m^2$

ג. $x^2 + (y + 2 - m)^2 = 2m^2$ נתון ש- $(m > 0)$

ד. $(x - m + 4)^2 + y^2 = m^2$ נתון ש- $(m < 0)$

ה. $(x - 2m + 7)^2 + (y - 1 - m)^2 = 20$

3. רשמו את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה M ורדיוסו R .

א. $R = 6, M(1, -3)$

ב. $R = 1, M(-1, 0)$

ג. $R = 3\sqrt{2}, M(0, 0)$

השלמה לריבוע	
כל ביטוי מהצורה $x^2 - bx$ אפשר לרשום כך: $(x - \frac{b}{2})^2 - (\frac{b}{2})^2$	כל ביטוי מהצורה $x^2 + bx$ אפשר לרשום כך: $(x + \frac{b}{2})^2 - (\frac{b}{2})^2$
<p>נשתמש בזהויות האלה במקרה שמשוואת המעגל לא מגיעה בצורה המוכרת $((x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2)$ אלא בצורה "הפתוחה" שלה $(x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = R^2)$. נשתמש בזהויות האלה כדי לסדר מחדש את המשוואה ורק אז נוכל להבין מה מרכז המעגל ומה רדיוסו. במקרה שהמקדם של x^2 הוא לא 1 אלא מקדם אחר. נחלק את המשוואה במקדם שלו כך שהוא כן יהיה 1 ורק אז נשתמש בזהויות.</p>	

4. עבור כל אחת ממשוואות המעגלים הבאות, מצאו את שיעורי מרכז המעגל ואת רדיוסו.

א. $x^2 - 12x + y^2 + 4y - 9 = 0$ ב. $x^2 + 6x + y^2 - 10y - 6 = 0$

ג. $x^2 + 7y + 11.25 = -y^2$ ד. $x^2 - x + y^2 - 35\frac{3}{4} = 0$

ה. $x^2 + y + y^2 = 97.5 + 3x$ ו. $3x^2 - 12x + 3y^2 + 6y = 60$

ז. $2x^2 + 22x + 2y^2 + 10y + 53 = 0$

5. עבור כל אחת ממשוואות המעגלים הבאות, מצאו את שיעורי מרכז המעגל ואת רדיוסו (הביעו באמצעות m במידת הצורך).

א. $x^2 - 2mx + y^2 - 2my + 2y = 2m - 1$ ($m > 0$)

ב. $x^2 - 4x + 2mx + y^2 + 2my = 4m - \frac{1}{4}m^2 - 4$ ($m > 0$)

ג. $mx^2 - 2m^2x - 2mx + my^2 - 6m^2y + 2my + 9m^3 - 4m^2 - 2m = 0$

6. מצאו את משוואתו של מעגל מרכזו בנקודה $(0,1)$ והוא עובר בנקודה $(-1,8)$.

7. מצאו את משוואתם של המעגלים שמרכזם על ציר ה- y , רדיוסם $\sqrt{10}$ והם עוברים בנקודה $(-3,1)$.

8. מצאו את משוואתם של המעגלים שרדיוסם 13 והם עוברים בנקודות $(-15,7)$ ו- $(-3,15)$.

9. מצאו את משוואתו של מעגל שקצות הקוטר שלו הן הנקודות $(-1, -2)$ ו- $(-9,4)$.

10. מצאו את משוואתו של מעגל החוסם מלבן ששני קודקודים נגדיים שלו הם הנקודות $(-4, -9)$ ו- $(6,15)$.

11. מצאו את משוואתו של מעגל שמרכזו על הישר $y = -2x + 1$ והוא עובר בנקודות $(6,0)$ ו- $(7,-3)$

12. מצאו את משוואתם של המעגלים שמרכזם על הישר $y = x + 2$ רדיוסם 13 והם עוברים בנקודה $(15,10)$

13. מצאו את משוואתם של המעגלים שמרכזם על הישר $y = 6$, רדיוסם 13 והם חותכים מציר ה- y מיתר שאורכו 24.

14. מצאו את משוואתו של מעגל העובר בנקודות $(0,8)$ ו- $(4,0)$ ו-

א. מרכזו על ציר ה- x .

ב. מרכזו על ציר ה- y .

15. משולש ABC שקודקודיו הם $A(7,4)$, $B(6,-3)$ ו- $C(-2,1)$ חסום במעגל.

א. מצאו את משוואת המעגל.

ב. מצאו את שטחו של ריבוע שחסום במעגל.

ג. האם ניתן לחסום במעגל מלבן שהיקפו 16?

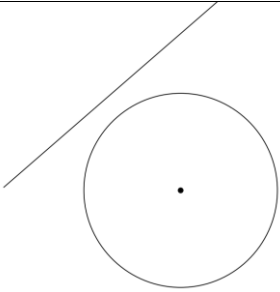
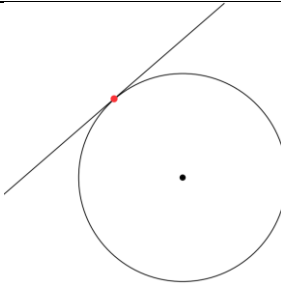
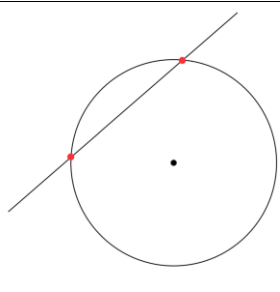
16. נתון מעגל החוסם משולש שצלעותיו מונחות על הישרים

$$x - y + 4 = 0, x + 2y - 14 = 0 \text{ ו- } y - 4 = 0.$$

א. מצאו את משוואת המעגל.

ב. קבעו האם המשולש הוא חד זווית, קהה זווית או ישר זווית (מומלץ לשרטט במערכת צירים ואין צורך למצוא זוויות).

מצבים הדדיים בין ישר ומעגל

זרים – אין להם אף נקודה משותפת	משיקים – יש להם נקודה אחת משותפת	נחתכים – יש להם 2 נקודות משותפות
		
<p>כדי למצוא את הנקודות המשותפות של הישר $y = mx + n$ והמעגל $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ (אם יש כאלה) נפתור את מערכת המשוואות:</p> $\begin{cases} (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \\ y = mx + n \end{cases}$ <p>על ידי הצבת $mx + n$ במקום y במשוואת המעגל: $(x - a)^2 + (mx + n - b)^2 = R^2$. בתהליך הזה נקבל משוואה ריבועית.</p> <p>1. אם למשוואה הריבועית יש 2 פתרונות זה אומר שלמעגל ולישר יש 2 נקודות משותפות. כלומר הישר והמעגל נחתכים. כדי למצוא את שיעורי ה-y של הנקודות נציב את שיעורי ה-x שמצאנו במשוואת הישר.</p> <p>2. אם למשוואה הריבועית יש פתרון יחיד זה אומר שלמעגל ולישר יש נקודה אחת משותפת. כלומר הישר והמעגל משיקים. כדי למצוא את שיעור ה-y של נקודת ההשקה נציב את שיעורי ה-x שמצאנו במשוואת הישר.</p> <p>3. אם למשוואה הריבועית אין פתרון זה אומר שלמעגל ולישר אין נקודות משותפות. כלומר הישר והמעגל זרים.</p>		
<p>דרך נוספת לקבוע את המצב ההדדי בין הישר $y = mx + n$ והמעגל $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ אבל מבלי למצוא את הנקודות המשותפות אם יש כאלה:</p> <p>נבדוק מה המרחק בין מרכז המעגל (a, b) לבין הישר (באמצעות הנוסחה: $d = \frac{ Ax_0 + By_0 + C }{\sqrt{A^2 + B^2}}$).</p>		
<p>אם המרחק בין מרכז המעגל (a, b) לבין הישר $y = mx + n$ גדול מהרדיוס R אז הם זרים</p>	<p>אם המרחק בין מרכז המעגל (a, b) לבין הישר $y = mx + n$ שווה לרדיוס R אז הם משיקים</p>	<p>אם המרחק בין מרכז המעגל (a, b) לבין הישר $y = mx + n$ קטן מהרדיוס R אז הם נחתכים</p>

17. בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואת מעגל ומשוואת ישר החותך את המעגל. עבור כל אחד מהסעיפים מצאו את נקודות החיתוך של הישר והמעגל.

