מספרים מרוכבים

ההגדרה ופעולות החשבון במספרים מרוכבים

i הוא המספר שאם נעלה אותו בריבוע נקבל -1

$i^2 = -1$

מצאו את פתרונות המשוואות הבאות (מצאו את z)

1. $z^2+4=0$
2. $z^2+100=0$
3. $z^2+7=0$
4. $z^2-2z+5=0$
5. $z^2-6z+25=0$
6. $5z^2+2z+1=0$
7. $z^2+z+1=0$
8. $z^2+\sqrt{3}z+1=0$
9. $z^3-4z^2+5z=0$
10. $z^3-6z^2+13z=0$
11. $z^3+z=0$
12. $(z-1)(z^2+\frac{1}{4})=0$
13. $(z+1)(2z^2+1)=0$
14. $z^4+5z^2+4=0$
15. $z^4+z^2-2=0$

נתון מספר מרוכב $z=x+yi$ כאשר x,y מספרים ממשיים

נהוג לסמן ב-$Im(z)$ את המקדם של i כלומר $Im(z)=y$

נהוג לסמן ב-$Re(z)$ את החלק הממשי $Re(z)=x$

נאמר ש-z הוא מספר ממשי אם מתקיים: $Im(z)=0$ (כלומר אם $y=0$)

נאמר ש-z הוא מספר מדומה אם מתקיים: $Re(z)=0$ (כלומר אם $x=0$)

16. לפניכם מספרים מרוכבים z.

א. מי מהמספרים הם:
1. ממשים 2. מדומים 3. לא ממשיים ולא מדומים?

ב. עבור כל אחד מהם רשמו מהו:
1. $Im(z)$ 2. $Re(z)$

א. $z=3$ ב. $z=2i$ ג. $z=-\sqrt{2}$ ד. $z=\sqrt{2}i$

ה. $z=i^2$ ו. $z=1+i$ ז. $z=\sqrt{3}-2i$ ח. $z=i^3$

ט. $z=(2i)\cdot(3i)$ י. $z=i\cdot(4+3i)$ יא. $z=(2+3i)(2-3i)$ יב. $z=(2+3i)^2$

יג. $z=1$ יד. $z=0$ טו. $z=i$

17. נתון המספר המרוכב z. $z=a-3+ai$ כאשר a הוא מספר ממשי. מצא את a ואת z אם:

א. z מספר מדומה.

ב. z מספר ממשי.

למשוואה מהצורה $z^2 = a$ כאשר a מספר ממשי חיובי יש שני פתרונות והם $z = \pm\sqrt{a}$

למשוואה מהצורה $z^2 = -a$ כאשר a מספר ממשי חיובי יש שני פתרונות והם $z = \pm\sqrt{a}i$

18. למשוואה $z^2 - a = 0$ יש שני פתרונות מדומים (a ממשי) קבע האם:
    א. $a < 0$.
    ב. $a > 0$.
19. למשוואה $z^2 + b = 0$ יש שני פתרונות ממשים (b ממשי) קבע האם:
    א. $b < 0$.
    ב. $b > 0$.
20. למשוואה $(z-i)(az^2+b) = 0$ יש 3 פתרונות מדומים (b, a ממשיים) קבע האם:
    א. $a \cdot b > 0$
    ב. $a \cdot b < 0$

21. הביעו ללא חזקות את הביטויים הבאים:

כתיב חזקות	i	i^2	i^3	i^4	i^5	i^6	i^7	i^8	i^9
ללא חזקה	i								

כתיב חזקות	i^{10}	i^{11}	i^{12}	i^{13}	i^{14}	i^{15}	i^{16}	i^{17}	i^{18}
ללא חזקה									

22. הביעו ללא חזקות את הביטויים הבאים:

כתיב חזקות	i^{2000}	i^{2019}	i^{2026}	i^{3031}
ללא חזקה				

23. הוכיחו שלכל n טבעי מתקיים:

א. $i^{4n} = 1$ ב. $i^{4n+1} = i$ ג. $i^{4n+2} = -1$ ד. $i^{4n+3} = -i$

24. לפניכם מספרים מרוכבים. למספר המרוכב Z_A מתאימה הנקודה A במישור גאוס, למספר המרוכב Z_B מתאימה הנקודה B במישור גאוס וכך הלאה. מקמו את הנקודות C , B , A וכן הלאה במישור גאוס.

א. $z_A = 2 + 4i$ ב. $z_B = -3 + 4i$ ג. $z_C = -5 - 2i$ ד. $z_D = 1 - 4i$

ה. $z_E = 3$ ו. $z_F = 2i$ ז. $z_G = -2$ ח. $z_H = -i$

ט. $z_I = i^2$ י. $z_J = i^3$ יא. $z_K = i \cdot (1 - 3i)$ יב. $z_L = (-i) \cdot (3i)$

יג. $z_M = (1 + i)^2$ יד. $z_N = 0$ טו. $z_O = (2 + 3i) + (2 - 3i)$ טז. $(1 + i)^2$

נתון מספר מרוכב $z = x + yi$ כאשר x, y מספרים ממשיים

המספר הצמוד של z מסומן כך $\overline{z}$ והגדרתו היא: $\overline{z} = x - yi$

25. עבור כל מספר מרוכב z כתבו מהו $\bar{z}$ (המספר הצמוד).

א. $z = 1 + 4i$
ב. $z = -3 - 5i$
ג. $z = -1 - 2i$
ד. $z = 1 + i$
ה. $z = 3$
ו. $z = 2i$
ז. $z = -2$
ח. $z = -i$
ט. $z = i^2$
י. $z = i^3$
יא. $z = i \cdot (2 + 5i)$
יב. $z = (-i) \cdot (3i)$
יג. $z = (1 + 3i)^2$
יד. $z = 0$
טו. $z = (2 + 3i) \cdot (2 - 3i)$
טז. $z = (1 - 2i)^2$

26. לפניכם מספרים מרוכבים. למספר המרוכב Z_A מתאימה הנקודה A במישור גאוס, למספר המרוכב Z_B מתאימה הנקודה B במישור גאוס וכך הלאה. הציגו את המספרים במבנה: $a + bi$ כאשר a ו-b ממשיים ומקמו את הנקודות A , B , C וכן הלאה במישור גאוס.
<u>אין צורך למקם את נקודה N</u>

א. $z_A = \frac{3+7i}{-2+5i}$
ב. $z_B = \frac{-11-2i}{2-i}$
ג. $z_C = \frac{5}{-1+2i}$
ד. $z_E = \frac{23-41i}{5-3i}$
ה. $z_F = \frac{10}{i-3}$
ו. $z_G = \frac{3-2i}{i}$
ז. $z_I = \frac{106i}{9-5i}$
ח. $z_J = \frac{-19+9i}{-3i+2}$
ט. $z_K = \frac{5}{i}$
י. $z_M = 1 - \frac{1-i}{1+i}$
יא. $z_N = -\frac{i}{1+i} + \frac{i}{3+i}$
יב. $z_O = \frac{i}{-1+i} - \frac{i}{(1+i)^2}$

27. פתרו את המשוואות הבאות:

א. $(1 + i)z^2 + 2z + 1 - i = 0$
ב. $(1 - 2i)z^2 - 4iz + 2i + 1 = 0$
ג. $(1 - 3i)z^2 - 3iz + 1 + 3i = 0$
ד. $(-2 + i)z^2 + (-2 + 2i)z - 2 = 0$

<u>יחידות ההצגה</u>

אם נתונים שני מספרים $z_1 = x + yi$ ו-$z_2 = a + bi$ ונתון: $z_1 = z_2$ אז:

$$\begin{cases} a = x \\ b = i \end{cases}$$

(x, y, a, b מספרים ממשיים)

28. פתרו את התרגילים הבאים (מצאו את z). פתרו כל תרגיל ב-2 שיטות . 1) עם יחידות ההצגה 2) ללא שימוש ביחידות ההצגה והשוו את התשובות .

א. $i + iz = 4$
ב. $-2 + iz = z + 3i$
ג. $5iz + 67 = 57i - 9z$

29. פתרו את התרגילים הבאים ללא שימוש ביחידות ההצגה (מצאו את z).

א. $\frac{41+z+5i}{z+1} = 3i + 5$
ב. $\frac{1+zi}{-3+z} = \frac{1}{2}$
ג. $1 + 3z = \frac{8-2z}{i}$
ד. $\frac{3+zi}{-2+z} = \frac{4}{2+i}$

30. הוכיחו את הזהויות הבאות : (לאחר תרגיל זה תוכלו להשתמש בהם לצורככם ללא הוכחתם).

א. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ ב. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ ג. $\overline{z^2} = \overline{z}^2$

ד. $\overline{\overline{Z}} = Z$ ה. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ ו. $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

31. פתרו את התרגילים הבאים על ידי שימוש ביחידות ההצגה (מצאו את z).

א. $iz + 3\overline{z} = 14 + 2i$ ב. $\overline{2iz} - 5z = \overline{-13 + i}$ ג. $2z\overline{z} - 3z = 16 - 3i$

ד. $z^2 = \overline{z}$ ה. $\overline{z\overline{z}} + z^2 = 2 + z - \overline{z}$ ו. $\overline{z^2} = z$

ז. $z^2 + 4\overline{z} - 11 = 0$

נתון מספר מרוכב $z = x + yi$ כאשר x, y מספרים ממשיים ערכו המוחלט של z (מסומן כך : $\|z\|$) הוא מרחק הנקודה המייצגת אותו במישור גאוס מראשית הצירים והוא נתון עי הנוסחה הבאה : $\|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

32. עבור כל מספר z שלפניכם מצאו את $|z|$

א. $z = -3 + 4i$ ב. $z = 1 - \sqrt{3}i$ ג. $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

ד. $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ה. $z = 2$ ו. $z = 2i$

ז. $z = -1$ ח. $z = -\sqrt{3}i$ ט. $z = 0$

33. z הוא מספר מרוכב כלשהו. בכל אחת מהמשוואות שלפניכם מצאו אותו.

א. $z + |z| = 18 + 12i$ ב. $z^2 + |z|^2 = 18 + 24i$ ג. $z^2 + 2z - |z|^2 = 8i - 2\overline{z}$

ד. $2iz + \overline{z}^2 + |z|^2 = 0$ ה. $3|z|i + 2\overline{z} = 12 + 46i$ ו. $|z|i + 2\overline{z} = \sqrt{3}$

34. למשוואה הבאה $|z + 3i| = |\overline{z} + i|$ יש אינסוף מספרים z המקיימים אותה.

א. שרטטו במישור גאוס את השרטוט המתאר את אינסוף הנקודות המתאימות לאינסוף המספרים המקיימים את המשוואה.

ב. מי מהמספרים הבאים מקיימים את המשוואה?

א. $-1 + i$

ב. $1 - i$

35. למשוואה הבאה $|z - 3| = |i\overline{z} + i|$ יש אינסוף מספרים z המקיימים אותה. שרטטו במישור גאוס את השרטוט המתאר את אינסוף הנקודות המתאימות לאינסוף המספרים המקיימים את המשוואה.

36. בתרגילים הבאים המספר z אינו ממשי ואינו מדומה. מצא אילו מהביטויים הבאים הם מספר ממשי ואילו מהם הם מספר מדומה.

א. $\bar{z}+z$ ב. $\bar{z}z$ ג. $\bar{z}-z$

ד. $\frac{\bar{z}-z}{\bar{z}+z}$ ה. $\frac{1}{\bar{z}}+\frac{1}{z}$ ו. $\frac{1}{\bar{z}}-\frac{1}{z}$

ז. $\frac{z}{\bar{z}}+\frac{\bar{z}}{z}$ ח. $(\bar{z}+z)^2$ ט. $\bar{z}^2-z^2$

37. w ו-z הם מספרים מרוכבים. פתרו את מערכות המשוואות הבאות (מצאו את w ו-z):

א. $\begin{cases} z=4-w-i \\ 3z-wi-1=0 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} 2z+wi=i \\ 3iz-2w=-2-2i \end{cases}$

ג. $\begin{cases} (1+i)z+(2+i)w=-3+9i \\ 3iz+(2+i)w=-7+7i \end{cases}$ ד. $\begin{cases} (1+5i)z-3w=-13+15i \\ (-1+i)z+3w=7-9i \end{cases}$

38. העזרו בזהויות המופיעות בתרגיל 30 ועבור כל צמד ביטויים הוכיחו שהם מהווים מספרים צמודים. ($z \neq 0$)

א. $2z-\bar{z}$ ו- $2\bar{z}-z$ ב. $(\bar{z})^2$ ו-z^2

ג. $i\,\bar{z}$ ו- $\frac{z}{i}$ ד. $\frac{\bar{z}}{z}$ ו- $\frac{z}{\bar{z}}$

ה. $\frac{3}{z}$ ו- $\frac{3}{\bar{z}}$ ו. $iz+\bar{z}$ ו- $z-i\bar{z}$

39. a הוא מספר ממשי. מצאו עבור אילו ערכי a יש למשוואות:

1) פתרון אחד 2) אף פתרון 3) אינסוף פתרונות

א. $3z-i=-1+ia\bar{z}$ ב. $a(3\bar{z}-1)=i(a-4z)$ ג. $z-ia\bar{z}=1+ia$

40. a הוא מספר ממשי. מצאו עבור אילו ערכי a יש למשוואות פתרון יחיד.

