

## חקירת פונקציה לוגריתמית

הגדרת הלוגריתם-ומשוואות לוגריתמיות לפי ההגדרה

(עבור:  $b > 0, a > 0, a \neq 1$ )

$$\log_a(b) = c \leftrightarrow a^c = b$$

תרגיל 1- הגדרת הלוג ללא פעולות אלגבריות מקדימות  
פתרו את המשוואות הבאות:

א.	$\log_4(x + 18) = 2$
ב.	$\log_x(4) = 1$
ג.	$\log_2(x^2 - 1) = 3$
ד.	$\log_x(3) = -1$
ה.	$\log_3(x^2 - 5x + 87) = 4$
ו.	$\log_6(x^4 - 80) = 0$
ז.	$\log_{\sqrt{7}}(x^2 - 2x + 50) = 4$
ח.	$\log_{\sqrt{2}}( x + 1 ) = 2$
ט.	$\log_7(7^{10})$
י.	קבעו ללא מחשבון את ערך הביטוי: $2 \cdot \log_a(a^4)$

פתרון תרגיל 1:

א.	$x = -2$
ב.	$x = 4$
ג.	$x = -3, x = 3$
ד.	$x = \frac{1}{3}$
ה.	$x = 2, x = 3$
ו.	$x = -3, x = 3$
ז.	$x = 1$
ח.	$x = -3, x = 1$
ט.	8
י.	10

תרגיל 2-פעולות אלגבריות לפני שימוש ההגדרת הלוג  
פתרו את המשוואות הבאות:

א.	$\log^2_6 x - \log_6 x = 0$
ב.	$\log^2_3 x - 4 = 0$
ג.	$2\log^2_7 x - 3\log_7 x = 0$
ד.	$2\log^2_{25} x - 3\log_{25} x + 1 = 0$

פתרון תרגיל 2:

א.	$x = 1, x = 6$
ב.	$x = 9, x = \frac{1}{9}$
ג.	$x = 1, x = 7\sqrt{7} = \sqrt{7^3}$
ד.	$x = 5, x = 25$

תרגיל 3-הכרות עם  $e$  ו- $\ln()$   
פתרו את המשוואות הבאות:

א.	$\ln x = 2$
ב.	$\ln(x + 2) = 2$
ג.	$\ln\left(x + \frac{1}{e}\right) = -1$
ד.	$\ln(x^2) = 4$
ה.	$\ln\left(\frac{x}{2x-1}\right) = 0$
ו.	$\ln\left(\frac{ex}{3x-1}\right) = 1$
ז.	קבעו ללא מחשבון את ערך הביטוי: $\ln(e^3)$
ח.	קבעו ללא מחשבון את ערך הביטוי: $\ln(e^8)$

י. קבעו ללא מחשבון את ערך הביטוי:

$$2 \ln\left(\frac{1}{e}\right)$$

- ב.  $x = e^2 - 2$   
ד.  $x = -e^2, x = e^2$   
ו.  $x = \frac{1}{2}$   
ח. 8  
י. -2

- ב.  $\ln^2 x + 3 \ln x = 4 \ln x$   
ד.  $\ln^3 x - 8 = 0$   
ו.  $(\ln x - 1)^2 = 3 \ln x + 7$

- ב.  $x = 1, x = e$   
ד.  $x = e^2$   
ו.  $x = \frac{1}{e}, x = e^6$

- ב.  $3^{2x-1} = 2187$   
ד.  $9^{x+1} + 9^{x+2} - 30 = 0$   
ו.  $2^{x-2} = 3$   
ח.  $2 \cdot 5^x - 5^{x-1} = 27$   
י.  $7^{2x} - 8 \cdot 7^x + 7 = 0$   
יב.  $25^x = 6 \cdot 5^x - 5$   
יד.  $2^{2x-1} - 9.5 \cdot 2^x + 24 = 0$   
טז.  $4^x = 6 - 8 \cdot 4^{-x}$

- ב.  $x = 4$   
ד.  $x = -\frac{1}{2}$

ט. קבעו ללא מחשבון את ערך הביטוי:

$$\frac{\ln e}{2}$$

פתרון תרגיל 3:

- א.  $x = e^2$   
ג.  $x = 0$   
ה.  $x = 1$   
ז. 3  
ט. 0.5

תרגיל 4 - תרגילי e ו-1 מתקדמים  
פתרו את המשוואות הבאות:

- א.  $\ln^2 x = 4$   
ג.  $\ln^3 x - \ln x = 0$   
ה.  $\ln^2 x - \ln x = 3 - \ln^2 x$

פתרון תרגיל 4:

- א.  $x = \frac{1}{e^2}, x = e^2$   
ג.  $x = \frac{1}{e}, x = e, x = 1$   
ה.  $x = \frac{1}{e}, x = e^{1.5} = e\sqrt{e} = \sqrt{e^3}$

תרגיל 5 - משוואות מעריכיות בלי e  
פתרו את המשוואות הבאות:

- א.  $2^x = 4096$   
ג.  $5^x = 3 \cdot 5^x - 31250$   
ה.  $5^x = 13$   
ז.  $3^x + 3^{x+1} = 16$   
ט.  $(3^x)^2 - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$   
יא.  $5^{2x} = 27 \cdot 5^x - 50$   
יג.  $6^{2x-1} - 35 \cdot 6^x - 216 = 0$   
טו.  $9 \cdot 3^{2x} - 6 \cdot 3^x + 1 = 4 - 32 \cdot 3^x$

פתרון תרגיל 5

- א.  $x = 12$   
ג.  $x = 6$

$$x = \log_2 3 + 2 \approx 3.585 \quad \text{ו.}$$

$$x = \log_5 15 = \log_5 3 + 1 \approx 1.682 \quad \text{ח.}$$

$$x = 0, x = 1 \quad \text{י.}$$

$$x = 0, x = 1 \quad \text{יב.}$$

$$x = \log_2 3 \approx 1.585, x = 4 \quad \text{יד.}$$

$$x = \frac{1}{2}, x = 1 \quad \text{טו.}$$

$$x = \log_5 13 \approx 1.594 \quad \text{ה.}$$

$$x = \log_3 4 \approx 1.262 \quad \text{ז.}$$

$$x = 0, x = 2 \quad \text{ט.}$$

$$x = \log_5 2 \approx 0.431, x = 2 \quad \text{יא.}$$

$$x = 3 \quad \text{יג.}$$

$$x = -2 \quad \text{טו.}$$

תרגיל 6 – משוואות מעריכיות עם e  
פתרו את המשוואות הבאות:

$$e^{\frac{1}{x}} = e^2 \quad \text{ב.}$$

$$e^{2x} = 5 \quad \text{ד.}$$

$$e \cdot e^{4x-3} = e^{x+1} \quad \text{ו.}$$

$$(e^{x+3})^2 = e^{x-7} \quad \text{ח.}$$

$$2e^x + xe^x = 0 \quad \text{י.}$$

$$e^{-3x} - 3(x-2)e^{-3x} = 0 \quad \text{יב.}$$

$$x^2 e^{-x} - e^{-x}(2x+3) = 0 \quad \text{יד.}$$

$$e^{2x} - e^x = 0 \quad \text{טז.}$$

$$e^{2x} - 4e^x - 21 = 0 \quad \text{יח.}$$

$$e^x - 4e^{-x} - 3 = 0 \quad \text{כ.}$$

$$e \cdot e^x + e \cdot e^{-x} - e^2 - 1 = 0 \quad \text{כב.}$$

$$\frac{2e^x}{e^x-1} + e^x = 6 \quad \text{כד.}$$

$$e^{x^2-2x} = e^3 \quad \text{א.}$$

$$e^x = 3 \quad \text{ג.}$$

$$6e^{-x} = 24 \quad \text{ה.}$$

$$e^{3x^2+2x} - 1 = 0 \quad \text{ז.}$$

$$\left(\frac{1}{e^x}\right)^{x+1} = \sqrt{e^{6x+6}} \quad \text{ט.}$$

$$xe^x = xe \quad \text{יא.}$$

$$3e^x - x^2 e^x = 0 \quad \text{יג.}$$

$$\frac{2e^x}{x^2} - \frac{e^x}{x^3} = 0 \quad \text{טו.}$$

$$e^{2x} - 5e^x + 4 = 0 \quad \text{יז.}$$

$$e^x + 1 = 6e^{-x} \quad \text{יט.}$$

$$3e^{x^2} - 3e^{-x^2} - 8 = 0 \quad \text{כא.}$$

$$2e^{2-2x} = 3e^{1-x} - 1 \quad \text{כג.}$$

$$\frac{-4e^x}{e^x-2} + e^x + 4 = 0 \quad \text{כה.}$$

פתרון תרגיל 6:

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{ב.}$$

$$x = \frac{1}{2} \ln 5 \approx 0.805 \quad \text{ד.}$$

$$x = 1 \quad \text{ו.}$$

$$x = -13 \quad \text{ח.}$$

$$x = -2 \quad \text{י.}$$

$$x = 2\frac{1}{3} \quad \text{יב.}$$

$$x = -1, x = 3 \quad \text{יד.}$$

$$x = 0 \quad \text{טז.}$$

$$x = \ln 7 \quad \text{יח.}$$

$$x = \ln 4 \quad \text{כ.}$$

$$x = -1, x = 3 \quad \text{א.}$$

$$x = \ln 3 \approx 1.099 \quad \text{ג.}$$

$$x = -\ln 4 = \ln \frac{1}{4} \approx -1.386 \quad \text{ה.}$$

$$x = 0, x = -\frac{2}{3} \quad \text{ז.}$$

$$x = -1, x = -3 \quad \text{ט.}$$

$$x = 1, x = 0 \quad \text{יא.}$$

$$x = \pm\sqrt{3} \quad \text{יג.}$$

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{טו.}$$

$$x = 0, x = \ln 4 \quad \text{יז.}$$

$$x = \ln 2 \quad \text{יט.}$$

כב.  $x = \pm 1$   
 כד.  $x = \ln 2, x = \ln 3$

כא.  $x = \pm\sqrt{\ln 3}$   
 כג.  $x = 1, x = 1 - \ln \frac{1}{2} \approx 1.693$   
 כה.  $x = \ln 4$

תרגיל 7 - תרגילי e ו- $\ln()$  הבעה עם נעלמים  
 פתרו את המשוואות הבאות (הביעו באמצעות a):

א.  $(a \neq 0) \ln(ax) + 3 = 0$   
 ג.  $(a \neq 0) e^{ax-1} - 4 = 0$   
 ה.  $(a > 1) e^{-x} + 2 = 2a$   
 ז.  $(a > 0) e^x - ae^{-x} = 0$   
 ב.  $(a > 0) \ln^2 x - 2a = 0$   
 ד.  $(a > 0) e^{x-2} - a = 0$   
 ו.  $e^{x+1} = a^2 + 1$   
 ח.  $(a < 0) e^x + ae^{-x} = 0$

פתרונות תרגיל 7:

א.  $x = \frac{1}{ae^3}$   
 ג.  $x = \frac{\ln(4)+1}{a}$   
 ה.  $x = -\ln(2a - 2)$   
 ז.  $x = \frac{1}{2} \ln(a) = \ln \sqrt{a}$   
 ב.  $x = e^{\sqrt{2a}}, x = e^{-\sqrt{2a}}$   
 ד.  $x = \ln(a) + 2$   
 ו.  $x = \ln(a^2 + 1) - 1$   
 ח.  $x = \frac{1}{2} \ln(-a) = \ln \sqrt{-a}$

תרגיל 8 – אי שוויונות מעריכיים (ללא הגדרת הלוג)  
 פתרו את אי השוויונות המעריכיים הבאים:

אם  $(a > 0) a^x > a^y$   
 • אם  $a > 1$  אז  $x > y$  . (אם הבסיס גדול מ-1 לא הופכים את הסימן)  
 • אם  $0 < a < 1$  אז  $x < y$  . (אם הבסיס בין 0 ל-1 כן הופכים את הסימן)

א.  $2^{9x+5} > 2^{7x+2}$   
 ג.  $e^{1-x} < e$   
 ה.  $e^{x^2-1} < e^8$   
 ז.  $(\frac{1}{3})^{x^2-x} > \frac{1}{9}$   
 ט.  $e^{x^2-1} < e^{2x-1}$   
 יא.  $3^{2x} - 28 \cdot 3^x + 27 \leq 0$   
 יג.  $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 < 0$   
 ב.  $(\frac{2}{3})^{-x} \geq (\frac{2}{3})^{x+6}$   
 ד.  $e^{1-x} > 1$   
 ו.  $(\frac{1}{e})^{-x} \geq (\frac{1}{e})^{2x+3}$   
 ח.  $25^{\frac{5x-3}{2}} > 5^{6x-1}$   
 י.  $e^{\frac{1}{x}} \geq e^{\frac{2x}{1-x}}$   
 יב.  $4^x > 9 \cdot 2^x - 8$   
 יד.  $e^{\sqrt{x}} < e^{2x-1}$