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y+4)^2 = 169 \\ y = -3x + 2 \end{cases} \text{א.}$$

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-3)^2 = 36 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \text{ב.}$$

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 16 \\ y = \frac{1}{3}x + 3 \end{cases} \text{ג.}$$

$$\begin{cases} (x-6)^2 + (y+1)^2 = 25 \\ y = 3 \end{cases} \text{ד.}$$

$$\begin{cases} (x-7)^2 + (y+1)^2 = 25 \\ x = 3 \end{cases} \text{ה.}$$

18. בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואת מעגל ומשוואת ישר המשיק למעגל. עבור כל אחד מהסעיפים מצאו את נקודת ההשקה של הישר והמעגל. עשו זאת בשתי דרכים: (1) פתרון מערכת משוואות (2) משוואת הנורמל למשיק בנקודת ההשקה.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 3x + 4y - 25 = 0 \end{cases} \text{א.}$$

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-3)^2 = 169 \\ 5x + 12y - 215 = 0 \end{cases} \text{ב.}$$

19. בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואת מעגל ומשוואת ישר. הראו שהישר והמעגל זרים (כלומר אין להם נקודות משותפות. עשו זאת בשתי דרכים: (1) מערכת משוואות (הראו שאין לה פתרון) (2) בדקו את מרחק הישר ממרכז המעגל והסיקו את המסקנה המתבקשת.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 49 \\ -3x + 4y - 40 = 0 \end{cases} \text{א.}$$

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+1)^2 = 16 \\ -12x + 5y - 75 = 0 \end{cases} \text{ב.}$$

20. בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואת מעגל ומשוואת ישר. מצאו את המצב ההדדי בין הישר למעגל (נחתכים/משיקים/זרים). עשו זאת בשתי דרכים:

- (1) מערכת משוואות (בדקו כמה פתרונות יש לה אם בכלל)
- (2) בדקו את מרחק הישר ממרכז המעגל והסיקו את המסקנה המתבקשת.

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 = 25 \\ y = \frac{4}{3}x + 11\frac{2}{3} \end{cases} \text{א.}$$

$$\begin{cases} (x-6)^2 + (y-3)^2 = 10 \\ y = 2x - 4 \end{cases} \text{ב.}$$

$$\begin{cases} (x+3)^2 + (y-2)^2 = 169 \\ y = -\frac{5}{12}x + 14\frac{5}{6} \end{cases} \text{ג.}$$

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-2)^2 = 32 \\ y = x - 1 \end{cases} \text{ד.}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = 3x + 12 \end{cases} \text{ה.}$$

21. נתון המעגל $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 40$ והישר $y = -3x + k$ מצאו עבור אילו ערכי k :

א. הישר משיק למעגל.

ב. הישר חותך את המעגל.

ג. הישר והמעגל זרים.

22. נתון המעגל $x^2 + y^2 = 20$ והישר $y = 2x + k$ מצאו עבור אילו ערכי k :

א. הישר משיק למעגל.

ב. הישר חותך את המעגל.

ג. הישר והמעגל זרים.

23. מצאו את נקודת האמצע של מיתר שחותך המעגל $x^2 + y^2 = 20$ מהישר $-3x + y - 8 = 0$, מבלי

לחשב את שיעורי נקודות החיתוך של הישר ומהמעגל.

24. מצאו על הישר $x + y + 2 = 0$ נקודות שמרחקן

ממרכז המעגל $x^2 + y^2 - 10x - 2y = -16$ שווה לקוטרו.

25. מצאו את משוואת של קוטר במעגל $x^2 + y^2 - 12x + 4y + 15 = 0$

שמקביל לישר $3x - 4y - 1 = 0$.

26. נתון מעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 - 4y - 21 = 0$ וישר שמשוואתו $x + y - 3 = 0$

א. מצאו את נקודות הקצה של המיתר שהמעגל חותך מהישר.

ב. מצאו את אורך המיתר מבלי להעזר בנקודות מסעיף א.

27. הישר $4x + 3y - 24 = 0$ חותך את ציר ה- x ואת ציר ה- y בנקודות A ו-B בהתאמה. O היא ראשית הצירים.

א. מצאו את משוואת המעגל החוסם את משולש AOB.

ב. מצאו את משוואת הישר עליו מונח המיתר שאמצעו בנקודה (2,1).

28. מעגל שמרכזו בנקודה (4,3) חותך מהישר $3x + y - 13 = 0$ מיתר שאורכו $\sqrt{40}$.

א. מצאו את משוואת המעגל

ב. מצאו את אורך הצלע של משולש שווה צלעות החסום במעגל.

29. מרכזו של מעגל הוא על הישר $y = 3x$ ורדיוסו 4. מצאו את משוואת המעגל אם הוא חותך

מהישר $y = x + 2$ מיתר שאורכו $4\sqrt{2}$. (יש 2 תשובות אפשריות).

30. ריבוע חסום בתוך מעגל. אחד מקודקודי הריבוע הוא בנקודה (0,0) ואחד מאלכסונו

מונח על הישר $2x + y - 5 = 0$.

א. מצאו את משוואת המעגל החוסם.

ב. מצאו את שאר קודקודי הריבוע.

31. מרכזו של מעגל נמצא על הישר $-2x + y + 3 = 0$ והוא חותך מיתרים שווים מהישרים המקבילים

$-5x + y - 34 = 0$ ו- $-5x + y + 46 = 0$.

א. מצאו את מרכז המעגל.

ב. מצאו את אורכי המיתרים השווים אם נתון שאורכו של רדיוס המעגל הוא 10.

32. במעגל חסום טרפז ABCD משוואת הבסיס הגדול AB היא $-x + y + 1 = 0$, משוואת השוק AD היא

$3x + y - 7 = 0$ ושיעורי הקודקוד C הם (2,9).

א. מצאו את משוואת המעגל.

ב. מצאו את שיעורי נקודה B.

ג. אלכסונו הטרפז נפגשים בנקודה M חשבו את יחס השטחים: $\frac{S_{CDM}}{S_{ADM}}$.

33. משוואות אלכסונו של מלבן הן $x - 6 = 0$ ו- $3x - 4y - 6 = 0$ ואורכי צלעות המלבן הם $\sqrt{30}$ ו-

$\sqrt{70}$.

א. מצאו את משוואת המעגל החוסם את המלבן.

ב. מצאו את קודקודי המלבן.

34. הישר $x + 2y + 1 = 0$ חותך קשת בת 120° ממעגל שמרכזו בנקודה $C(7,1)$.

א. מצאו את משוואת המעגל.