א. $z\bar{z}-z=ai^3$ ב. $4z\bar{z}-4ai=3a-4az$

<u>מציאת שורש של מספר מרוכב</u>

נתון מספר מרוכב $z=a+bi$ כאשר a,b מספרים ממשיים

אם נרצה לדעת מהו: $\sqrt{a+bi}$ (זה קורה לרוב כשאנו משתמשים בנוסחת השורשים) אז:

1. ניצור משוואה $\sqrt{a+bi}=x+yi$
2. נעלה את שני האגפים בריבוע ונקבל אחרי סידור $a+bi=x^2-y^2+2xyi$
3. נשתמש ביחידות ההצגה ונקבל מערכת משוואות: $\begin{cases} x^2-y^2=a \\ 2xy=b \end{cases}$
4. אחרי שנפתור את מערכת המשוואות יהיו לנו שני צמדים של x ו-y שיתאימו לשני מספרים נגדיים $x+yi$ שמהווים, כזכור את השורש של $a+bi$

41. חשבו את השורשים הבאים:

א. $\sqrt{7-24i}$ ב. $\sqrt{2i}$ ג. $\sqrt{-3+4i}$

ד. $\sqrt{-i}$ ה. $\sqrt{-11-60i}$

42. פתרו את המשוואות הריבועיות הבאות (יישום של חישוב שורש של מספר מרוכב).

א. $z^2-2z+8i+1=0$ ב. $-z^2+(3-2i)z-5+i=0$

ג. $z^2-(7-i)z+14-5i=0$ ד. $z^2+(1-2i)z-2i=0$

ה. $z^2-(3+i)z+2+2i=0$ ו. $(-1+3i)z^2-(7i-5)z-2+4i=0$

ז. $(1-i)z^2-(i-5)z+6-4i=0$

43. אחד מפתרונות המשוואה $(2+i)z^2-mz-5i=0$ הוא $z=-i$ מצא את m ואת הפתרון השני של המשוואה.

44. אחד מפתרונות המשוואה $(3+i)z^2-(15-5i)z-m=0$ הוא $z=1-2i$ מצא את m ואת הפתרון השני של המשוואה.

45. נתונה המשוואה $(ni+6)z^2+5(n+2i)z-25=0$. מצא עבור אילו ערכים של n למשוואה יש פתרון יחיד. מצאו את הפתרון היחיד עבור כל ערך של n.

46. נתונה המשוואה $(ni+1)z^2+3(n+i)z+9=0$. מצא עבור אילו ערכים של n למשוואה יש פתרון יחיד. מצאו את הפתרון היחיד עבור כל ערך של n.

47. נתונה המשוואה $(ni+1)z^2+3(n-i)z+9=0$. מצא עבור אילו ערכים של n למשוואה יש פתרון יחיד. מצאו את הפתרון היחיד עבור כל ערך של n.

48. נתונה המשוואה $(n^2+4)z^2+2(n+2i)z-4=0$. מצא עבור אילו ערכים של n למשוואה יש פתרון יחיד. מצאו את הפתרון היחיד עבור כל ערך של n.

49. פתור את מערכות המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} z_1+z_2=4+7i \\ z_1z_2=-7+11i \end{cases}$

ב. $\begin{cases} z_1+z_2=9-i \\ z_1z_2=16+3i \end{cases}$

50. נתונה המשוואה $z-|z|-a+bi=0$ כאשר a ו-b הם מספרים ממשים שונים מ-0.

א. הביעו את z באמצעות a ו-b

ב. נתון שפתרון המשוואה הנתונה מקיים את המשוואה $(1-i)z=-31+17i$. מצאו את a ו-b

51. נתונה המשוואה $z^2+|z|^2+ai=2b^2$ כאשר a ו-b הם מספרים ממשים שונים מ-0.

א. הביעו את פתרונות המשוואה באמצעות a ו-b

ב. מצאו את a ו-b אם נתון שמכפלת הפתרונות היא $-3+4i$

פתרונות

1. $z=\pm 2i$
2. $z=\pm 10i$
3. $z=\pm\sqrt{7}i$
4. $z=1\pm 2i$
5. $z=3\pm 4i$
6. $z=-\frac{1}{5}\pm\frac{2}{5}i$
7. $z=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$
8. $z=-\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}i$
9. $z=2\pm i\,,z=0$
10. $z=3\pm 2i\,,z=0$
11. $z=\pm i\,,z=0$
12. $z=\pm\frac{1}{2}i\,,z=1$
13. $z=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i\,,z=-1$
14. $z=\pm i\,,z=\pm 2i$
15. $z=\pm\sqrt{2}i\,,z=\pm 1$

.16

א. ממשי
$Re(z)=3$
$Im(z)=0$

ב. מדומה
$Re(z)=0$
$Im(z)=2$

ג. ממשי
$Re(z)=-\sqrt{2}$
$Im(z)=0$

ד. מדומה
$Re(z)=0$
$Im(z)=\sqrt{2}$

ה. ממשי
$Re(z)=-1$
$Im(z)=0$

ו. לא ממשי ולא מדומה
$Re(z)=1$
$Im(z)=1$

ז. לא ממשי ולא מדומה
$Re(z)=\sqrt{3}$
$Im(z)=-2$

ח. מדומה
$Re(z)=0$
$Im(z)=-1$

ט. ממשי
$Re(z)=-6$
$Im(z)=0$

י. לא ממשי ולא מדומה
$Re(z)=-3$
$Im(z)=4$

יא. ממשי
$Re(z)=13$
$Im(z)=0$

יב. לא ממשי ולא מדומה
$Re(z)=-5$
$Im(z)=12$

יג. ממשי
$Re(z)=1$
$Im(z)=0$

יד. גם ממשי וגם מדומה
$Re(z)=0$
$Im(z)=0$

טו. מדומה
$Re(z)=0$
$Im(z)=1$

17. פתרון:
ב. $z=3i\,,a=3$
ג. $z=-3\,,a=0$.

18. התשובה היא $a<0$
19. התשובה היא $b<0$
20. התשובה היא $a\cdot b>0$

.21

כתיב חזקות	i	i^2	i^3	i^4	i^5	i^6	i^7	i^8	i^9
ללא חזקה	i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$	1	i

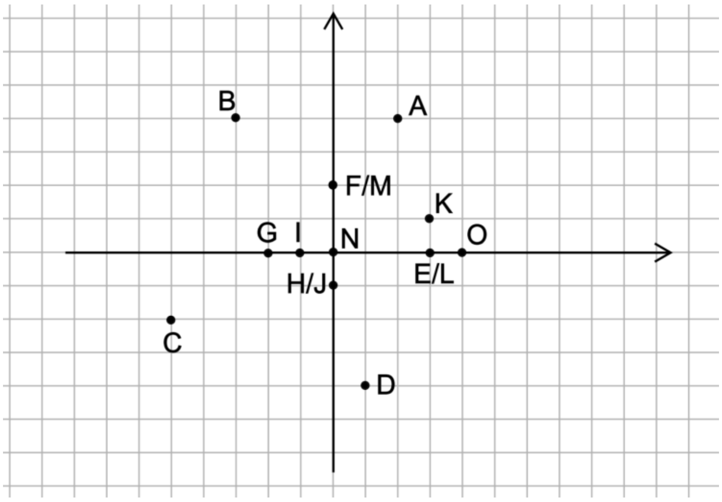
כתיב חזקות	i^{10}	i^{11}	i^{12}	i^{13}	i^{14}	i^{15}	i^{16}	i^{17}	i^{18}
ללא חזקה	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$	1	i	-1

.22

כתיב חזקות	i^{2000}	i^{2019}	i^{2026}	i^{3031}
ללא חזקה	1	$-i$	-1	$-i$

23. הוכחה

24.



25.

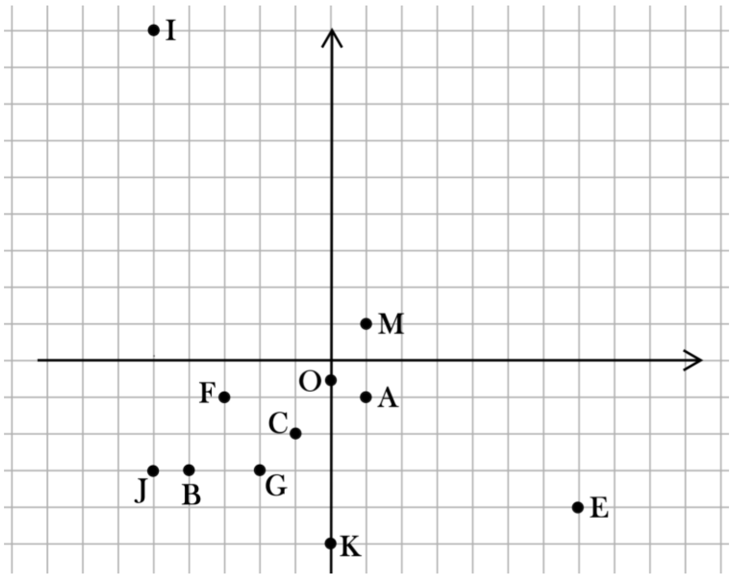
א. $z=1-4i$ ב. $z=-3+5i$ ג. $z=-1+2i$ ד. $z=1-i$

ה. $z=3$ ו. $z=-2i$ ז. $z=-2$ ח. $z=i$

ט. $z=-1$ י. $z=i$ יא. $z=-5-2i$ יב. $z=3$

יג. $z=-8-6i$ יד. $z=0$ טו. $z=13$ טז. $z=-3+4i$

26.



27.

א. $z_1=-1\,, z_2=i$ ב. $z_1=-2+i\,, z_2=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$

ג. $z_1=\frac{3}{5}-\frac{1}{5}i\,, z_2=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$ ד. $z_1=-\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i\,, z_2=-1+i$

.28

א. $z=-1-4i$ ב. $z=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$ ג. $z=-3+8i$

.29

א. $z=6-4i$ ב. $z=1+2i$ ג. $z=1-2i$

ד. $z=\frac{64}{29}+\frac{43}{29}i$

30. הוכחה
.31

א. $z=5+i$ ב. $z=3-i$ ג. $z_1=-2+i$, $z_2=3.5+i$

ד. $z_2=1\ ,\ z_1=0$, $z_{3,4}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ה. $z=-1$, $z=1+yi$ (y ממשי) ו. $z_2=1\ ,\ z_1=0$, $z_{3,4}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$

ז. $z_2=2+i\ ,z_1=2-i$, $z_{3,4}=-2\pm\sqrt{15}$

.32

א. $|z|=5$ ב. $|z|=2$ ג. $|z|=1$

ד. $|z|=1$ ה. $|z|=2$ ו. $|z|=2$

ז. $|z|=1$ ח. $|z|=\sqrt{3}$ ט. $|z|=0$

.33

א. $z=5+12i$ ב. $z_1=3+4i$, $z_2=-3-4i$ ג. $z=2+2i$

ד. $z_1=0$, $z_2=1+i$, $z_3=-1+i$ ה. $z_1=6-8i$, $z_2=6+44.8i$ ו. $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

34. א. שרטוט של הישר $y=-1$ ב. $-1+i$
35. ב. שרטוט של הישר $x=1$
.36

א. ממשי ב. ממשי ג. מדומה

ד. מדומה ה. ממשי ו. מדומה

ז. ממשי ח. ממשי ט. מדומה

.37

א. $z = 1 + i \,, w = 3 - 2i$ ב. $z = 2 \,, w = 1 + 4i$

ג. $z = 2i \,, w = 1 + 3i$ ד. $z = 1 + i \,, w = 3 - 3i$

.38 הוכחה

.39

א. 1) $a \neq \pm 3$
2) $a = -3$
3) $a = 3$

ב. 1) $a \neq \pm \frac{4}{3}$
2) $a = -\frac{4}{3}$
3) $a = \frac{4}{3}$

ג. 1) $a \neq \pm 1$
2) $a = \pm 1$
3) לא קיים ערך a עבור למשוואה יש אינסוף פתרונות