פתרון תרגיל 8:

א.  $x > -1.5$   
 ג.  $x > 0$   
 ב.  $x \geq -3$   
 ד.  $x < 1$

- ה.  $-3 < x < 3$   
 ו.  $-1 < x < 2$   
 ט.  $0 < x < 2$   
 יא.  $0 < x < 3$   
 יג.  $0 < x < 1$
- ו.  $x \geq -1$   
 ח.  $x < -2$   
 י.  $x \leq -1$  או  $0 < x \leq \frac{1}{2}$  או  $x > 1$   
 יב.  $x < 0$  או  $x > 3$   
 יד.  $x > 1$

תרגיל 9 – אי שוויונות מעריכיים (עם הגדרת הלוג)  
 פתרו את אי השוויונות המעריכיים הבאים:

אם  $a^x > b$  ( $b > 0, a \neq 1, a > 0$ )

- אם  $a > 1$  אז  $x > \log_a b$  (אם הבסיס גדול מ-1 לא הופכים את הסימן)
- אם  $0 < a < 1$  אז  $x < \log_a b$  (אם הבסיס בין 0 ל-1 כן הופכים את הסימן)

- א.  $2^x > 3$   
 ג.  $7^{-x} > 6$   
 ה.  $e^x > 5$   
 ז.  $e^x < 0$   
 ט.  $e^{2x} - 5 \cdot e^x + 4 < 0$   
 יא.  $-e^{2x} + 6 \cdot e^x - 5 \leq 0$   
 יג.  $\frac{e^x - 4}{e^x - 1} < 0$   
 טו.  $\frac{e^x}{e^x + 1} > 0$   
 יז.  $\frac{x-1}{e^x - 2} < 0$
- ב.  $(\frac{1}{3})^x < 5$   
 ד.  $(\frac{1}{6})^{x-2} < 5$   
 ו.  $e^x \geq 1$   
 ח.  $e^x > -2$   
 י.  $e^{2x} - 3 \cdot e^x - 4 < 0$   
 יב.  $e^{2x} - 2 \cdot e^x + 1 \leq 0$   
 יד.  $\frac{1}{e^x - 1} > 0$   
 טז.  $\frac{e^x}{e^x - 3} > 0$   
 יח.  $\frac{e^x - 6}{e^x} < 0$

פתרונות תרגיל 9:

- א.  $x > \log_2(3)$   
 ג.  $x < -\log_7(6)$   
 ה.  $x > \ln(5)$   
 ז. אין פתרון  
 ט.  $0 < x < \ln(4)$   
 יא.  $x \leq 0$  או  $x \geq \ln(5)$   
 יג.  $0 < x < \ln(4)$   
 טו. כל  $x$   
 יז.  $\ln(2) < x < 1$
- ב.  $x > \log_{\frac{1}{3}}(5)$   
 ד.  $x > \log_{\frac{1}{6}}(5) + 2$   
 ו.  $x \geq 0$   
 ח. כל  $x$   
 י.  $x < \ln(4)$   
 יב.  $x = 0$   
 יד.  $x > 0$   
 טז.  $x > \ln(3)$   
 יח.  $x < \ln(6)$

תרגיל 10 – משוואות לוגריתמיות-מהצורה של  $\log_a(x) = \log_a(y)$  פתרו את אי השוויונות הלוגריתמים הבאים:

אם  $\log_a x > \log_a y$  ( $y > 0, x > 0, a \neq 1, a > 0$ )

- אם  $a > 1$  אז  $x > y$ . (אם הבסיס גדול מ-1 לא הופכים את הסימן)
- אם  $0 < a < 1$  אז  $x < y$ . (אם הבסיס בין 0 ל-1 כן הופכים את הסימן)

<p>א. <math>\log_4(x^2 - 9) = \log_4(1 - 3x)</math></p> <p>ג. <math>\ln(1 - 3x) = \ln(7 - x)</math></p> <p>ה. <math>\ln(x^2 - 2x) = \ln(2x - 3)</math></p>	<p>ב. <math>\log_{\frac{2}{5}}(x^2 - 9) = \log_{\frac{2}{5}}(x + 3)</math></p> <p>ד. <math>\log_{\frac{1}{e}}(x) = \log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{2-x}{x}\right)</math></p> <p>ו. <math>\ln(e^{2x} - 1) = \ln(e^x + 1)</math></p>
--	--