ב. במעגל חסום דלתון שאחד מקודקודי הראש שלו הוא $(-1,5)$ ואחד מקודקודי הבסיס שלו

הוא $(11, -7)$. מצאו את שטח הדלתון (אין צורך למצוא את קודקוד הבסיס השני).

* קודקודי הראש הם הקודקודים שמהם יוצאים הצלעות השוות. קודקודי הבסיס הם

הקודקודים שמהם יוצאים 2 צלעות סמוכות שאינן שוות אורך.

35. נתונה משוואת מעגל: $x^2 + y^2 - 2x + 2mx - 6my - 2y = m^2 + 17$ עבור איזה ערך של m

מרכז המעגל נמצא:

א. על ציר ה- x

ב. על ציר ה- y

ג. על הישר $y = 2x - 1$

36. נתונה משוואת מעגל: $x^2 + y^2 - 8x + 4mx - 2my + 10y = m + 4$ מצאו עבור אילו ערכי m

הנקודה $(-1, -5)$ נמצאת:

א. בתוך המעגל.

ב. מחוץ למעגל.

ג. על המעגל.

37. מצאו את מרכזו של המעגל שמשוואתו: $x^2 + y^2 - (4m - 2)x + 8my + 312 = 0$ אם ידוע

שרדיוסו שווה 13. (יש שני מרכזים אפשריים).

38. מרכזו של מעגל נמצא על הישר $y = mx$. המעגל עובר דרך הנקודות $A(4,0)$ ו- $B(0,2)$.

א. הבע באמצעות m את שיעורי מרכז המעגל.

ב. עבור אילו ערכי m אין פתרון לסעיף א? הסבירו את המשמעות הגיאומטרית.

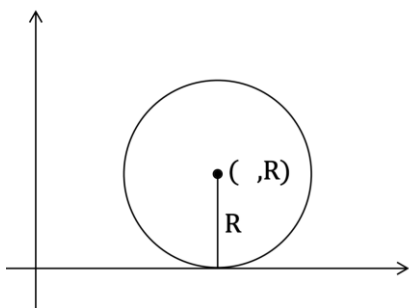
39. מרכזו של מעגל נמצא על הישר $y = mx + m$. המעגל עובר דרך הנקודות $A(0,6)$ ו- $B(2,2)$.

א. הבע באמצעות m את שיעורי מרכז המעגל.

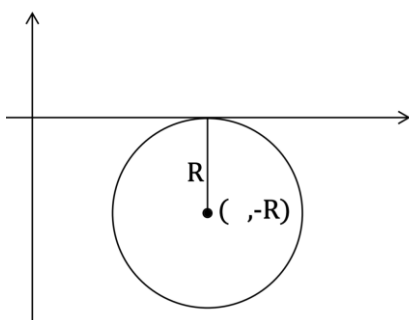
ב. עבור אילו ערכי m אין פתרון לסעיף א? הסבירו את המשמעות הגיאומטרית.

מעגל שמשיק לצירים

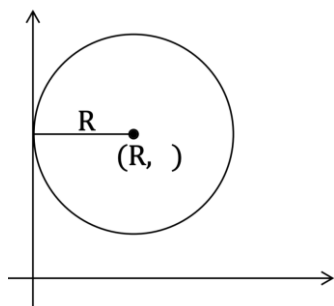
אם מעגל שרדיוסו R משיק לציר ה- x ונמצא מעליו שיעור ה- y של מרכזו שווה R .



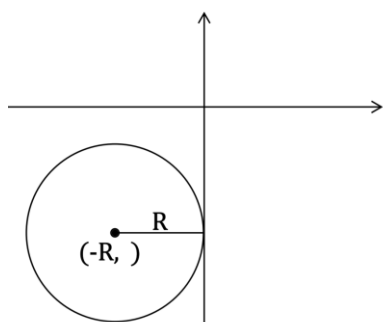
אם מעגל שרדיוסו R משיק לציר ה- x ונמצא מתחתיו שיעור ה- y של מרכזו שווה $-R$.

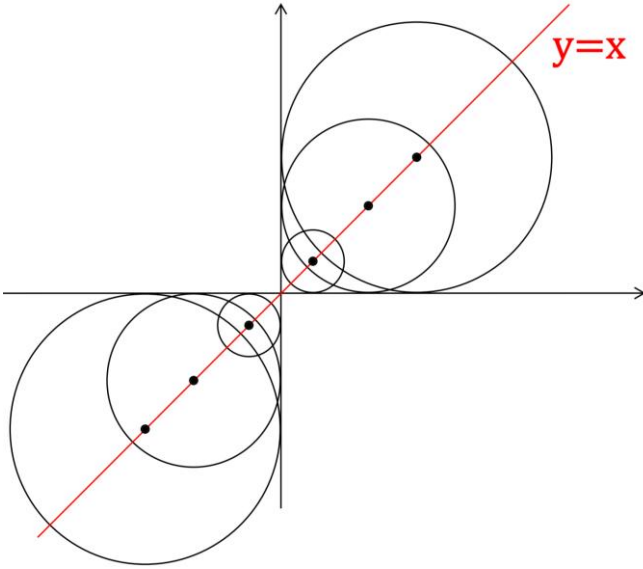


אם מעגל שרדיוסו R משיק לציר ה- y ונמצא מימינו שיעור ה- x של מרכזו שווה R .



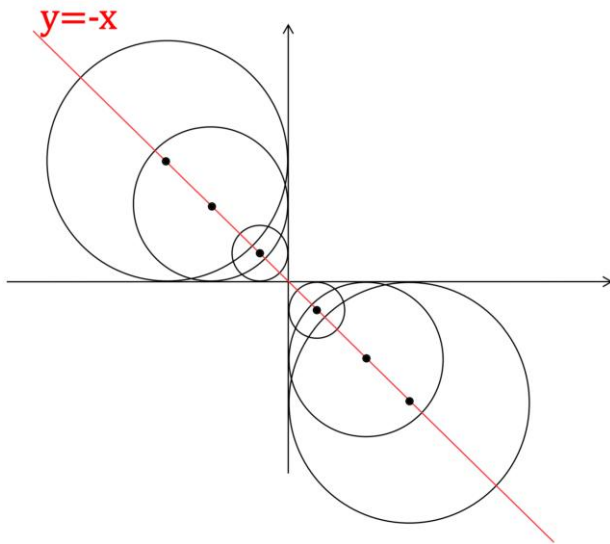
אם מעגל שרדיוסו R משיק לציר ה- y ונמצא משמאלו שיעור ה- x של מרכזו שווה $-R$.





אם מעגל שרדיוסו R משיק לשני הצירים
ונמצא ברביעי ה-1 או ה-3 מרכזו נמצא על
הישר $y = x$.

- אם המעגל ברביעי ה-1 נקודת מרכז המעגל היא (R, R) .
- אם המעגל ברביעי ה-3 נקודת מרכז המעגל היא $(-R, -R)$.



אם מעגל שרדיוסו R משיק לשני הצירים
ונמצא ברביעי ה-2 או ה-4 מרכזו נמצא על
הישר $y = -x$.

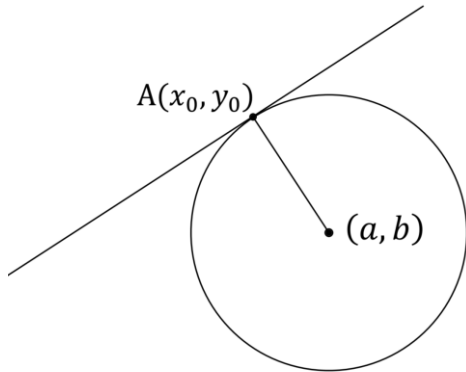
- אם המעגל ברביעי ה-2 נקודת מרכז המעגל היא $(-R, R)$.
- אם המעגל ברביעי ה-4 נקודת מרכז המעגל היא $(R, -R)$.