.40

א. $a = \pm \frac{1}{2}$ ב. $a = 0,1,-4$

.41

א. $\pm(4 - 3i)$ ב. $\pm(1 + i)$ ג. $\pm(1 + 2i)$

ד. $\pm(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i)$ ה. $\pm(5 - 6i)$

.42

א. $z_1 = 1 + 2i \,, z_2 = 3 - 2i$ ב. $z_1 = 1 + i \,, z_2 = 2 - 3i$

ג. $z_1 = 4 + i \,, z_2 = 3 - 2i$ ד. $z_1 = -1 \,, z_2 = 2i$

ה. $z_1 = 2 \,, z_2 = 1 + i$ ו. $z_1 = 2 + i \,, z_2 = \frac{3}{5} - \frac{1}{5} i$

ז. $z_1 = -1 + i \,, z_2 = -2 - 3i$

.43 $z = 2 - i \,, m = 6 - 2i$

.44 $z = 3 - i \,, m = -10 + 20i$

.45 $z = -2.5i \,, n = 2i$ (משוואה ממעלה שנייה)
$z = 1.25i \,, n = -10i$ (משוואה ממעלה שנייה)
$z = -\frac{5}{8} i \,, n = 6i$ (משוואה ממעלה ראשונה)

.46 $z = -1.5 + 1.5i \,, n = 2 + i$ (משוואה ממעלה שנייה)
$z = 1.5 + 1.5i \,, n = -2 + i$ (משוואה ממעלה שנייה)
$z = 1.5i \,, n = i$ (משוואה ממעלה ראשונה)

.47 $z = 1.5i \,, n = 5i$ (משוואה ממעלה שנייה)

.48 $z = -1.25i \,, n = 1.2i$ (משוואה ממעלה שנייה)
$z = -\frac{1}{2} i \,, n = 2i$ (משוואה ממעלה ראשונה)

49. פתרון

א. $z_1=3+5i\,,z_2=1+2i$ או $z_1=1+2i\,,z_2=3+5i$

ב. $z_1=2+i\,,z_2=7-2i$ או $z_1=7-2i\,,z_2=2+i$

50. א) $z=\frac{a^2-b^2}{2a}-bi$ ב) $b=7, a=-49$

51. א) $z_1=b-\frac{a}{2b}i\,,\ z_2=-b+\frac{a}{2b}i$ ב) $b=2, a=4$ או $b=-2, a=4$

הצגה קוטבית

כל מספר מרוכב ניתן להצגה באופן הבא:

$z=a+bi$ כאשר a ו-b ממשיים (הצגה אלגברית) או כך:

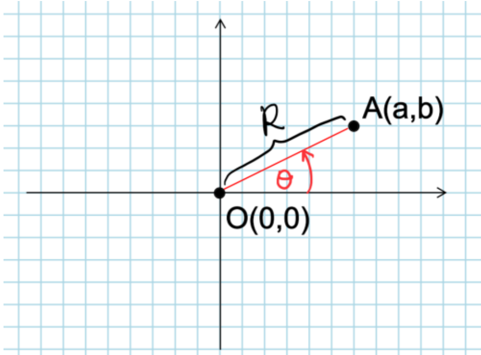
$z=Rcis\theta$ כאשר $R\geq 0$ ו-θ ו-R ממשיים (הצגה קוטבית).

$cis\theta$ הוא קיצור של $cos\theta+isin\theta$.

אם A היא נקודה המייצגת את z במישור גאוס ו-O היא ראשית הצירים אז:

R הוא המרחק של הנקודה A מראשית הצירים O – כלומר אורך הקטע AO. מסמנים אותו גם ב-$|z|$

$\boldsymbol{\theta}$ היא הזווית שנוצרת בין הכיוון החיובי של ציר האיקס לבין AO נגד כיוון השעון.



נוסחאות מעבר מהצגה אלגברית $z=a+bi$ להצגה קוטבית $z=Rcis\theta$

- $R=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$
- $tan\theta=\frac{b}{a}$ (<u>**אם $a<0$ מוסיפים לתוצאה $180°$**</u>).

*חשוב: אם $a=0$ הנוסחה: $tan\theta=\frac{b}{a}$ לא עובדת ואז עובדים לפי זה: $\theta=\begin{cases}90° & b>0 \text{ אם} \\ 270° & b<0 \text{ אם}\end{cases}$

1. כתבו את המספרים המרוכבים הבאים (הנתונים בהצגה אלגברית) בהצגה קוטבית.

א. $z=3$ ב. $z=i$ ג. $z=-3i$

ד. $z=1+i$ ה. $z=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ ו. $z=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$

ז. $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ח. $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ט. $z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

י. $z=-\frac{1}{2}$ יא. $z=1-\sqrt{3}$ יב. $z=\sqrt{3}+i$

יג. $z=1$

יד. $z=-i$

טו. $z=2\sqrt{3}i$

טז. $z=-4-3i$

יז. $z=-3+4i$

יח. $z=5-12i$

יט. $z=-2-3i$

כ. $z=2-i$

כא. $\sqrt{2}-\sqrt{6}+\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)i$

כב. $-\sqrt{2-\sqrt{2}}-\sqrt{2+\sqrt{2}}i$

2. כתבו את המספרים המרוכבים הבאים (הנתונים בהצגה קוטבית) בהצגה אלגברית- עם שימוש במחשבון.

א. $z=2cis(30°)$

ב. $z=3cis(45°)$

ג. $z=cis(60°)$

ד. $z=\sqrt{3}cis(150°)$

ה. $z=4cis(120°)$

ו. $z=6cis(225°)$

3. כתבו את המספרים המרוכבים הבאים (הנתונים בהצגה קוטבית) בהצגה אלגברית- ללא שימוש במחשבון.

א. $z=2cis(0°)$

ב. $z=1cis(90°)$

ג. $z=2cis(-90°)$

ד. $z=2cis(180°)$

ה. $z=\sqrt{3}cis(270°)$

ו. $z=cis(360°)$

<u>הכפלת מספרים מרוכבים בהצגה קוטבית</u>

אם נתונים שני מספרים $z_1=R_1cis\theta_1$, $z_2=R_2cis\theta_2$ אז מכפלתם $z_1\cdot z_2$ נתונה על ידי הקשר הבא:

$$\boxed{R_1cis\theta_1R_2cis\theta_2=R_1R_2cis(\theta_1+\theta_2)}$$

<u>חלוקת מספרים מרוכבים בהצגה קוטבית</u>

אם נתונים שני מספרים $z_1=R_1cis\theta_1$, $z_2=R_2cis\theta_2$ אז מנתם $z_1:z_2$ נתונה על ידי הקשר הבא:

$$\boxed{\frac{R_1cis\theta_1}{R_2cis\theta_2}=\frac{R_1}{R_2}cis(\theta_1-\theta_2)}$$

<u>שינוי הסימן המופיע לפני ההצגה הקוטבית</u>

$$\boxed{-Rcis\theta=Rcis(\theta+180°)}$$

<u>הסימון $arg()$</u>

אם $z=Rcis\theta$ כאשר $R>0$ ו- R,θ ממשיים אז $arg(z)=\theta$.

4. עבור כל אחד מהמספרים המרוכבים z הבאים רשמו מהו $arg(z)$ ומהו $|z|$.

א. $z=3cis(20°)$

ב. $z=-3cis(20°)$

ג. $z=2cis(-90°)$

ד. $z=cis(180°)$

ה. $z=2cis(45°)7cis(270°)$

ו. $z=\frac{12cis(180°)}{3cis(30°)}$

ז. $z = 2cis(45°)cis(15°)$ ח. $z = \frac{1cis(0°)}{3cis(20°)}$ ט. $z = \frac{1}{\sqrt{2}cis(-30°)}$

י. $z = \frac{i}{\sqrt{2}cis(-30°)}$ יא. $z = \frac{-1}{0.5cis(30°)}$ יב. $z = \frac{-2i}{0.5cis(30°)}$

<u>הצמוד בהצגה קוטבית (ראו סרטון)</u>

$$\overline{Rcis\theta} = Rcis(-\theta)$$

5. נתון $z = Rcis\theta$ $(R > 0)$. כתבו את ההצגה הקוטבית של המספרים הבאים.

א. $\frac{1}{z}$ ב. $-z$ ג. $\overline{z}$

ד. $\frac{1}{\overline{z}}$ ה. $z\overline{z}$ ו. $\frac{i}{z}$

ז. $-\frac{1}{z}$ ח. iz ט. $-i\overline{z}$

י. $|z|$ יא. $\frac{z}{2}+\frac{\overline{z}}{2}$ $(90° < \theta < 180°)$ יב. $\frac{z}{2}-\frac{\overline{z}}{2}$ $(90° < \theta < 180°)$

יג. $-\frac{i}{\overline{z}}$ יד. $\frac{z}{\overline{z}}$ טו. $-z^2$

6. נתון : $z = Rcis\theta = x + yi$ (θ, R, y, x מספרים ממשיים) הביעו את הביטויים הבאים באמצעות x ו-y

א. $Rcis(\theta + 720°)$ ב. $Rcis(360° - \theta)$ ג. $Rcis(180° + \theta)$

ד. $Rcis(\theta - 720°)$ ה. $Rcis(\theta + 90°)$ ו. $Rcis(90° - \theta)$

ז. $Rcis(270° - \theta)$ ח. $Rcis(270° + \theta)$ ט. $Rcis(-90° - \theta)$

י. $Rcis(135° - \theta)$ יא. $Rcis(45° + \theta)$ יב. $Rcis(60° - \theta)$

<u>העלאת מספר מרוכב בחזקת (מספר שלם) משפט דה מואבר</u>

$$\boxed{(Rcis\theta)^n = R^n cis(n\theta)}$$

7. פשטו את הביטויים הבאים על ידי שימוש במשפט דה מואבר.

א. $(3cis20°)^4$ ב. $3(cis20°)^4$ ג. $(cis40°)^4$

ד. $(\sqrt{2}cis80°)^{10}$ ה. $(\sqrt{2}cis45°)^5$ ו. $(2cis15°)^6$

ז. $(\sqrt{3}cis150°)^{15}$ ח. $(cis15°)^9$ ט. $(\sqrt{2}cis22.5°)^8$

י. $(2cis45°)^{-4}$ יא. $(2cis(-45°))^{-8}$ יב. $\frac{1}{(3cis200°)^5}$

יג. $(\frac{1}{cis2.5°})^{400}$ יד. $\frac{1}{(cis(-200°))^{-5}}$ טו. $(2cis5°)^4 \cdot (2cis15°)^2$

8. פשטו את הביטויים הבאים על ידי שימוש במשפט דה מואבר.

א. $(1+\sqrt{3}i)^4$ ב. $(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^{40}$ ג. $(-1+i)^6$

ד. $(-3+4i)^8$ ה. $(2-4i)^{10}$ ו. $(-1-2i)^8$

ז. $(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i)^{-20}$

9. הוכיחו כי עבור כל שני מספרים z_1 ו-z_2 מתקיים:

א. $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$

ב. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$ (עבור $z_2\neq 0$)

ג. $|z^n|=|z|^n$

10. א. אם נתון ש-$|z_1|=|z_2|$. האם זה אומר ש- $z_1=z_2$ או $z_1=-z_2$? הסבירו.

ב. אם נתון ש-$|z|=a$ ($a>0$) האם זה אומר ש- $z=a$ או $z=-a$? הסבירו.

11. נתון $z=Rcis\theta$ ($0°<\theta<360°$, $\theta\neq 270°$, $\theta\neq 90°$)

א. הוכיחו $\frac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}}=itan(\theta)$

ב. נתון $\frac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}}=\sqrt{3}i$ מצא את z אם נתון שהנקודה המייצגת אותו במישור גאוס נמצאת ברביע השלישי ושיעור ה-y שלה הוא $-\sqrt{3}$

12. $z=Rcis\theta$ כאשר $R>0$. נסמן $w=\frac{z}{\bar{z}}$

א. מצא את: $|w|$

ב. הביעו באמצעות θ את $arg(w)$

13. $z^2-2\sin(\theta)z+1=0$ θ פרמטר ממשי.