תשובות:

<p>א. <math>x = -5</math></p> <p>ג. <math>x = -3</math></p> <p>ה. <math>x = 3</math></p>	<p>ב. <math>x = 4</math></p> <p>ד. <math>x = 1</math></p> <p>ו. <math>\ln(2)</math></p>
--	---

תרגיל 11 – אי שיויונות לוגריתמים-סוג ראשון פתרו את אי השוויונות הלוגריתמים הבאים:

<p>א. <math>\log_3\left(\frac{1}{2} + x\right) &gt; \log_3(-x + 4\frac{1}{2})</math></p> <p>ג. <math>\ln(x^2 - 1) &gt; \ln(5 - x)</math></p> <p>ה. <math>\ln\left(\frac{1}{x}\right) &lt; \ln(2x - 1)</math></p>	<p>ב. <math>\log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 1) &lt; \log_{\frac{1}{3}}(9 - x^2)</math></p> <p>ד. <math>\log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{1}{x}\right) \geq \log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{2-x}{x}\right)</math></p> <p>ו. <math>\ln(e^x - 1) &lt; \ln(e^x + 1)</math></p>
--	---

תשובות:

<p>א. <math>2 &lt; x &lt; 4\frac{1}{2}</math></p> <p>ג. <math>x &lt; -3</math> או <math>2 &lt; x &lt; 5</math></p> <p>ה. <math>x &gt; 1</math></p>	<p>ב. <math>-3 &lt; x &lt; -2</math> או <math>2 &lt; x &lt; 3</math></p> <p>ד. <math>0 &lt; x \leq 1</math></p> <p>ו. <math>x &gt; 0</math></p>
--	---

תרגיל 12 – אי שיויונות לוגריתמים-סוג שני

אם  $\log_a x > b$  ( $x > 0, a \neq 1, a > 0$ )

- אם  $a > 1$  אז  $x > a^b$ . (אם הבסיס גדול מ-1 לא הופכים את הסימן)
- אם  $0 < a < 1$  אז  $x < a^b$ . (אם הבסיס בין 0 ל-1 כן הופכים את הסימן)

פתרו את אי השוויונות הלוגריתמים הבאים:

<p>א. <math>\log_3(x) &gt; 2</math></p> <p>ג. <math>\log_4(x) \leq 0</math></p> <p>ה. <math>\ln(x) &lt; 2</math></p>	<p>ב. <math>\log_{\frac{1}{5}}(2x) &lt; -2</math></p> <p>ד. <math>\log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{1}{x}\right) \geq 2</math></p> <p>ו. <math>\ln\left(\frac{1}{x}\right) &gt; 3</math></p>
--	--

$$\ln^2(x) > 1 \quad \text{ח.}$$

$$\frac{6}{\ln^2(x)} + \frac{1}{\ln(x)} < 2 \quad \text{י.}$$

$$\ln^2(x) < 4 \quad \text{ז.}$$

$$\ln^2(x) - 6\ln(x) - 7 < 0 \quad \text{ט.}$$

תשובות:

<p>ב. <math>x &gt; 12.5</math></p> <p>ד. <math>x \geq e^2</math></p> <p>ו. <math>0 &lt; x &lt; \frac{1}{e^3}</math></p> <p>ח. <math>0 &lt; x &lt; \frac{1}{e}</math> או <math>x &gt; e</math></p> <p>י. <math>0 &lt; x &lt; \frac{1}{e\sqrt{e}}</math> או <math>x &gt; e^2</math></p>	<p>א. <math>x &gt; 9</math></p> <p>ג. <math>0 &lt; x \leq 1</math></p> <p>ה. <math>0 &lt; x &lt; e^2</math></p> <p>ז. <math>\frac{1}{e^2} &lt; x &lt; e^2</math></p> <p>ט. <math>\frac{1}{e} &lt; x &lt; e^7</math></p>
---	---