40. מעגל שמרכזו בנקודה $M(6, -2)$ משיק לציר ה- y בנקודה A . מצאו את משוואת המעגל.
41. מצאו את משוואותיהם של שני המעגלים שמשקים לציר ה- x בנקודה $(-3, 0)$ ורדיוסם 7.
42. מעגל שמרכזו ברביעי ה-3 על הישר $x = -2$ ורדיוסו 8 משיק לציר ה- x . מצאו את משוואת המעגל.
43. מצאו את משוואתו של מעגל:

- שמרכזו ברביעי ה-4, משיק לשני הצירים ורדיוסו 1.
- שמרכזו ברביעי ה-1, משיק לשני הצירים ורדיוסו 3.
- שמרכזו ברביעי ה-3, משיק לשני הצירים ורדיוסו 6.
- שמרכזו ברביעי ה-2, משיק לשני הצירים ורדיוסו 5.

44. מצאו את משוואות המעגלים שרדיוסם 10 ומשיקים לשני הצירים.
45. נתונים מעגלים המשיקים לציר ה- x .
- א. מצאו את משוואות המעגלים אם ידוע שמרכזם על הישר $2x + 3y - 6 = 0$ ורדיוסם 8.
- ב. מרכזי המעגלים ונקודות ההשקה שלהם עם ציר ה- x הם קודקודים של מרובע. מצאו את שטחו.
- ג. מצאו את הזווית (החדה) בין אלכסונו של המרובע מסעיף ב.
46. מצאו את משוואתו של מעגל המשיק לציר ה- y בנקודה $(0, -3)$ ועובר דרך הנקודה $(-2, 1)$.
47. מצאו את משוואתו של מעגל המשיק לציר ה- x בנקודה $(7, 0)$ ועובר דרך הנקודה $(10, 1)$.
48. מצאו את משוואותיהם של שני מעגלים המשיקים לצירים ועוברים דרך הנקודה $(-4, 2)$.
49. מרכזו של מעגל נמצא על הישר $y = x + 1$ ומשיק לישר $y = 4$ בנקודה $(-3, 4)$. מצאו את משוואת המעגל.
50. מצאו את משוואות המעגלים המשיקים לציר ה- y ולישר $y = 4$ אם ידוע שמרכזם על הישר $y = 7$.
51. מצאו את משוואות המעגלים המשיקים לשני הצירים ומרכזם על הישר $2x - y + 6 = 0$.
52. מצאו את משוואות המעגלים המשיקים לשני הצירים ומרכזם על הישר $y = -3x + 8$.

משוואת משיק למעגל

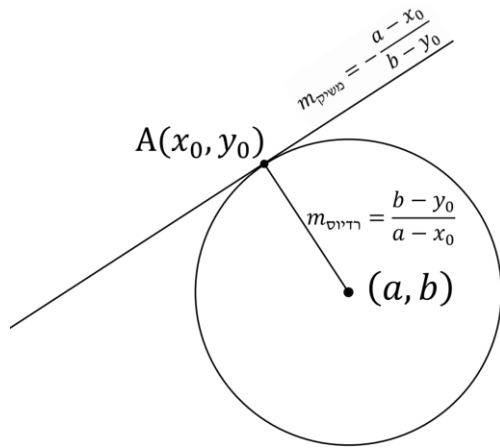


ישנה נוסחה למציאת משוואת משיק למעגל:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

בנקודה $A(x_0, y_0)$ שעליו והיא:

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = R^2$$



ניתן להסתדר בלי הנוסחה באופן הבא:

שלב 1: נעביר את הרדיוס ונמצא את שיפוע הישר שעליו

הוא מונח על ידי שימוש בנוסחה $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ עם נקודת המרכז

(a, b) ונקודת ההשקה (x_0, y_0) .

$$m_{\text{רדיוס}} = \frac{b - y_0}{a - x_0}$$

שלב 2: השיפוע של המשיק יהיה הופכי ונגדי לשיפוע

הרדיוס:

$$m_{\text{משיק}} = -\frac{a - x_0}{b - y_0}$$

שלב 3: נציב בנוסחה $y - y_1 = m(x - x_1)$

את נקודת ההשקה (x_0, y_0) ואת שיפוע המשיק $(m_{\text{משיק}})$

וכך נמצא את משוואתו: $y - y_0 = m_{\text{משיק}}(x - x_0)$

53. בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואת מעגל ונקודה שעליו. מצאו את משוואת המשיק למעגל בשתי דרכים (1) ע"י שימוש בנוסחה המופיעה בדף הנוסחאות של 5 יח"ל (2) ע"י העברת רדיוס ומציאת שיפועו.

א. $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 40$, נקודה על המעגל: $(4, 3)$.

ב. $(x - 4)^2 + (y - 7)^2 = 32$, נקודה על המעגל: $(0, 11)$.

ג. $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 52$, נקודה על המעגל: $(11, -7)$.

ד. $(x - 1)^2 + y^2 = 100$, נקודה על המעגל: $(-5, 8)$.

ה. $x^2 + y^2 = 25$, נקודה על המעגל: $(4, -3)$.

54. הישר $-x + 3y + 29 = 0$ משיק בנקודה P למעגל

שמרכזו בנקודה $(6, -1)$ מצאו את שיעורי הנקודה P.

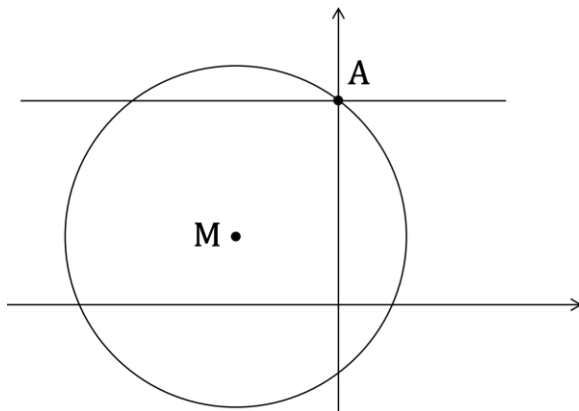
55. רדיוסו של מעגל קנוני הוא $\sqrt{52}$. הנקודה A נמצאת על המעגל ברביע הרביעי ושיעור ה-y שלה הוא -4.

הנקודה B נמצאת על המעגל ברביע השלישי ושיעור ה-x שלה הוא -4. בנקודות A ו-B מעבירים משיקים.

א. מצאו את משוואת המשיקים.

ב. המשיקים נפגשים בנקודה C. O היא ראשית הצירים. איזה סוג מרובע הוא OACB?

הסבירו.



56. הנקודה M היא מרכז המעגל שמשוואתו:

$$x^2 + 6x + y^2 - 4y - 12 = 0$$

היא נקודת החיתוך של הישר $y = 6$ עם המעגל.

א. מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה A.

ב. המשיק מסעיף A חותך את ציר ה-x בנקודה

B ואת הישר שעובר דרך מרכז המעגל ומקביל

לציר ה-y בנקודה C. באיזה יחס מחלקת הנקודה

A את הקטע BC?