א. הביעו באמצעות θ את פתרונות המשוואה (z_1 ו- z_2)

ב. מצאו את θ אם נתון ש- $0°<\theta<180°$ ו- $|z_1-z_2|=1$.

14. z ו- w הם שני מספרים מרוכבים אשר הנקודות המייצגות אותם במישור גאוס נמצאות על מעגל היחידה.

א. הראו ש- $w\cdot\bar{w}=1$

ב. $\begin{cases} z+\bar{w}^3=0 \\ z\cdot w^5=1 \end{cases}$

פתרונות

1.

א. $z = 3cis(0°)$
ב. $z = 1cis(90°)$
ג. $z = 3cis(270°)$
ד. $z = \sqrt{2}cis(45°)$
ה. $z = 2cis(45°)$
ו. $z = 1cis(135°)$
ז. $z = 1cis(300°)$
ח. $z = 1cis(120°)$
ט. $z = 1cis(240°)$
י. $z = \frac{1}{2}cis(180°)$
יא. $z = (\sqrt{3} - 1)cis(180°)$
יב. $z = 2cis(30°)$
יג. $z = 1cis(0°)$
יד. $z = 1cis(270°)$
טו. $z = 2\sqrt{3}cis(90°)$
טז. $z = 5cis(216.87°)$
יז. $z = 5cis(126.87°)$
יח. $z = 13cis(292.62°)$
יט. $z = \sqrt{13}cis(236.31°)$
כ. $z = \sqrt{5}cis(333.43°)$
כא. $z = 4cis(105°)$
כב. $z = 4cis(247.5°)$

2.

א. $z = \sqrt{3} + i$
ב. $z = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$
ג. $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
ד. $z = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
ה. $z = -2 + 2\sqrt{3}i$
ו. $z = -3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i$

3.

א. $z = 2$
ב. $z = i$
ג. $z = -2i$
ד. $z = -2$
ה. $z = -\sqrt{3}i$
ו. $z = 1$

4.

א. $|z| = 3, arg(z) = 20°$
ב. $|z| = 3, arg(z) = 200°$
ג. $|z| = 2, arg(z) = -90°$
ד. $|z| = 1, arg(z) = 180°$
ה. $|z| = 14, arg(z) = 315°$
ו. $|z| = 4, arg(z) = 150°$
ז. $|z| = 2, arg(z) = 60°$
ח. $|z| = \frac{1}{3}, arg(z) = -20°$
ט. $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}, arg(z) = 30°$
י. $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}, arg(z) = 120°$
יא. $|z| = 2, arg(z) = 150°$
יב. $|z| = 4, arg(z) = 240°$

5.

א. $\frac{1}{R}cis(-\theta)$
ב. $Rcis(\theta + 180°)$
ג. $Rcis(-\theta)$
ד. $\frac{1}{R}cis(\theta)$
ה. $R^2cis(0°)$
ו. $\frac{1}{R}cis(90° - \theta)$
ז. $\frac{1}{R}cis(180° - \theta)$
ח. $Rcis(90° + \theta)$
ט. $Rcis(270° - \theta)$
י. $Rcis(0°)$
יא. $-Rcos(\theta)cis(180°)$
יב. $Rsin(\theta)cis(90°)$
יג. $\frac{1}{R}cis(270° + \theta)$
יד. $cis(2\theta)$
טו. $R^2cis(2\theta + 180°)$

6.

א. $x+yi$ ב. $x-yi$ ג. $-x-yi$

ד. $x+yi$ ה. $-y+xi$ ו. $y+xi$

ז. $-y-xi$ ח. $y-xi$ ט. $-y-xi$

י. $\frac{\sqrt{2}}{2}(y-x)+\frac{\sqrt{2}}{2}(y+x)i$

יא. $\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)+\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)i$

יב. $\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y\right)i$

7.

א. $81cis80°$ ב. $3cis80°$ ג. $cis160°$

ד. $32cis80°$ ה. $4\sqrt{2}cis225°$ ו. $64i$

ז. $2187\sqrt{3}i$ ח. $cis135°$ ט. -16

י. $-\frac{1}{16}$ יא. $\frac{1}{256}$ יב. $\frac{1}{256}cis80°$

יג. $cis80°$ יד. $cis80°$ טו. $64cis50°$

8.

א. $16cis240°$ ב. $cis240°$ ג. $8i$

ד. $5^8cis294.96°$ ה. $20^5cis85.65°$ ו. $625cis147.48°$

ז. -1

9. הוכחה
10. א. לא ב. לא
11. א. הוכחה. ב. $z=2cis240°$
12. א. $|w|=1$ ב. $arg(w)=2\theta$

13. א. $z_1=sin\theta+cos\theta i\ ,z_2=sin\theta-cos\theta i$ אפשר לרשום גם כך:
$z_1=cis(90°-\theta)\ ,z_2=cis(\theta-90°)$/
ב. $\theta=60°$ או $\theta=120°$.

14. א. הוכחה ב. $z=i\ ,w=-i$ או $z=-i\ ,w=i$

הוצאת שורש מסדר n ממספר מרוכב ותרגול צורות במישור גאוס

$$z^n = Rcis(\theta)$$

$$z_k = \sqrt[n]{R}cis\left(\frac{\theta}{n} + \frac{360°}{n}\right)$$

$$k = 0,1,\ldots,n-1$$

1. פתרו את המשוואות הבאות , שרטטו את הנקודות המייצגות את הפתרונות במישור גאוס וציינו את סוג המרובע המחבר את הנקודות הנ"ל.

א. $z^4 = 81cis120°$ ב. $z^3 = 64cis150°$ ג. $z^5 = -16 - 16\sqrt{3}i$

ד. $z^6 = -1$ ה. $z^8 = 1$

2. פתרו את המשוואות הבאות:

א. $z^9 = -512i$ ב. $z^9 = i$ ג. $z^3 + 125 = 0$

ד. $z^3 + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0$ ה. $z^6 - 64i = 0$ ו. $\frac{z^3}{4} = \sqrt{2}(1+i)$

ז. $16z^8 + 1 = 0$ ח. $z^4 = -4 + 3i$ ט. $z^5 = 5 - 12i$

י. $z^5 = (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)^3$ יא. $z^4 = (\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i)^{10}$ יב. $z^3 = (-2+2i)^2$

אם נתון ש- $Rcis(\theta) = rcis(\alpha)$ (כאשר R, r, θ, α מספרים ממשיים ו- $\boldsymbol{R \geq 0}$ ו-$\boldsymbol{r \geq 0}$)

אז מתקיים: $\begin{cases} R = r \\ \theta = \alpha + 360°k \end{cases}$

3. פתרו את המשוואות הבאות:

א. $z^4 = \bar{z}$ ב. $z^3 = -\bar{z}$ ג. $z^4 = \bar{z}^2$

ד. $z^3 = -4\bar{z}$ ה. $z^3 = -2\bar{z}^2$ ו. $-4z^5 = \bar{z}$

ז. $z^8 - 3^7\bar{z} = 0$

4. לפניכם טענות. עבור כל אחת מהן קבע האם היא נכונה או שגויה.
(w הוא מספר מרוכב קבוע ו-z הוא הנעלם)

א. פתרונות המשוואה $z^2 = w^2$ הם $z = \pm w$.

ב. פתרונות המשוואה $z^4 = w^4$ הם $z = \pm w$.

ג. אם a ממשי חיובי אז פתרונות המשוואה $z^6 = a^6$ הם $z = \pm a$.

מסקנה חשובה מהתרגיל הקודם:

אם $z^n = w^n$ (כאשר n זוגי) אז $z = \pm w$ הם רק 2 מתוך n הפתרונות של המשוואה

אם $z^n = w^n$ (כאשר n אי-זוגי) אז $z = w$ הוא רק 1 מתוך n הפתרונות של המשוואה

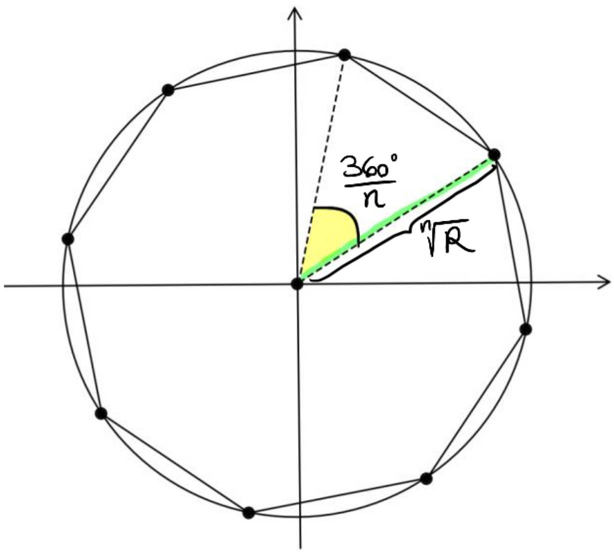
5. פתרו את המשוואות הבאות

א. $z^6 = 2^6$ ב. $z^4 = (\sqrt{2} - \sqrt{2}i)^4$ ג. $z^5 = (-\sqrt{3} + i)^5$

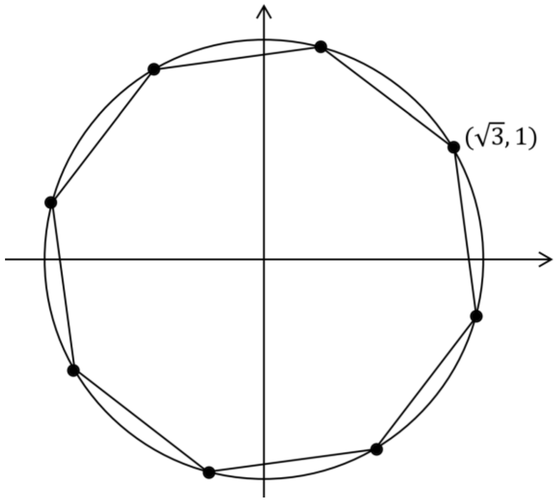
ד. $z^3 = i^3$ ה. $z^2 = i^2$ ו. $z^8 = i^8$

הצורה שיוצרות הנקודות במישור גאוס במתארות את פתרונות המשוואה $z^n = Rcis(\theta)$

למשוואה $z^n = Rcis(\theta)$ יש n פתרונות ($z_k = \sqrt[n]{R}cis\left(\frac{\theta}{n} + \frac{360°}{n}\right)$) אשר הנקודות המייצגות אותם במישור גאוס הן קודקודים של מצולע משוכלל בעל n צלעות החסום במעגל קנוני. רדיוסו של המעגל הוא $\sqrt[n]{R}$ והזווית הנוצרת בין כל שני קטעים המחברים את קודקודי המצולע עם מרכז המעגל היא $\frac{360°}{n}$.

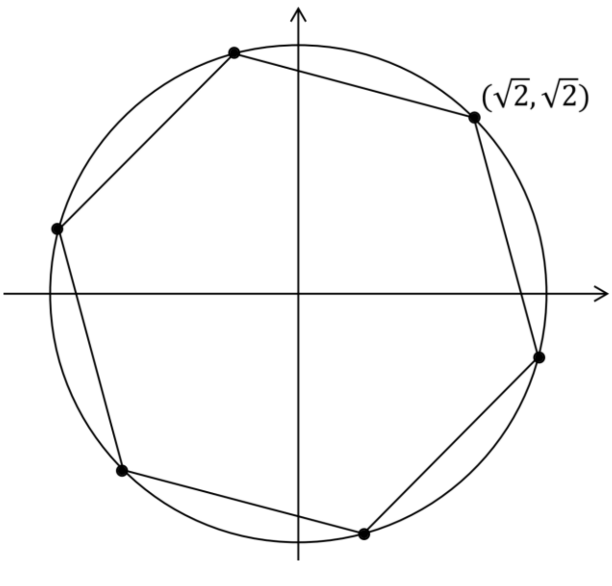


6. הנקודות במישור גאוס המתארות את פתרונות המשוואה $z^n = w$ הן קודקודים של מתומן משוכלל. אחד הקודקודים הוא הנקודה $(\sqrt{3},1)$. מצאו את n , את w ואת פתרונות המשוואה.