### חוקי לוגריתמיסוףהויות לוגריתמיות

הגדרת הלוג	$\log_a(b) = c \leftrightarrow a^c = b$ <small>(עבור: <math>b &gt; 0, a &gt; 0, a \neq 1</math>)</small>	1
נובע מהגדרת הלוג	$\log_a(a^x) = x$ <small>(עבור: <math>a &gt; 0, a \neq 1</math>)</small>	2
נובע מהגדרת הלוג	$a^{\log_a(x)} = x$ <small>(עבור: <math>x &gt; 0, a &gt; 0, a \neq 1</math>)</small>	3
"לוג של מכפלה שווה לסכום של לוגים"	$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ <small>(עבור: <math>x &gt; 0, y &gt; 0, a &gt; 0, a \neq 1</math>)</small>	4
"לוג של מנה שווה להפרש של לוגים"	$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$ <small>(עבור: <math>x &gt; 0, y &gt; 0, a &gt; 0, a \neq 1</math>)</small>	5
"העברת החזקה לקדמת הלוג"	$\log_a(x^n) = n\log_a(x)$ <small>(עבור: <math>x &gt; 0, a &gt; 0, a \neq 1</math>)</small>	6
"החלפת בסיס"	$\log_a(x) = \frac{\log_m(x)}{\log_m(a)}$ <small>(עבור: <math>x &gt; 0, a &gt; 0, a \neq 1, m &gt; 0, m \neq 1</math>)</small>	7
"הגדרת לוג על בסיס 10"	$\log x = \log_{10}(x)$	

תרגיל 13 – חוקי לוגריתמים

חשבו את ערכי הביטויים הבאים ללא שימוש בכפתור הלוגולן במחשבון ועל ידי שימוש בחוקי הלוג האלה (או בחלקם):

$$\bullet \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\bullet \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

ב.  $\log_2(24) - \log_2(3)$

א.  $\log_3(4) + \log_3(2.25)$

ד.  $\ln(e^2 - e) - \ln(e - 1)$

ג.  $\log_5(15) + \log_5(50) - \log_5(6)$

ו.  $\ln\left(\frac{1}{2e-3}\right) + \ln(2e^7 - 3e^6)$

ה.  $\log_9(18) - \log_9(4) + \log_9(2)$

תשובות:

ב. 3

א. 2

ד. 1

ג. 3

ו. 6

ה. 1

תרגיל 14 – חוקי לוגריתמים

חשבו את הביטויים הבאים ללא שימוש בכפתור הלוגולן במחשבון ועל ידי שימוש בחוקי הלוג האלה (או בחלקם):

$$\bullet \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\bullet \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$\bullet \log_a(x^n) = n\log_a(x)$$

ב.  $3\log_{10}(2) - 2\log_{10}(4) - \log_{10}(5)$

א.  $3\log_5(2) - \log_5(1.6)$

ד.  $\frac{\log_7(5)}{\log_7(25)}$

ג.  $\frac{\ln(27)}{\ln(9)}$

ו.  $\frac{\ln(2)+\ln(3)}{1+\ln\left(\frac{36}{e}\right)}$

ה.  $\frac{\ln(24)-\ln(3)}{\ln(4)}$

תשובות:

ב. -1

א. 1

ד.  $\frac{1}{2}$

ג.  $\frac{3}{2}$

ו.  $\frac{1}{2}$

ה.  $\frac{3}{2}$

תרגיל 15 – חוקי לוגריתמים

חשבו את הביטויים הבאים ללא שימוש בכפתור הלוגולן במחשבון ועל ידי שימוש בחוקי הלוג האלה (או בחלקם):

$$\bullet \log_a(x) = \frac{\log_m(x)}{\log_m(a)}$$

$$\bullet \log x = \log_{10}(x)$$

$$\bullet \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\bullet \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$\log_a(x^n) = n \log_a(x) \quad \bullet$$

תוכלו גם להעזר בחישובים הבאים:  $3^4 = 81, 3^3 = 27, 5^3 = 125, 4^3 = 64, 2^4 = 16, 2^3 = 8$

ב.  $\log_3(5) \cdot \log_{25}(81)$

א.  $\log_4(11) \cdot \log_{11}(64)$

ד.  $\log_5(16) \cdot \log_{\frac{1}{4}}(125)$

ג.  $\log_5(8) \cdot \log_4(6) \cdot \log_{36}(25)$

ו.  $\log_5(10) \cdot \log(25)$

ה.  $\log_3\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \log_8(27)$

תשובות:

- |                  |       |
|------------------|-------|
| א. 3             | ב. 2  |
| ג. $\frac{3}{2}$ | ד. -6 |
| ה. -1            | ו. 2  |

תרגיל 16 – חוקי לוגריתמים

פתרו את המשוואות הבאות על ידי שימוש חוקי לוג:

ב.  $(\log_3 x)^2 - \log_9(x^2) = 0$

א.  $\log_2 x - \log_8(x^2) = 1$

ד.  $(\log_5(x))^2 - \log_{25}(x) = \frac{1}{2}$

ג.  $\log(x) + \log_{100}(x^2) = 0$

תשובות:

- |      |                            |
|------|----------------------------|
| א. 8 | ב. 1,3                     |
| ג. 1 | ד. $5, \frac{1}{\sqrt{5}}$ |

תרגיל 17 – חוקי לוגריתמים – וטעויות נפוצות

אלו מהשוויונות הבאים נכונים עבור כל  $x$ : סמן נכון/לא נכון. ( $x > 0$ )

ב.  $\ln(3x) = \ln(3) + \ln(x)$

א.  $\ln(3+x) = \ln(3)\ln(x)$

ד.  $\ln^2(x) = 2\ln(x)$

ג.  $\underbrace{\ln(4) + \ln(4) + \dots + \ln(4)}_{6 \text{ פעמים}} = \ln(4^6)$

ו.  $\ln(x^2) = 2\ln(x)$

ה.  $\ln(x^2) = \ln(2x)$

ז.  $e^{x^2} = e^{2x}$

תשובות:

- |            |         |
|------------|---------|
| א. לא נכון | ב. נכון |
|------------|---------|