57. נתון מעגל קנוני ששטחו 100π . וישר שמשוואתו $y = x - 2$.

א. מצאו את משוואת המשיקים למעגל בנקודות החיתוך של הישר והמעגל.

ב. נסמן את נקודות ההשקה ב-A ו-B ואת נקודת החיתוך של המשיקים ב-M. מצאו את

זוויותיו של משולש ABM.

58. נתון מעגל המשיק לישר $-x + 2y - 9 = 0$ בנקודה $A(5,7)$ ומרכזו M על הישר $y = x - 4$.

א. מצאו את משוואת המעגל.

ב. נתונה נקודה כלשהי B . כך שנקודת מפגש התיכונים של משולש AMB היא $E(4,5)$.

מצאו את שטח המשולש AMB . (תוכלו להעזר בשרטוט חדש ללא המעגל- לא חייבים

לשרטט במערכת צירים)

59. נתון מעגל המשיק לישר $3x + y - 32 = 0$ בנקודה A ומרכזו בנקודה $M(4,0)$.

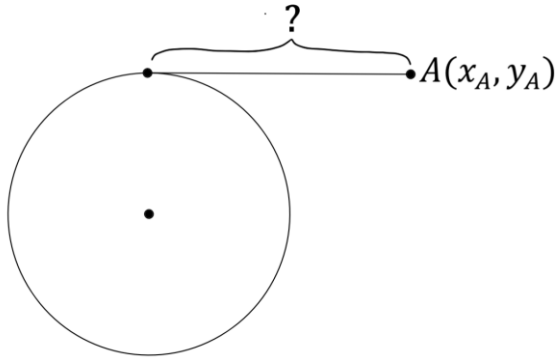
א. מצאו את משוואת המעגל.

ב. מצאו משוואת ישר נוסף המשיק למעגל ומקביל לישר הנתון.

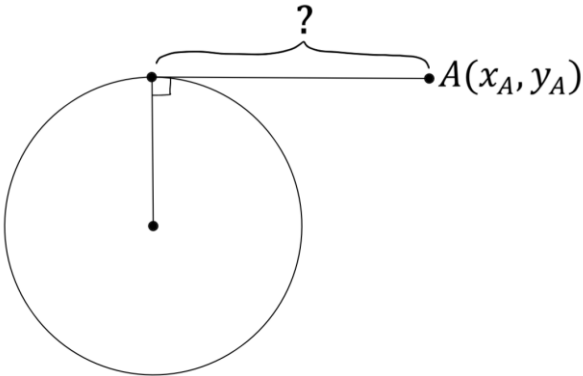
60. מצאו את משוואות המשיקים למעגל $x^2 - 10x + y^2 + 20y + 100 = 0$ המקבילים

לישר $-3x + 4y - 1 = 0$.

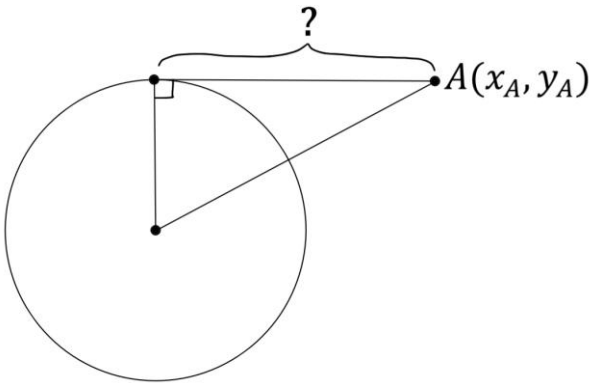
מציאת אורך של משיק למעגל אם נתונה משוואת המעגל ונקודה $A(x_A, y_A)$ הנמצאת מחוץ למעגל.



1. מחברים את מרכז המעגל עם נקודת ההשקה. את **אורכו של הרדיוס** יש לנו אם נתונה משוואת המעגל.



2. מחברים את מרכז המעגל עם הנקודה הנתונה שממנה יוצא המשיק. משתמשים בנוסחה למציאת מרחק בין 2 נקודות כדי למדוד את **המרחק בין מרכז המעגל לנקודה הנתונה** שממנה יוצא המשיק.



3. משתמשים במשפט **פיתגורס** במשולש ישר הזווית שהתקבל על מנת למצוא את הניצב שהוא **האורך של המשיק**.

61. מצאו את אורכו של אחד מהמשיקים היוצא מהנקודה $A(0,4)$ למעגל

$$(x + 5)^2 + y^2 = 36$$

62. מצאו את אורכו של אחד מהמשיקים היוצא מהנקודה $A(3,5)$ למעגל

$$x^2 + y^2 - 12y + 30 = 0$$

63. מצאו את אורכו של אחד מהמשיקים היוצא מהנקודה $A(8,1)$ למעגל

קנוני שרדיוסו 7.

64. מהנקודה $(-6, -3)$ יוצאים שני משיקים למעגל $x^2 + y^2 - 2x - 12y = k$ שהאורך של כל אחד מהם הוא 10.

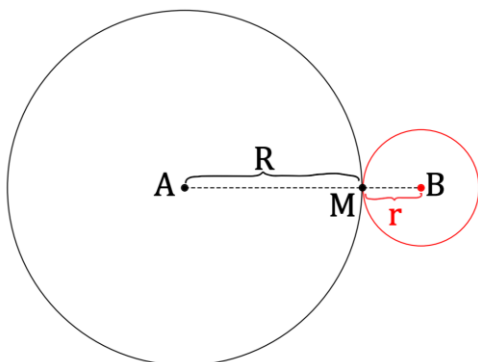
א. מצאו את k .

ב. מכל אחת מהנקודות $A(t, 6)$ ו $B(-2t, 9)$ שמחוץ למעגל הנ"ל יוצא משיק למעגל. אורך המשיק שיוצא מנקודה B ארוך פי 2 מאורך המשיק היוצא מנקודה A . מצאו את t .

מצב הדדי בין 2 מעגלים

נניח שיש 2 מעגלים שאורכי רדיוסם הם R ו- r (כאשר R אינו הרדיוס הקטן)

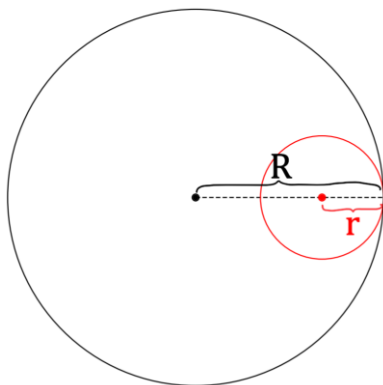
משיקים מבחוץ:



- יש להם נקודה אחת משותפת.
- אם נסמן את רדיוסי המעגלים ב- R ו- r אז:

$$\text{קטע המרכזים} = R + r$$

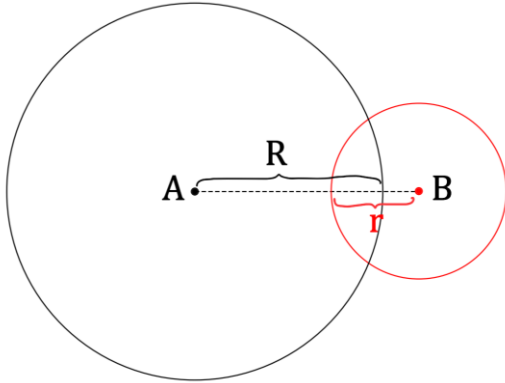
משיקים מבפנים:



- יש להם נקודה אחת משותפת.
- אם נסמן את רדיוסי המעגלים ב- R ו- r אז:

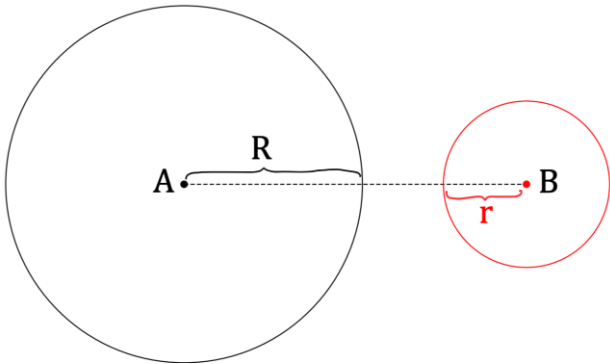
$$\text{קטע המרכזים} = R - r$$

נחתכים:



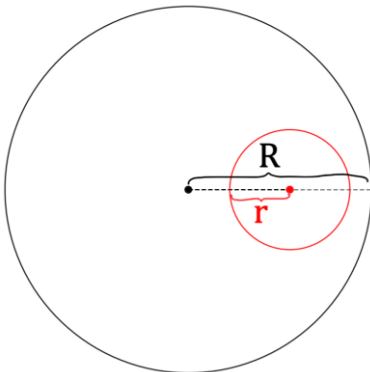
- יש להם 2 נקודות משותפות.
- אם נסמן את רדיוסי המעגלים ב- R ו- r אז: $R - r < R + r$

זרים מבחוץ:



- אין להם נקודות משותפות.
- אם נסמן את רדיוסי המעגלים ב- R ו- r אז: קטע המרכזים $> R + r$

זרים מבפנים:



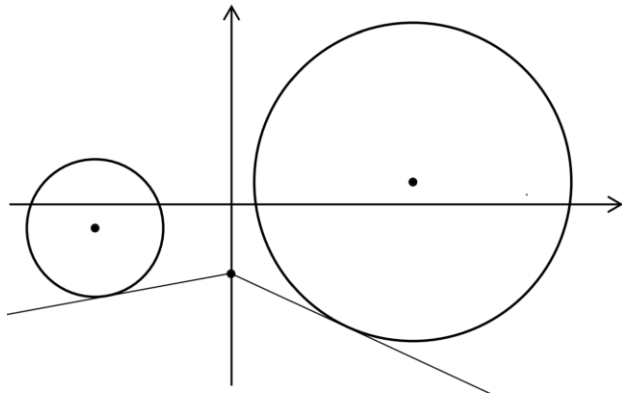
- אין להם נקודות משותפות.
- אם נסמן את רדיוסי המעגלים ב- R ו- r אז: קטע המרכזים $< R - r$

65. נתונים המעגלים שמשוואותיהם הם: $x^2 + y^2 = 80$ ו- $(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 5$.

- הראו בשתי דרכים (פתרון מערכת משוואות ובהסתמך על סכום/הפרש הרדיוסים) שהמעגלים משיקים זה לזה ומצאו את נקודת ההשקה.
- מצאו את משוואת המשיק המשותף.

66. נתונים המעגלים שמשוואותיהם הם: $(x - 2)^2 + y^2 = 9$ ו- $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

- הראו שהמעגלים נחתכים (אין צורך למצוא את נקודות החיתוך).
- מנקודה שמחוץ לשני המעגלים מעבירים 2 משיקים משותפים לשני המעגלים. מצאו את נקודת החיתוך של המשיקים מבלי למצוא את משוואות המשיקים (העזרו במרכזי המעגלים ובחלוקת קטע ביחס נתון).
- מצאו את משוואות המשיקים.



67. נתונה נקודה על ציר ה- y .

א. מצאו את הנקודה כך שאורכי

המשיקים ממנה למעגלים

$$(x + 6)^2 + (y + 1)^2 = 9$$

$$(x - 8)^2 + (y - 1)^2 = 49$$

שוים זה לזה.

ב. מצאו את שטח המשולש

שקודקודיו הם מרכזי המעגלים

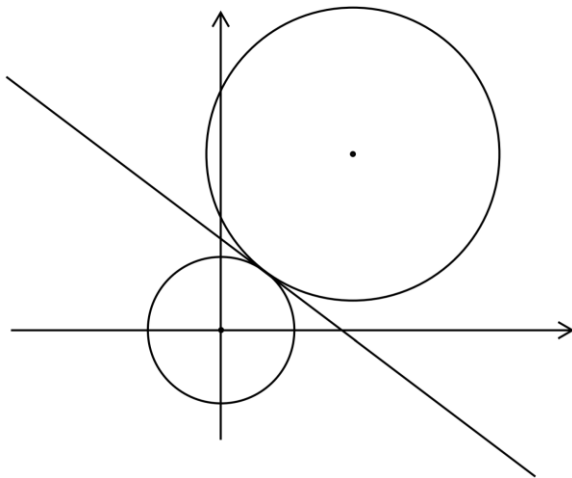
והנקודה מסעיף א.

68. ישר שעובר דרך ראשית הצירים משיק באותה נקודה למעגל שמרכזו בנקודה $(5, 10)$ ולמעגל שמרכזו

בנקודה $(14, -2)$ (המעגלים משיקים מבחוץ).

א. מצאו את משוואת המשיק המשותף.

ב. מצאו את משוואות המעגלים.



69. נתונים המעגל $(x - 9)^2 + (y - 12)^2 = 100$

ומעגל נוסף שמרכזו בראשית הצירים.

הישר $3x + 4y - 25 = 0$ משיק למעגל שמרכזו

בראשית הצירים.

א. מצאו את רדיוס המעגל שמרכזו בראשית

הצירים.

ב. הראו שהמעגלים משיקים זה לזה ומצאו

את נקודת ההשקה.

70. מרכזיהם של שני מעגלים (1) ו-(2) נמצאים על ציר ה- y . ידוע שהמעגלים משיקים זה לזה מבחוץ. הישר

$$3x + 4y - 25 = 0$$

א. מצאו את משוואת מעגל (1) אם נתון שרדיוסו 9 ומצא מתחת לישר הנתון.

ב. מצאו את משוואת מעגל (2) אם ידוע שרדיוסו קטן מרדיוסו של מעגל (1).

71. מעגל (1) שמרכזו בראשית הצירים, משיק למעגל (2) שמרכזו ברביע הראשון, בנקודה הנמצאת גם היא ברביע הראשון. קטע המרכזים מונח על הישר $4x - 3y = 0$ ואורכו 8 אם המעגלים משיקים מבחוץ ו-2 אם המעגלים משיקים מבפנים כך שמעגל (2) בתוך מעגל (1).
- א. מצאו את נקודת ההשקה.
 ב. מצאו את מרכזו של מעגל 2 בשני מקרי ההשקה (מבפנים ומבחוץ).
72. שני המעגלים $(x - 9)^2 + (y - 12)^2 = 36$ ו- $x^2 + y^2 = R^2$ משיקים זה לזה מבחוץ בנקודה הנמצאת בין ראשית הצירים למרכז המעגל הראשון.
- א. מצאו את רדיוס המעגל השני.
 ב. מצאו את נקודת ההשקה.
 ג. מצאו את המשיק המשותף.
 ד. אחת מנקודות החיתוך של המעגלים $x^2 + y^2 = 625$ ו- $x^2 + y^2 - 110x - 20y = 0$ היא הנקודה A והיא נמצאת ברביע הראשון. המשיק למעגל הקנוני בנקודה A והמשיק למעגל השני באותה נקודה מאונכים זה לזה.
- ה. מצאו את נקודה A.
 ו. מצאו את ערכו של הפרמטר k.
 ז. מצאו את משוואות המשיקים הנ"ל.
73. נתונים שני מעגלים שמרכזיהם (18,12) ו-(-15,68). הישר $5x + 12y - 65 = 0$ משיק לשני המעגלים (בנקודות שונות).
- א. הראו ששני המעגלים משיקים זה לזה מבחוץ ומצאו את נקודת ההשקה.
 ב. מצאו את משוואת המשיק המשותף העובר דרך נקודת ההשקה המשותפת.
74. למעגלים שמשוואותיהם $x^2 + y^2 = 169$ ו- $x^2 + y^2 - 26x = k$ יש משיק משותף בנקודות שונות. נקודת ההשקה על המעגל הקנוני היא (5, -12).
- א. מצאו את k.
 ב. מצאו משוואה של מעגל קנוני המשיק למעגל $x^2 + y^2 - 26x = k$ אם ההשקה היא: (1) מבחוץ. (2) מבפנים.