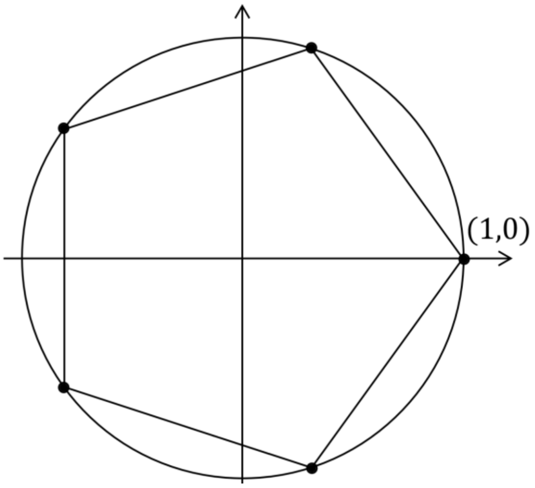
7. הנקודות במישור גאוס המתארות את פתרונות המשוואה $z^n = w$ הן קודקודים של משושה משוכלל.

אחד הקודקודים הוא הנקודה $(\sqrt{2},\sqrt{2})$. מצאו את n, את w ואת פתרונות המשוואה.



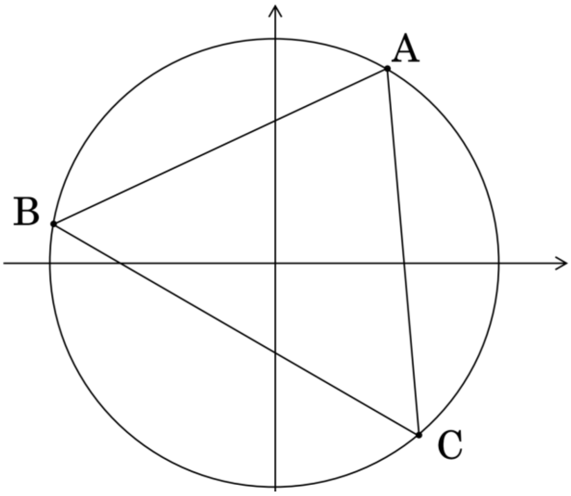
8. הנקודות במישור גאוס המתארות את פתרונות המשוואה $z^n = w$ הן קודקודים של מחומש משוכלל.

אחד הקודקודים הוא הנקודה $(1,0)$. מצאו את n, את w ואת פתרונות המשוואה.



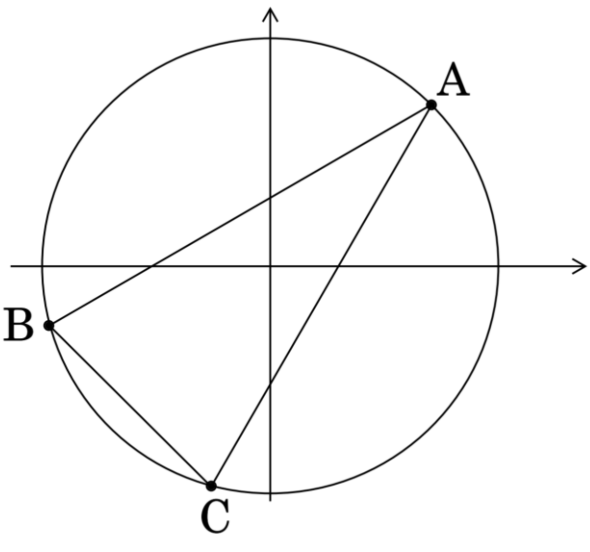
9.

לפניכם משולש שווה שוקיים ABC $(AB = AC)$ החסום במעגל קנוני שרדיוסו 4 במישור גאוס. נתון: $\sphericalangle BAC = 70°$. נקודה A היא $(2,2\sqrt{3})$. מצאו את המספרים המורכבים המיוצגים במישור גאוס על ידי הנקודות B,A ו-C.



10.

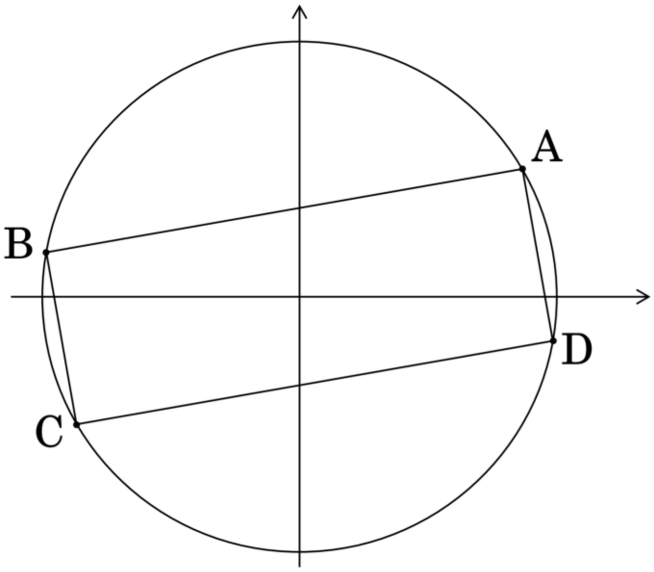
לפניכם משולש שווה שוקיים ABC $(AB = AC)$ החסום במעגל קנוני במישור גאוס. נתון: $\sphericalangle BAC = 30°$. נקודה A היא $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$. מצאו את המספרים המורכבים המיוצגים במישור גאוס על ידי הנקודות B,A ו-C.



.11

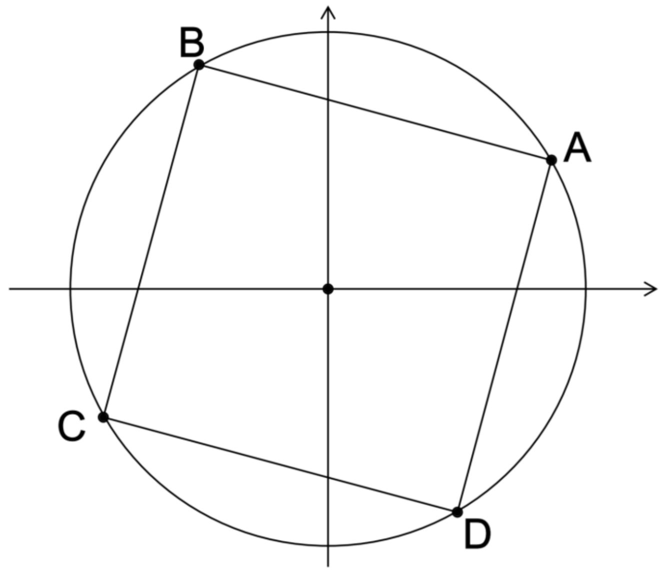
א. מלבן ABCD חסום במעגל קנוני במישור גאוס.
הקודקוד A הוא $(3\sqrt{3},3)$ והמספר המרוכב המיוצג על ידי קודקוד B הוא $Rcis(170°)$.
מצאו את המספרים המורכבים המיוצגים במישור גאוס על ידי הנקודות C,B, A ו-D.

ב. הכפילו את כל אחד מהמספרים המרוכבים המיוצגים על ידי קודקודי המלבן ב-$cis(\alpha)$ כך שהתקבלו 4 מספרים אשר הנקודות המייצגות אותם במישור גאוס מתארות מלבן נוסף והן: A', B', C' ו-D'. $(0° < \alpha < 90°)$.
מצא α אם נתון:
1) אלכסון המלבן $B'D'$ מתלכד עם הציר הממשי
2) אלכסון המלבן $A'C'$ מתלכד עם הציר המדומה
3) צלעות המלבן מקבילות לצירים



.12

ריבוע ABCD חסום במעגל קנוני במישור גאוס. הנקודה D היא $(1.5, -\frac{3\sqrt{3}}{2})$.



א. מצאו את המספרים המורכבים המיוצגים במישור גאוס על ידי הנקודות C,B, A ו-D.

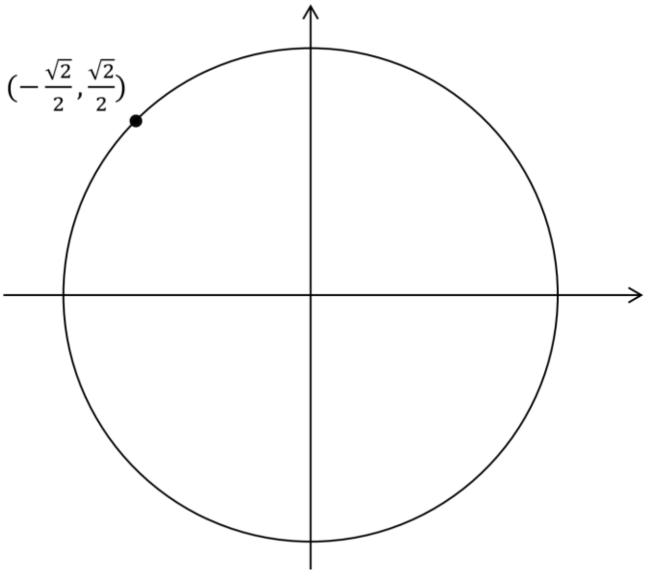
ב. המספרים המורכבים המיוצגים במישור גאוס על ידי הנקודות C,B, A ו-D הם **חלק** מפתרונות המשוואה $z^n = w$.
מצאו את n אם נתון $19 < n < 23$

ג. הוסיפו לכל אחד מהמספרים המורכבים המיוצגים במישור גאוס על ידי הנקודות C,B, A ו-D את המספר $2 - 3i$ כך שהתקבלו 4 מספרים חדשים אשר הנקודות המייצגות אותם במישור גאוס הן A', B', C' ו-D'. מצאו את מרכזו של המעגל החוסם אותם.

ד. הכפילו את כל אחד מהמספרים המרוכבים המיוצגים על ידי קודקודי הריבוע ABCD ב-$cis(\alpha)$ כך שהתקבלו 4 מספרים אשר הנקודות המייצגות אותם במישור גאוס מתארות ריבוע נוסף. מצאו את α $(0° < \alpha < 90°)$ אם נתון:

1) אלכסון הריבוע מתלכד עם ציר הציר המדומה
2) צלעות הריבוע מקבילות לצירים

13. משושה משוכלל חסום במעגל קנוני במישור גאוס. אחד הקודקודים שלו הוא $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.



א. מצאו את המספרים המרוכבים המיוצגים על ידי קודקודי המשושה.

ב. מצאו את שטח המשושה

ג. הוסיפו i לכל אחד מהמספרים המרוכבים המיוצגים על ידי קודקודי המשושה הנתון כך שהתקבלו 6 מספרים חדשים אשר הנקודות המייצגות אותם במישור גאוס הן קודקודים של מצולע. מצא את מרכז המעגל החוסם אותו.

ד. הכפילו ב- $2i$ כל אחד מהמספרים המרוכבים המיוצגים על ידי קודקודי המשושה הנתון כך שהתקבלו 6 מספרים חדשים אשר הנקודות המייצגות אותם במישור גאוס הן קודקודים של מצולע. מצאו את מרכז המעגל החוסם את המצולע ואת שטחו של המצולע.

ה. הכפילו את כל אחד מהמספרים המרוכבים המיוצגים על ידי קודקודי המשושה הנתון בתחילת השאלה ב-$cis(\alpha)$ כך שהתקבלו 6 מספרים אשר הנקודות המייצגות אותם במישור גאוס הן קודקודים של מצולע . מצאו את α ($0° < \alpha < 90°$) אם נתון שהמצולע שהתקבל מתלכד עם המשושה הנתון בתחילת השאלה.

14. מחומש משוכלל חסום במעגל קנוני במישור גאוס. אחד הקודקודים שלו הוא $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

א. מצאו את המספרים המרוכבים המיוצגים על ידי קודקודי המחומש.

ב. המספרים המורכבים המיוצגים במישור גאוס על ידי קודקודי המחומש הם **חלק** מפתרונות המשוואה $z^n = w$. מצאו את n אם נתון $13 < n < 18$.

ג. מצאו את w מסעיף ב

מה קורה למספר מרוכב כשמכפילים אותו ב-i או ב-(-1). בקצרה:

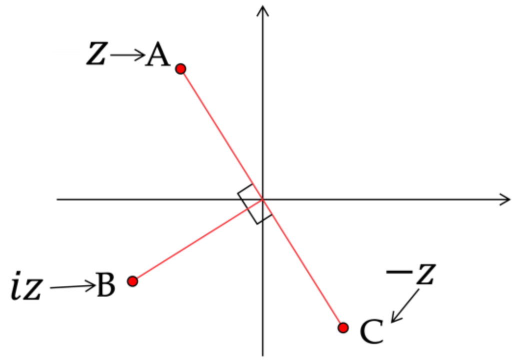
- הכפלה ב-i "מסובבת" 90°.
- הכפלה ב- (-1) "מסובבת" 180°.

פירוט:

נתון מספר מרוכב z אשר הנקודה המייצגת אותו במישור גאוס היא A. הנקודה B מייצגת את המספר המרוכב iz ו-C את $-z$. (O היא ראשית הצירים).

שלושת הנקודות B,A ו-C נמצאות במרחקים שווים מהראשית: AO=BO=CO

- המחוג BO מתקבל על ידי סיבוב המחוג AO 90° סביב הראשית.
- המחוג CO מתקבל על ידי סיבוב המחוג AO 90° סביב הראשית.



15. המספר $-4+3i$ מתאר קודקוד זווית חדה של משולש ישר זווית ושווה שוקיים החסום במעגל קנוני במישור גאוס. מצאו את שאר קודקודי המשולש (יש שתי אפשרויות).

16. משולש ישר זווית ושווה שוקיים חסום במעגל קנוני במישור גאוס. אחד מהקודקודים של המשולש מייצג את המספר המרוכב $12+5i$ מצא את שאר קודקודי המשולש אם:
    א. המספר המרוכב הנתון בשאלה מייצג קודקוד של זווית חדה
    ב. המספר המרוכב הנתון בשאלה מייצג קודקוד של זווית ישרה

17. משולש שווה שוקיים שזוויות הבסיס שלו שוות 30° חסום במעגל קנוני במישור גאוס. קודקוד זווית הראש של המשולש הוא $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$. מצאו את המספרים המרוכבים המיוצגים במישור גאוס על ידי קודקודי המשולש.

איך מראים ששתי נקודות A ו-B המייצגות שני מספרים מרוכבים Z_A ו- Z_B נמצאות על אותו ישר העובר בראשית.

- אם $arg(Z_B) = arg(Z_A) + 180^\circ + 360^\circ k$ אז נקודות A ו-B נמצאות על אותו ישר העובר בראשית מצדדים <u>שונים</u> של הציר המדומה.

- אם $arg(Z_B) = arg(Z_A) + 360^\circ k$ אז נקודות A ו-B נמצאות על אותו ישר העובר בראשית מאותו של הציר המדומה.

18. א. פתרו את המשוואה : $z^2 = -8 + 8\sqrt{3}i$

ב. אחד מפתרונות המשוואה מיוצג על ידי נקודה במישור גאוס הנמצאת ברביע השלישי שהיא קודקוד של משולש שווה צלעות החסום במעגל קנוני. מצאו את המספרים המרוכבים המיוצגים על ידי שאר קודקודי המשולש.

ג. הראו שפתרונות המשוואה מסעיף א׳
1) נמצאים על אותו ישר העוברי בראשית הצירים, מצדדים שונים של הציר המדומה.
2) על מעגל קנוני.

ד. רשמו את משוואת המעגל והישר.

19. נתון המספר $z = cos\alpha + isin\alpha$ ($0° < \alpha < 360°$). פתרונות המשוואה $iz\bar{z} = z - \bar{z}$ מיוצגים על ידי שתי נקודות במישור גאוס אשר מהוות שני קודקודים של משולש שווה צלעות החסום במעגל קנוני במישור גאוס. מצאו את המספר המרוכב המיוצג על ידי הקודקוד השלישי של המשולש.

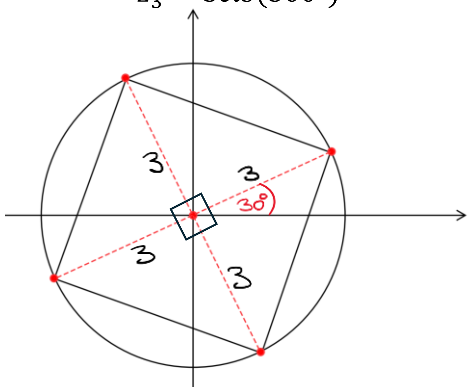
20. קודקוד של מלבן החסום במעגל קנוני במישור גאוס מייצג את המספר המרוכב $z = 2\sqrt{3} + 2i$. שטחו של המלבן הוא $16\sqrt{2}$ יח״ר. מצאו את המספרים המרוכבים המיוצגים על ידי שלושת הקודקודים האחרים של המלבן. מצאו את 2 האפשרויות.

תשובות

1.

א.

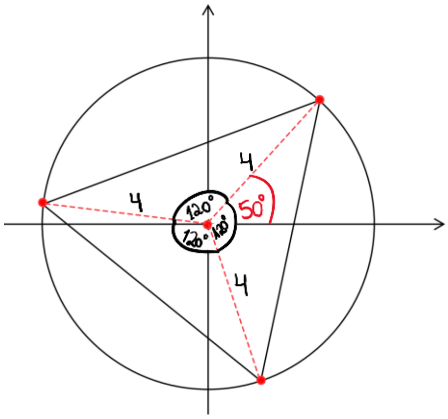
$z_0 = 3cis(30°)$
$z_1 = 3cis(120°)$
$z_2 = 3cis(210°)$
$z_3 = 3cis(300°)$



ריבוע

ב.

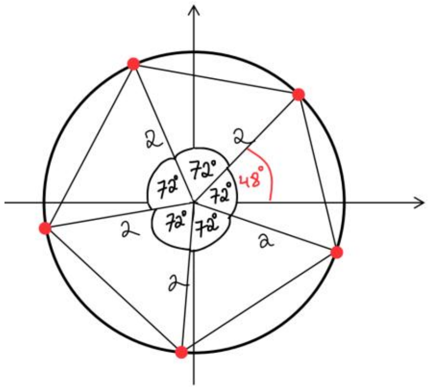
$z_0 = 4cis(50°)$
$z_1 = 4cis(170°)$
$z_2 = 4cis(290°)$



משולש שווה צלעות

ג.

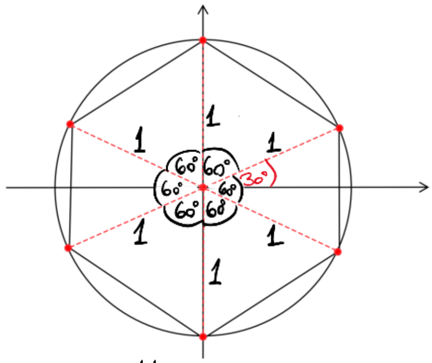
$z_0 = 2cis(48°)$
$z_1 = 2cis(120°)$
$z_2 = 2cis(192°)$
$z_3 = 2cis(264°)$
$z_4 = 2cis(336°)$



מחומש משוכלל

ד.

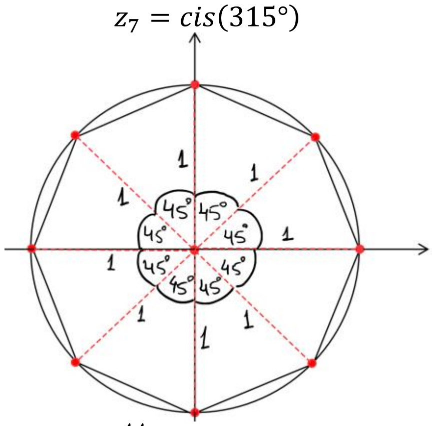
$z_0 = cis(30°)$
$z_1 = cis(90°)$
$z_2 = cis(150°)$
$z_3 = cis(210°)$
$z_4 = cis(270°)$
$z_5 = cis(330°)$



משושה משוכלל

ה.

$z_0 = cis(0°)$
$z_1 = cis(45°)$
$z_2 = cis(90°)$
$z_3 = cis(135°)$
$z_4 = cis(180°)$
$z_5 = cis(225°)$
$z_6 = cis(270°)$
$z_7 = cis(315°)$



מתומן משוכלל

.2

א.

$z_0 = 2cis(30°)$
$z_1 = 2cis(70°)$
$z_2 = 2cis(110°)$
$z_3 = 2cis(150°)$
$z_4 = 2cis(190°)$
$z_5 = 2cis(230°)$
$z_6 = 2cis(270°)$
$z_7 = 2cis(310°)$
$z_8 = 2cis(350°)$

ב.

$z_0 = cis(10°)$
$z_1 = cis(50°)$
$z_2 = cis(90°)$
$z_3 = cis(130°)$
$z_4 = cis(170°)$
$z_5 = cis(210°)$
$z_6 = cis(250°)$
$z_7 = cis(290°)$
$z_8 = cis(330°)$

ג.

$z_0 = 5cis(60°)$
$z_1 = 5cis(180°)$
$z_2 = 5cis(300°)$

ד.

$z_0 = cis(40°)$
$z_1 = cis(160°)$
$z_2 = cis(280°)$

ה.

$z_0 = 2cis(15°)$
$z_1 = 2cis(75°)$
$z_2 = 2cis(135°)$
$z_3 = 2cis(195°)$
$z_4 = 2cis(255°)$
$z_5 = 2cis(315°)$

ו.

$z_0 = 2cis(15°)$
$z_1 = 2cis(135°)$
$z_2 = 2cis(255°)$

ז.

$z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}cis(22.5°)$
$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}cis(67.5°)$
$z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}cis(112.5°)$
$z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}cis(157.5°)$
$z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}cis(202.5°)$
$z_5 = \frac{\sqrt{2}}{2}cis(247.5°)$
$z_6 = \frac{\sqrt{2}}{2}cis(292.5°)$
$z_7 = \frac{\sqrt{2}}{2}cis(337.5°)$

ח.

$z_0 = \sqrt[4]{5}cis(35.783°)$
$z_1 = \sqrt[4]{5}cis(125.783°)$
$z_2 = \sqrt[4]{5}cis(215.783°)$
$z_3 = \sqrt[4]{5}cis(305.783°)$

ט.

$z_0 = \sqrt[5]{13}cis(-13.476°)$
$z_1 = \sqrt[5]{13}cis(58.524°)$
$z_2 = \sqrt[5]{13}cis(130.524°)$
$z_3 = \sqrt[5]{13}cis(202.524°)$
$z_4 = \sqrt[5]{13}cis(274.524°)$

י.

$z_0 = cis(-36°)$
$z_1 = cis(36°)$
$z_2 = cis(108°)$
$z_3 = cis(180°)$
$z_4 = cis(252°)$

יא.

$z_0 = cis(-22.5°)$
$z_1 = cis(67.5°)$
$z_2 = cis(157.5°)$
$z_3 = cis(247.5°)$

יב.

$z_0 = 2cis(-30°)$
$z_1 = 2cis(90°)$
$z_2 = 2cis(210°)$

.3

א.

$z = 0$
$z = cis(0°)$
$z = cis(72°)$
$z = cis(144°)$
$z = cis(216°)$
$z = cis(288°)$

ב.

$z = 0$
$z = cis(45°)$
$z = cis(135°)$
$z = cis(225°)$
$z = cis(315°)$

ג.

$z = 0$
$z = cis(0°)$
$z = cis(60°)$
$z = cis(120°)$
$z = cis(180°)$
$z = cis(240°)$
$z = cis(300°)$

ד.

$z = 0$
$z = 2cis(45°)$
$z = 2cis(135°)$
$z = 2cis(225°)$
$z = 2cis(315°)$

ה.

$z = 0$
$z = 2cis(36°)$
$z = 2cis(108°)$
$z = 2cis(180°)$
$z = 2cis(252°)$
$z = 2cis(324°)$

ו.

$z = 0$
$z = \frac{\sqrt{2}}{2}cis(-30°)$
$z = \frac{\sqrt{2}}{2}cis(30°)$
$z = \frac{\sqrt{2}}{2}cis(90°)$
$z = \frac{\sqrt{2}}{2}cis(150°)$
$z = \frac{\sqrt{2}}{2}cis(210°)$
$z = \frac{\sqrt{2}}{2}cis(270°)$

ז.

$z = 0$
$z = 3cis(0°)$
$z = 3cis(40°)$
$z = 3cis(80°)$
$z = 3cis(120°)$
$z = 3cis(160°)$
$z = 3cis(200°)$
$z = 3cis(240°)$
$z = 3cis(280°)$
$z = 3cis(320°)$

4. א) נכונה. ב) שגויה. ג) שגויה.

.5

א.

$z = 2cis(0°)$
$z = 2cis(60°)$
$z = 2cis(120°)$
$z = 2cis(180°)$
$z = 2cis(240°)$
$z = 2cis(300°)$

ב.

$z = 2cis(45°)$
$z = 2cis(135°)$
$z = 2cis(225°)$
$z = 2cis(315°)$

ג.

$z = 2cis(6°)$
$z = 2cis(78°)$
$z = 2cis(150°)$
$z = 2cis(222°)$
$z = 2cis(294°)$

ד.

$z = i$
$z = cis(210°)$
$z = cis(330°)$

ה.

$z = \pm i$

ו.