פתרונות

1. א. מרכז: $(-1, 1)$. $R = 2$.
 ב. מרכז: $(7, 1)$. $R = 3$.
 ג. מרכז: $(-2, -2)$. $R = \sqrt{3}$.
 ד. מרכז: $(0, -\sqrt{2})$. $R = 10$.
 ה. מרכז: $(0, 0)$. $R = \sqrt{48}$.
2. א. מרכז: $(-2m, 1)$. $R = -2m$.
 ב. מרכז: $(m, 1 - 3m)$. $R = \sqrt{m^2 + 4}$.

- ג. מרכז: $R = \sqrt{2}m \cdot (0, m - 2)$
 ד. מרכז: $R = -m \cdot (m - 2, 0)$
 ה. מרכז: $R = \sqrt{20} \cdot (2m - 7, m + 1)$

3. א. $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 36$ ב. $(x + 1)^2 + y^2 = 1$ ג. $x^2 + y^2 = 18$

4. א. מרכז: $R = 7 \cdot (6, -2)$
 ב. מרכז: $R = \sqrt{40} \cdot (-3, 5)$
 ג. מרכז: $R = 1 \cdot (0, -3.5)$
 ד. מרכז: $R = 6 \cdot (0.5, 0)$
 ה. מרכז: $R = 10 \cdot (1.5, -0.5)$
 ו. מרכז: $R = 5 \cdot (2, -1)$
 ז. מרכז: $R = \sqrt{10} \cdot (-5.5, -2.5)$

5. א. מרכז: $R = \sqrt{2}m \cdot (m, m - 1)$
 ב. מרכז: $R = \frac{\sqrt{7}}{2}m \cdot (2 - m, -m)$
 ג. מרכז: $R = \sqrt{m^2 + 4} \cdot (m + 1, 3m - 1)$

6. $x^2 + (y - 1)^2 = 50$ או $x^2 + y^2 = 10$ או $x^2 + (y - 2)^2 = 10$
 7. $x^2 + (y - 1)^2 = 50$
 8. $(x + 15)^2 + (y - 20)^2 = 169$ או $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 169$
 9. $(x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 25$ או $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 169$
 10. $(x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 25$
 11. $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$

12. $(x - 20)^2 + (y - 22)^2 = 169$ או $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 169$
 13. $(x - 5)^2 + (y - 6)^2 = 169$ או $(x + 5)^2 + (y - 6)^2 = 169$

14. א. $x^2 + (y - 3)^2 = 25$ ב. $(x + 6)^2 + y^2 = 100$

15. א. $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$ ב. 50 יחידים ג. לא 16. א. $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 10$ ב. קהה זווית.

17. א. $(-2, 8)$ ו- $(6.2, -16.6)$ ב. $(-1, -3)$ ו- $(3.8, 6.6)$ ג. $(-3, 2)$ ו- $(4.2, 4.4)$ ד. $(3, 3)$ ו- $(9, 3)$

ה. $(3, 2)$ ו- $(3, -4)$ א. $(3, 4)$ ב. $(7, 15)$ 20. א. משיקים ב. נחתכים ג. משיקים ד. זורים ה. זורים

21. א. $k = 15$ או $k = -25$ ב. $-25 < k < 15$ ג. $k > 15$ או $k < -25$

22. א. $k = 10$ או $k = -10$ ב. $-10 < k < 10$ ג. $k > 10$ או $k < -10$ 23. $(-2.4, 0.8)$

24. $(-1, -1)$ ו- $(3, -5)$ 25. $3x - 4y - 26 = 0$ 26. א. $(4, -1)$ ו- $(-3, 6)$ ב. $7\sqrt{2}$

27. א. $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$ ב. $y = -\frac{1}{3}x + 1\frac{2}{3}$

28. א. $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 10.4$ ב. $\frac{2\sqrt{195}}{5} \approx 5.59$

29. $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 16$ או $(x - 3)^2 + (y - 9)^2 = 16$

30. א. $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$ ב. $(1, 3), (4, 2), (3, -1)$ א. $(1, -1)$ ב. 12.4 ג. $\frac{20\sqrt{65}}{13} \approx$

32. א. $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 20$ ב. $(8, 7)$ ג. $\frac{1}{3}$

33. א. $(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 25$ ב. $(6, 8), (10, 6), (6, -2)$ ו- $(2, 0)$

34. א. $(x - 7)^2 + (y - 1)^2 = 80$ ב. 96 א. $m = -\frac{1}{3}$ ב. $m = 1$ ג. $m = 0$

36. א. $m < 4$ ב. $m > 4$ ג. $m = 4$ 37. $(9, -20)$ ו- $(-10.6, 19.2)$

38. א. $\left(\frac{3}{2-m}, \frac{3m}{2-m}\right)$ ב. $m = 2$ (המשמעות הגיאומטרית היא שעבור $m = 2$ הישר הנתון $y = mx$

מקביל לאנך האמצעי למיתר AB ולכן לא יכול לעבור במרכז של המעגל ש- AB הוא מיתר (ב).

$$y = mx + m \text{ היתר הנתון } m = \frac{1}{2} \text{ (המשמעות הגיאומטרית היא שעבור } m = \frac{1}{2} \text{ ב. } \left(\frac{7-2m}{2m-1}, \frac{6m}{2m-1} \right) \text{ א. 39)}$$

מקביל לאנך האמצעי למיתר AB ולכן לא יכול לעבור במרכז של המעגל ש- AB הוא מיתר (ב).