$z = cis(0°)$
$z = cis(45°)$
$z = cis(90°)$
$z = cis(135°)$
$z = cis(180°)$
$z = cis(225°)$
$z = cis(270°)$
$z = cis(315°)$

6. $n = 8\, , w = 2^8 cis(240°)$

$z = 2cis(30°), z = 2cis(75°), z = 2cis(120°), z = 2cis(165°)$
$z = 2cis(210°)\, , z = 2cis(255°), z = 2cis(300°), z = 2cis(345°)$

7. $n = 6\, , w = 64cis(270°)$

$z = 2cis(45°), z = 2cis(105°), z = 2cis(165°), z = 2cis(225°)$
$z = 2cis(285°)\, , z = 2cis(345°)$

8. $n = 5\, , w = 1$

$z = 1cis(0°), z = 1cis(72°), z = 1cis(144°), z = 1cis(216°), z = 1cis(288°)$

9. $z_A = 4cis(60°), z_B = 4cis(170°), z_C = 4cis(310°)$.

10. $z_A = cis(45°), z_B = cis(195°), z_C = cis(255°)$.

11. $z_A = 6cis(30°)\, ,\ z_B = 6cis(170°)\, ,\ z_C = 6cis(210°)\, ,\ z_D = 6cis(350°)$

12. א) $z_A = 3cis(30°)\, ,\ z_B = 3cis(120°)\, ,\ z_C = 3cis(210°)\, ,\ z_D = 3cis(300°)$
ב) $n = 20$.
ג) $(2, -3)$.
ד) 1) $\alpha = 60°$ 2) $\alpha = 15°$

13. א) $z = cis(15°), z = cis(75°), z = cis(135°), z = cis(195°)$
$z = cis(255°)\, , z = cis(315°)$
ב) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ יח״ר.
ג) $(0,1)$.
ד) $6\sqrt{3}$ יח״ר.
ה) $\alpha = 60°$.

14. א) $z = cis(9°), z = cis(81°), z = cis(153°), z = cis(225°), z = cis(297°)$.

ב) $n = 15\, ,\ w = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

15. אפשרות 1: $(3,4), (4,-3)$ אפשרות 2: $(4,-3), (-3,-4)$.
16. א. אפשרות 1: $(-5,12), (-12,-5)$ אפשרות 2: $(5,-12), (-12,-5)$.
ב. $(-5,12), (5,-12)$

17. $z_1 = 1$, $z_2 = cis(60°)$, $z_3 = cis(120°)$.

18. א. $z_1 = 4cis(60°) = 2 + 2\sqrt{3}i$, $z_2 = 4cis(240°) = -2 - 2\sqrt{3}i$

ב. $z = 4cis(0°)$, $z = 4cis(120°)$.

ג. 1. $arg(z_2) = arg(z_1) + 180°$

2. $|z_1| = |z_2|$

ד. $y = \sqrt{3}x$, $x^2 + y^2 = 1$

19. $-i$

20. אפשרות 1: $z = 4cis(75°), z = 4cis(210°), z = 4cis(255°)$

אפשרות 2: $z = 4cis(165°), z = 4cis(210°), z = 4cis(345°)$

מקומות גיאומטריים

1. $z = x + yi$ הוא מספר מרוכב (x ו-y מספרים ממשיים).עבור כל סעיף מצאו את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות המקיימות את המשוואה הנתונה. בסעיפים בהם המקום הגיאומטרי הוא מעגל ציינו את מרכזו ורדיוסו.

א. $|z| = 2$
ב. $|z-3| = 1$
ג. $|z+i| = 2$
ד. $|z-\bar{z}| = 1$
ה. $|z+\bar{z}| = 1$
ו. $|z-3+2i| = 5$
ז. $\left|\frac{z+1}{z-1}\right| = 1$
ח. $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 2$
ט. $\left|\frac{2z-\bar{z}+2i}{4z+\bar{z}-2i}\right| = 1$
י. $|z+2-3i|^2 = |\bar{z}|^2 + \left|\left(\frac{5}{1-2i}\right)^2\right|$
יא. $|z+i\bar{z}| = 0$

2. לפניכם שתי משוואות אשר מייצגות שני מקומות גיאומטריים במישור גאוס.

$$\frac{1}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}-3}{|z|^2} = -1 \quad (1)$$

$$2z\bar{z} - |\bar{z}|^2 + z = -\bar{z} \quad (2)$$

א. z_1 הוא מספר מרוכב. האם ייתכן שהוא מקיים את שתי המשוואות?

ב. המספר המרוכב $-1+ki$ (k ממשי) מקיים את משוואה 2 ומיוצג על ידי נקודה במישור גאוס הנמצאת ברביע ה-3. מצא 3 נקודות נוספות הנמצאות על המקום הגיאומטרי השני שביחד עם הנקודה הנ"ל יוצרות ריבוע.

3. $z = x + yi$ הוא מספר מרוכב (x ו-y מספרים ממשיים).עבור כל סעיף שרטטו את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות המקיימות את המשוואה\אי-שוויון הנתונה.

א. $|z| < 4$
ב. $|z-1| \le 3$
ג. $|z+i| > 2$
ד. $|z-3+i| > 1$
ה. $2 < |z| < 5$

4. א. נתונים שני מספרים מרוכבים z_1 ו-z_2. הראו שהביטוי $|z_1 - z_2|$ הוא המרחק בין הנקודות המייצגות אותם במישור גאוס.

ב. **העזרו בסעיף א** והסבירו (**ללא הצבה של $x + yi$**) מהו המקום הגיאומטרי של כל הנקודות אשר המספרים המרוכבים שהן מייצגות מקיימים את המשוואה: $|z-2+4i| = 1$

5. $z = x + yi$ הוא מספר מרוכב (x ו-y מספרים ממשיים).עבור כל סעיף שרטטו את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות המקיימות את המשוואה\אי-שוויון הנתונה.

א. $\arg(z) = 45°$
ב. $\arg(z) = 135°$
ג. $\arg(z) = 60°$

ד. $\arg(z) = 120°$

ה. $30° \le \arg(z) \le 60°$

ו. $30° \le \arg(z) \le 60°$

וגם $1 < |z| < 4$

ז. $180° \le \arg(z) \le 270°$

וגם $|z+i| > 1$

תשובות

.1

א. $x^2 + y^2 = 4$
מרכז $(0,0)$
רדיוס 2

ב. $(x-3)^2 + y^2 = 1$
מרכז $(3,0)$
רדיוס 1

ג. $x^2 + (y+1)^2 = 4$
מרכז $(0,-1)$
רדיוס 2

ד. $y = \frac{1}{2}$ או $y = -\frac{1}{2}$
(שני קווים ישרים מאונכים לציר ה-y)

ה. $x = \frac{1}{2}$ או $x = -\frac{1}{2}$
(שני קווים ישרים מאונכים לציר ה-x)

ו. $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$
מרכז $(3,-2)$
רדיוס 5

ז. $x = 0$
(קו ישר מאונך לציר ה-x)

ח. $(x+\frac{5}{3})^2 + y^2 = \frac{16}{9}$
מרכז $(-\frac{5}{3},0)$
רדיוס $\frac{4}{3}$

ט. $y = x^2$ (פרבולה)

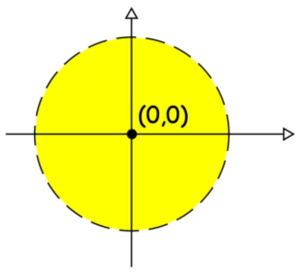
י. $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$
(קו ישר) אפשר גם להציג בהצגה הכללית:
$-2x + 3y - 4 = 0$

יא. $y = -x$
(קו ישר)

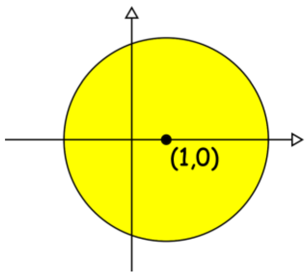
2. א. לא ב. קודקודי הריבוע הנוספים: $(-1,1), (0,0), (-2,0)$.

.3

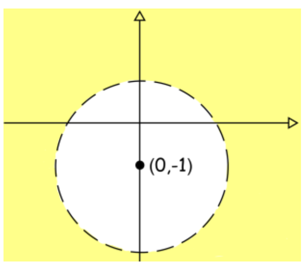
א. $x^2 + y^2 < 16$



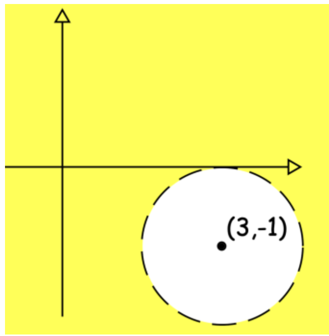
ב. $(x-1)^2 + y^2 \le 9$



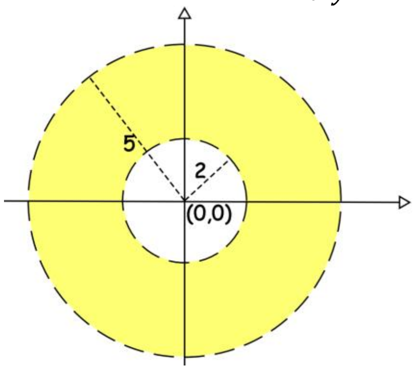
ג. $x^2 + (y+1)^2 > 4$



ד. $(x-3)^2+(y+1)^2>1$



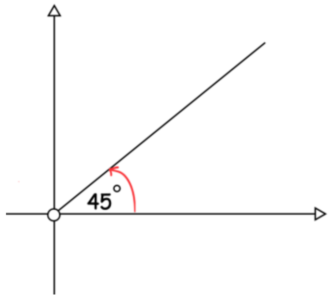
ה. $4<x^2+y^2<25$



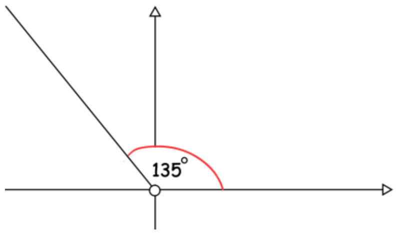
4. א. הוכחה ב. מעגל שמרכזו בנקודה $(2,-4)$ ורדיוסו 1.

5.

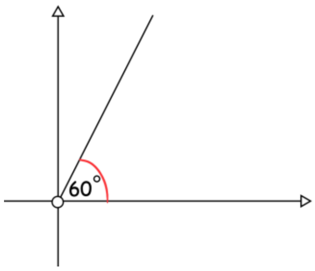
א. $y=x\ (x>0)$



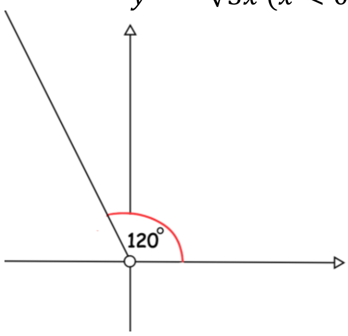
ב. $y=-x\ (x<0)$



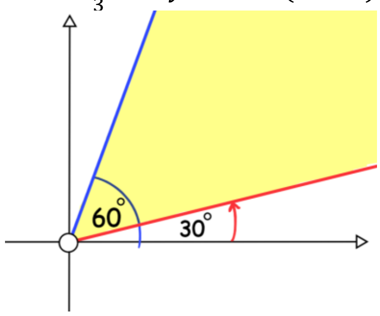
ג. $y=\sqrt{3}x\ (x>0)$



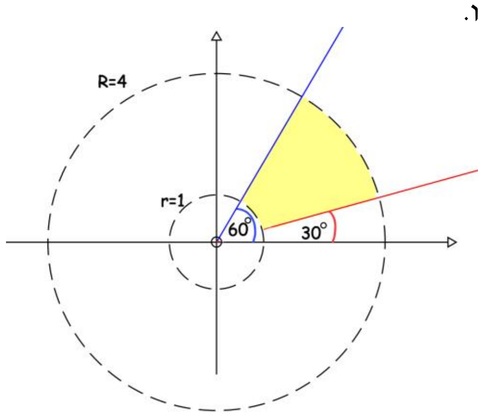
ד. $y=-\sqrt{3}x\ (x<0)$



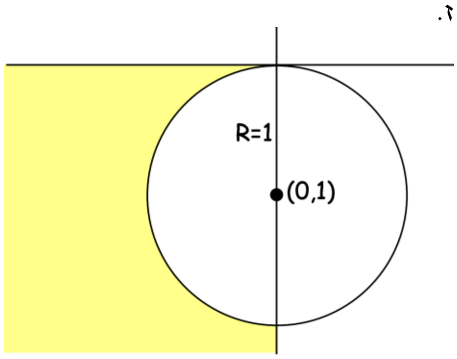
ה. $\frac{\sqrt{3}}{3}x\le y\le\sqrt{3}x\ (x>0)$



ו.



ז.



שאלות שונות

1. המספר המרוכב z מיוצג במישור גאוס על ידי נקודה הנמצאת בתוך מעגל היחידה. (z אינו ממשי ואינו מדומה)
קבעו אילו מהביטויים הבאים מיוצגים על ידי נקודות במישור גאוס הנמצאות:

- בתוך מעגל היחידה
- על מעגל היחידה
- מחוץ למעגל היחידה.

א. $-z$ ב. $-\frac{1}{z}$ ג. $\bar{z}$

ד. $-z^2$ ה. $\frac{1}{z^3}$ ו. z^3

ז. $\frac{z}{\bar{z}}$ ח. $\frac{\bar{z}-z}{2}$ ט. $\frac{z}{|\bar{z}|}$

י. $|\bar{z}|z$ יא. $\frac{1}{\bar{z}z}$ יב. $\frac{2}{\bar{z}+z}$

יג. $\frac{\bar{z}^2}{\bar{z}z}$

2. z מספר שאינו ממשי ואינו מדומה. נתון שהביטוי $z-\frac{1}{z}$ הוא מספר ממשי.

א. הוכיחו שהנקודה אשר מייצגת את z במישור גאוס נמצאת על מעגל היחידה.

ב. נתון שהנקודה המייצגת את z במישור גאוס נמצאת ברביע השני ובנוסף שיעור ה-x שלה הוא $x=-\frac{1}{2}$. מצאו את z.

3. z מספר מרוכב. הנקודה אשר מייצגת את z במישור גאוס נמצאת על מעגל היחידה.

א. הוכיחו שהביטוי $\frac{z-1}{z+1}$ הוא מספר מדומה.

ב. נתון $\frac{z-1}{z+1}=\sqrt{3}i$. מצאו את z והראו שהנקודה המייצגת את z במישור גאוס נמצאת על מעגל היחידה.

4. פתרו את המשוואה $(z-i-1)^6=32-32\sqrt{3}i$. הגישו את התשובות בהצגה אלגברית (תוכלו להשאיר 2 ספרות אחרי הנקודה).

5. א. פתרו את המשוואה $z^5=-32i$. וציינו איזה מצולע יוצרות 5 הנקודות במישור גאוס המייצגות את פתרונות המשוואה.

ב. מצאת את משוואת המעגל החוסם את המצולע במישור גאוס שקודקודיו הם פתרונות המשוואה $(w-2-i)^5=-32i$ (אין צורך לפתור את המשוואה).

6. א. מצא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות במישור גאוס אשר מייצגות את פתרונות המשוואה $\left|\frac{z^2+2i}{z^2+4i}\right|=1$.

ב. שרטט את המקום הגיאומטרי במישור גאוס.

ג. נתונות נקודות במישור גאוס אשר נמצאות על המקום הגיאומטרי ובנוסף מייצגות מספרים שמקיימים את המשוואה $|z^2|=9.25$. אם מחברים את הנקודות האלה מקבלים מרובע. איזה מרובע מתקבל?

7. A ו-B מייצגות 2 נקודות במישור גאוס שנמצאות על מעגל קנוני וגם על המקום הגיאומטרי $|\bar{z}-z|=4$.
נסמן z_A ו- z_B המספרים המרוכבים המיוצגים על ידי נקודות A ו-B בהתאמה. נסמן ב-O את ראשית הצירים.
נתון $\sphericalangle AOB=60°, arg(z_A)=30°$.

א. מצאו את z_A ו- z_B אם נתון שנקודות A ו-B אינן על הצירים
ב. ביחד עם עוד שתי נקודות נוספות, נקודות A ו-B הן קודקודים של מלבן החסום במעגל הנ"ל. מצאו את המספרים המרוכבים המיוצגים על ידי הקודקודים הנוספים של המלבן.

8. נקודות B,A ו-C מייצגות את שלושת המספרים z_A, z_B ו-z_C בהתאמה. נקודות B,A ו-C נמצאות על אותו ישר העובר בראשית כאשר נקודות A ו-B נמצאות מצד אחד של הציר המדומה ונקודה C מצדו השני (מימין ומשמאל לציר המדומה). נסמן ב-R_A, R_B ו-R_C את המרחקים מהראשית של נקודות B,A ו-C בהתאמה.
הביעו באמצעות R_A, R_B ו-R_C בלבד את הביטוי $\frac{z_A-z_C}{z_B+z_C}$

9. נקודות B,A ו-C מייצגות את שלושת המספרים z_A, z_B ו-z_C בהתאמה. נקודות A ו-B נמצאות על אותו ישר העובר בראשית ברביע הראשון ונקודה C ברביע שני על ישר העובר בראשית ומאונך לישר הראשון. נסמן ב-R_A, R_B ו-R_C את המרחקים מהראשית של נקודות B,A ו-C בהתאמה. הביעו באמצעות R_A, R_B ו-R_C בלבד את הביטוי $\frac{z_A-iz_C}{z_B+iz_C}$

10. א. n הוא מספר טבעי. הוכיחו שהביטוי $(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^n+(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^n$ הוא מספר ממשי.
ב. חשבו את ערכו של הביטוי אם n מתחלק ב-3 ללא שארית (מצאו את 2 האפשרויות).

11. א. נתון $|(cis\theta)^4-(cis\theta)^3|=\sqrt{3}$ מצאו את θ $(90°<\theta<180°)$.
ב. $z_A=(cis\theta)^3$, $z_B=(cis\theta)^2$, $z_C=z_A\cdot {z_B}^2$.
הנקודות B,A ו-C במישור גאוס מייצגות את שלושת המספרים z_A, z_B ו-z_C.
מצאו את זוויות המשולש ABC

12. נתון שהנקודה שמייצגת את z במישור גאוס נמצאת על מעגל היחידה. הוכיחו:

א. $z+\frac{1}{z}$ הוא מספר ממשי
ב. $z-\frac{1}{z}$ הוא מספר מדומה

13. נתון $z+\frac{1}{z}$ הוא מספר ממשי. הוכיחו שהנקודה שמייצגת את z במישור גאוס נמצאת על מעגל היחידה.
(נתון ש-z אינו מספר ממשי).

תשובות

1.

א. בתוך המעגל
ב. מחוץ למעגל
ג. בתוך המעגל
ד. בתוך המעגל
ה. מחוץ למעגל
ו. בתוך המעגל
ז. על המעגל
ח. בתוך המעגל
ט. על המעגל
י. בתוך המעגל
יא. מחוץ למעגל
יב. מחוץ למעגל
יג. על המעגל

2. א. הוכחה ב. $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

3. א. הוכחה ב. $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

4. $z=2.97+0.65i$, $z=2.29+2.53i$, $z=0.32+2.88i$, $z=-0.97+1.35i$,
$z=-0.29-0.53i$, $z=1.68-0.88i$

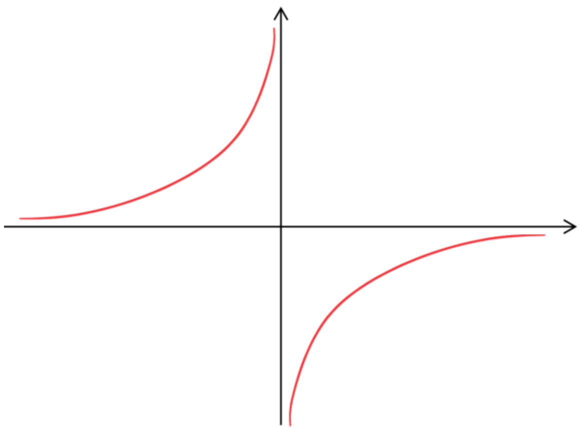
5. א. $z=2cis(54°), z=2cis(126°), z=2cis(198°), z=2cis(270°), z=2cis(342°)$
הנקודות הן קודקודים של מחומש משוכלל החסום במעגל קנוני שרדיוסו 2

ב. $(x-2)^2+(y-1)^2=4$

6. פתרון

א. $y=-\frac{3}{2x}$

ב.



ג. מלבן

7. א. $z_A=4cis(30°)=2\sqrt{3}+2i$, $z_B=4cis(-30°)=2\sqrt{3}-2i$.

ב. $z_C=4cis(150°)=-2\sqrt{3}+2i$ $z_D=4cis(210°)=-2\sqrt{3}-2i$.

8. $\frac{R_A+R_C}{R_B-R_C}$

9. $\frac{R_A+R_C}{R_B-R_C}$

10. הוכחה.

11. א. $\theta=120°$ ב. $60°, 60°, 60°$.

12. הוכחה.
13. הוכחה.

שאלות עם סדרות

סדרה חשבונית

1. נתונה סדרה חשבונית שהאיבר הראשון שלה הוא $2+2i$ והפרשה הוא $1+3i$.

א. מצאו את האיבר במקום העשירי בסדרה.
ב. מצאו את סכום 20 האיברים הראשונים בסדרה.

2. נתונה סדרה חשבונית שהפרשה $1-3i$ וסכום עשרת האיברים הראשונים שלה הוא $45-125i$.

א. מצאו את האיבר הראשון.
ב. האם קיים בסדרה איבר ממשי? אם כן מצאו אותו.

3. נתונה סדרה חשבונית שהאיבר הראשון שלה הוא $4+6i$ והפרשה הוא $2-i$.

א. מצאו את סכום הסדרה אם ידוע שהוא מספר ממשי.
ב. האם המספר $5k+4+(3k+2)i$ (k מספר ממשי) הוא איבר בסדרה? אם כן מצאו אותו.
ג. האם קיים ערך של m כך שהמספר $3m+5+(2m-5)i$ (m מספר ממשי) הוא איבר בסדרה? אם כן מצאו את האיבר.

4. בסדרה חשבונית האיבר הראשון הוא $m-5i$ (m מספר ממשי) . הפרש הסדרה הוא $-2+3i$. סכום איברי הסדרה הוא $-32+44i$

א. מצאו את m.
ב. האם קיים ערך טבעי של n עבורו סכום n האיברים הראשונים הוא מספר ממשי? אם כן מצאו אותו

פתרונות

1. א. $a_{10}=11+29i$ ב. $S_{10}=230+610i$
2. א. $a_1=i$ ב. לא קיים איבר ממשי בסדרה
3. א. $S_{13}=208$ ב. לא. ג. כן, $a_6=14+i$
4. א. $m=3$ ב. לא

סדרה הנדסית

1. האיבר הראשון בסדרה הנדסית הוא $1+i$ והאיבר השלישי הוא $2-2i$.
א. מצאו את שני הערכים האפשריים של מנת הסדרה.
ב. מצאו את סכום 8 האיברים הראשונים.

2. האיבר הראשון בסדרה הנדסית הוא i והאיבר השלישי הוא -1 .
א. מצאו את שני הערכים האפשריים של מנת הסדרה.
ב. בחרו בטענה הנכונה:

טענה 1 : סכום 4n האיברים הראשונים שווה 0 עבור כל n אי-זוגי.
טענה 2 : סכום 4n האיברים הראשונים שווה 0 עבור כל n זוגי.
טענה 3 : סכום 4n האיברים הראשונים שווה 0 עבור כל n טבעי.

3. האיבר הראשון בסדרה הנדסית הוא -16 והאיבר החמישי הוא i .
מצאו את כל הערכים האפשריים של מנת הסדרה.

4. האיבר הראשון בסדרה הנדסית הוא $-i$ והאיבר הרביעי הוא 1 .

א. מצאו את 3 הערכים האפשריים של מנת הסדרה.
ב. חשבו את סכום $12n$ האיברים הראשונים (n מספר טבעי)

פתרונות

1. א. $q = 1 - i = \sqrt{2}cis(315°)$ או $q = -1 + i = \sqrt{2}cis(135°)$
ב. $S_8 = -15 + 15i$ או $S_8 = -3 - 9i$
2. א. $q = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = cis(45°)$ או $q = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i = cis(225°)$
ב. טענה 2
3. $q = \frac{1}{2}cis(247.5°)\ , q = \frac{1}{2}cis(157.5°)\ , q = \frac{1}{2}cis(67.5°)\ , q = \frac{1}{2}cis(-22.5°)$
4. א. $q = cis(270°)\ , q = cis(150°)\ , q = cis(30°)$.
ב. 0