$$(x-6)^2 + (y+2)^2 = 36 \text{ .40}$$

$$(x+2)^2 + (y+8)^2 = 64 \text{ .42} \text{ . } (x+3)^2 + (y+7)^2 = 49 \text{ או } (x+3)^2 + (y-7)^2 = 49 \text{ .41}$$

$$(x+6)^2 + (y+6)^2 = 36 \text{ .ג } (x-3)^2 + (y-3)^2 = 9 \text{ .ב } (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1 \text{ .א.43}$$

$$(x-10)^2 + (y-10)^2 = 100 \text{ .44} \text{ . } (x+5)^2 + (y-5)^2 = 25 \text{ .ד.43}$$

$$(x+10)^2 + (y+10)^2 = 100 \text{ , } (x+10)^2 + (y-10)^2 = 100 \text{ , } (x-10)^2 + (y+10)^2 = 100$$

$$.33.69^\circ \text{ .ג } .192 \text{ .ב } .(x-15)^2 + (y+8)^2 = 64 \text{ או } (x+9)^2 + (y-8)^2 = 64 \text{ .א.45}$$

$$.(x-7)^2 + (y-5)^2 = 25 \text{ .47} \text{ . } (x+5)^2 + (y+3)^2 = 25 \text{ .46}$$

$$.(x+3)^2 + (y+2)^2 = 36 \text{ .49} \text{ . } (x+10)^2 + (y-10)^2 = 100 \text{ או } (x+2)^2 + (y-2)^2 = 4 \text{ .48}$$

$$. (x+3)^2 + (y-7)^2 = 9 \text{ או } (x-3)^2 + (y-7)^2 = 9 \text{ .50}$$

$$. (x+6)^2 + (y+6)^2 = 36 \text{ או } (x+2)^2 + (y-2)^2 = 4 \text{ .51}$$

$$. (x-4)^2 + (y+4)^2 = 16 \text{ או } (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4 \text{ .52}$$

$$3x - 2y - 47 = 0 \text{ .ג } -x + y - 11 = 0 \text{ .ב } .3x + y - 15 = 0 \text{ .א.53}$$

$$.4x - 3y - 25 = 0 \text{ .ה } -3x + 4y - 47 = 0 \text{ .ד}$$

$$.y = -\frac{2}{3}x - 8\frac{2}{3} \text{ ו- } y = 1.5x - 13 \text{ .א.55} \text{ . } (8, -7) \text{ .54} \text{ .ב } \text{ ריבוע.}$$

$$.4x + 3y - 50 = 0 \text{ ו- } 3x + 4y + 50 = 0 \text{ .א.57} \text{ . } \frac{AC}{AB} = \frac{3}{8} \text{ .ב } .3x + 4y - 24 = 0 \text{ .א.56}$$

$$.12 \text{ .ב } (x-7)^2 + (y-3)^2 = 20 \text{ .א.58} \text{ . } \sphericalangle A = 81.87^\circ \text{ , } \sphericalangle B = 81.87^\circ \text{ , } \sphericalangle M = 16.26^\circ$$

$$.3x + y + 8 = 0 \text{ .ב } (x-4)^2 + y^2 = 40 \text{ .א.59}$$

$$.4 \text{ .63} \text{ . } 2 \text{ .62} \text{ . } \sqrt{5} \text{ .61} \text{ . } -3x + 4y + 80 = 0 \text{ ו- } -3x + 4y + 30 = 0 \text{ .60}$$

$$.y = -2x + 20 \text{ .ב } .(8,4) \text{ .א.65} \text{ . } t = -8 \text{ .ב } .k = -7 \text{ .א.64}$$

$$. \text{ .ב } .-3x + 4y = 0 \text{ .א.68} \text{ . } 20 \text{ .ב } .(0, -3) \text{ .א.67} \text{ . } x = 5, -3x + 4y - 9 = 0 \text{ .ג } .(5,6) \text{ .ב.66}$$

$$. (3,4) \text{ .ב } .5 \text{ .א.69} \text{ . } (x-14)^2 + (y+2)^2 = 100 \text{ , } (x-5)^2 + (y-10)^2 = 25$$

$$. (5.4,7.2) \text{ .ב } .9 \text{ .א.72} \text{ . } (1.2,1.6) \text{ .ב } .(3,4) \text{ .א.71} \text{ . } x^2 + (y-5)^2 = 1 \text{ .ב } .x^2 + (y+5)^2 = 81 \text{ .א.70}$$

$$. -24x + 7y = 0 \text{ ו- } 7x + 24y - 625 = 0 \text{ .ג } .k = -624 \text{ .ב } .(7,24) \text{ .א.73} \text{ . } 3x + 4y - 45 = 0 \text{ .ג}$$

$$. -33x + 56y - 923 = 0 \text{ .ב } .(11.4,23.2) \text{ .א.74}$$

$$.x^2 + y^2 = 441 \text{ (2)} \text{ . } x^2 + y^2 = 25 \text{ (1)} \text{ .ב } .k = -105 \text{ .א.75}$$

התנאים שמשוואה ממעלה שנייה מייצגת מעגל.

כדי שמשוואה מהצורה $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ תייצג מעגל:

- $A = B$ כלומר המקדמים של x^2 ו- y^2 צריכים להיות שווים (ושונים מאפס $A = B \neq 0$).
- אחרי סידור המשוואה (באמצעות חלוקה ב- A והשלמה לריבוע) צריך לוודא שהמספר שבאגף ימין חיובי

1. אילו מהמשוואות הבאות מייצגות מעגל:

א. $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 10 = 0$ ב. $2x^2 + y^2 - x + 2y + 10 = 0$
ג. $7x^2 + 7y^2 - 14x + 7 = 0$ ד. $-x^2 - y^2 - 6x + 10y - 40 = 0$
ה. $x^2 - y^2 - 6x + 1 = 0$ ו. $3x^2 + 3y^2 - 9x + 15y + 24 = 0$

2. עבור אילו ערכי k המשוואה $2x^2 + 2y^2 - 4kx + 8(k - 2)y + 10k^2 = 0$ מייצגת מעגל?
3. עבור אילו ערכי k המשוואה $3x^2 + 3y^2 - 12kx - 24k = 0$ מייצגת מעגל?
4. עבור אילו ערכי k המשוואה $5x^2 + 5y^2 - 10(k - 1)x + 30y + 10k^2 + 10 = 0$ מייצגת מעגל?
5. עבור אילו ערכי k המשוואה $x^2 + y^2 - (2k - 8)x - (2k - 4)y + 2 = 0$ מייצגת מעגל?
6. עבור אילו ערכי k המשוואה $3x^2 + 3y^2 - (6k - 24)x - 6ky - 3 = 0$ מייצגת מעגל? מצאו את הרדיוס הקטן ביותר האפשרי.

תשובות

1. המשוואות המייצגות מעגל הן: א' ו-ו'.
2. $k < 1$.
3. $k > 0$ או $k < -2$.
4. $k < 2$.
5. $-4 < k < 3.5$.
6. כל k . הרדיוס הקטן ביותר הוא 3.

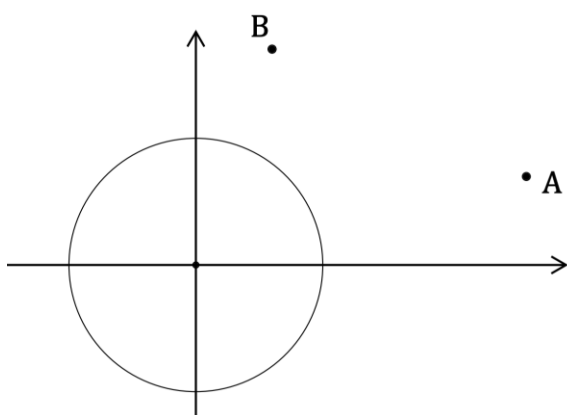
שאלות נוספות

1. נתונות שתי נקודות $A(13,3.5)$ ו- $B(3,8.5)$.

א. מצאו את משוואת האנג' האמצעי לקטע AB .

ב. נתון מעגל קנוני שרדיוסו 5. מצאו 2 נקודות על

המעגל המרוחקות במידה שווה מנקודות A ו- B .



תשובות

1. א. $y = 2x - 10$. ב. $(5,0)$ ו- $(3, -4)$.