ד. לא נכון

ג. נכון

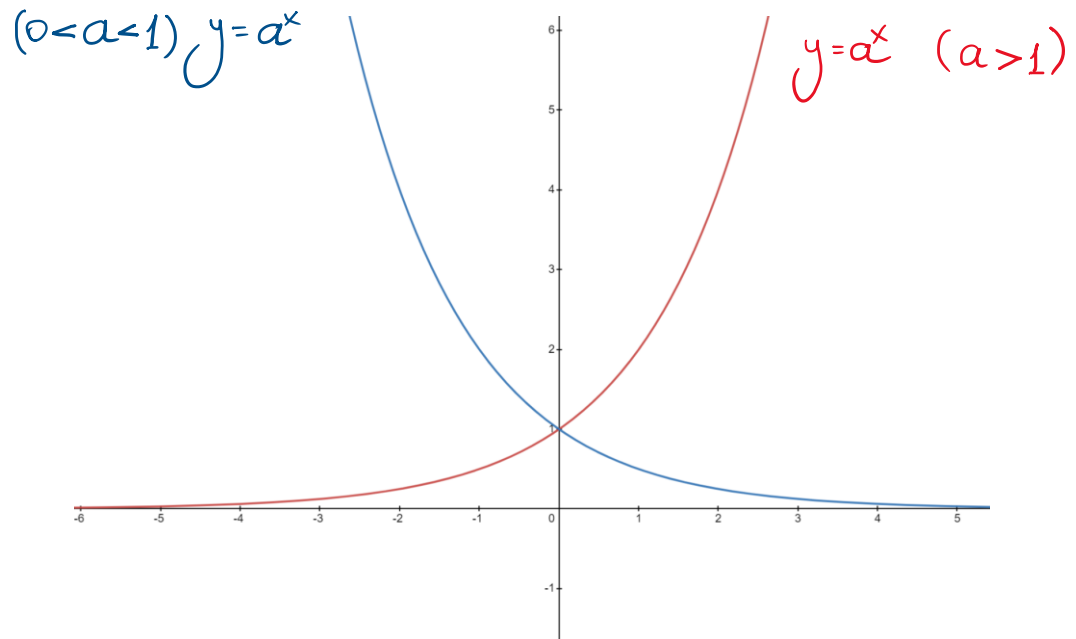
ו. נכון

ה. לא נכון

ז. לא נכון

פונקציה מעריכית – איך נראה גרף הפונקציה המעריכית

צפו בסרטון הסבר המופיע באתר גם עבור  $a > 1$  וגם עבור  $0 < a < 1$



דגשים חשובים מסרטון ההקדמה על הפונקציה  $y = a^x$

$0 < a < 1$	$a > 1$
$a^x \rightarrow 0$ as $x \rightarrow \infty$ •	$a^x \rightarrow \infty$ as $x \rightarrow \infty$ •
$a^x \rightarrow \infty$ as $x \rightarrow -\infty$ •	$a^x \rightarrow 0$ as $x \rightarrow -\infty$ •
הפונקציה $y = a^x$ יורדת לכל $x$ •	הפונקציה $y = a^x$ עולה לכל $x$ •
הפונקציה $y = a^x$ חיובית לכל $x$ •	הפונקציה $y = a^x$ חיובית לכל $x$ •
עוברת בנקודה (0,1) •	עוברת בנקודה (0,1) •

תרגיל 18 פונקציה מעריכית – מציאת אסימפטוטה אופקית

בשאלון הזה כדי למצוא אסימפטוטה אופקית נרצה תמיד לבדוק  
**לאן שואפים ערכי ה-y של הפונקציה כאשר  $x \rightarrow \infty$  וכאשר  $x \rightarrow -\infty$**   
 (כמובן במידה והפונקציה מוגדרת כאשר  $x \rightarrow \infty$  וכאשר  $x \rightarrow -\infty$ )

מצאו את האסימפטוטות האופקיות של הפונקציות הבאות (אם יש כאלה)  
 תוכלו להעזר בזה:  $e^x \rightarrow 0, e^x \rightarrow \infty$  :  $x \rightarrow -\infty, x \rightarrow \infty$ .

- |   |   |
|---|---|
| <p>ב. <math>f(x) = \frac{e^x - 2}{x - 2}</math></p> <p>ד. <math>f(x) = \frac{e^{x+1}}{x^2 - 2x - 3}</math></p> <p>ו. <math>f(x) = \frac{x - \sqrt{x} - 2}{e^x}</math></p> <p>ח. <math>f(x) = e^{2x} + 3</math></p> <p>י. <math>f(x) = e^{x+4} - 2</math></p> <p>יב. <math>f(x) = \frac{1}{x} + e^{-x^2}</math></p> <p>יד. <math>f(x) = (2 + e^x)^2</math></p> | <p>א. <math>f(x) = \frac{3}{e^{x-3}}</math></p> <p>ג. <math>f(x) = \frac{e^{2x-4}}{x^2-4}</math></p> <p>ה. <math>f(x) = \frac{e^{1-x}}{x^4+5x^2+4}</math></p> <p>ז. <math>f(x) = e^{2x}</math></p> <p>ט. <math>f(x) = e^{-x} + 3</math></p> <p>יא. <math>f(x) = 1 + e^{-2x+1}</math></p> <p>יג. <math>f(x) = 1 - e^{x^2}</math></p> <p>טו. <math>f(x) = \frac{2e^{2x}-3}{e^{2x}-7e^x+12}</math></p> |
|---|---|

פתרונות

- |  |  |
|--|--|
| <p>ב. <math>y = 0</math><br/><math>x \rightarrow -\infty</math></p> <p>ד. <math>y = 0</math><br/><math>x \rightarrow -\infty</math></p> <p>ו. <math>y = 0</math><br/><math>x \rightarrow \infty</math></p> <p>ח. <math>y = 3</math><br/><math>x \rightarrow -\infty</math></p> <p>י. <math>y = -2</math><br/><math>x \rightarrow -\infty</math></p> <p>יב. <math>y = 0</math></p> <p>יד. <math>y = 4</math><br/><math>x \rightarrow -\infty</math></p> | <p>א. <math>y = -1, y = 0</math><br/><math>x \rightarrow -\infty, x \rightarrow \infty</math></p> <p>ג. <math>y = 0</math><br/><math>x \rightarrow -\infty</math></p> <p>ה. <math>y = 0</math><br/><math>x \rightarrow \infty</math></p> <p>ז. <math>y = 0</math><br/><math>x \rightarrow -\infty</math></p> <p>ט. <math>y = 3</math><br/><math>x \rightarrow \infty</math></p> <p>יא. <math>y = 1</math><br/><math>x \rightarrow \infty</math></p> <p>יג. אין אסימפטוטה אופקית</p> <p>טו. <math>y = -\frac{1}{4}, y = 2</math><br/><math>x \rightarrow -\infty, x \rightarrow \infty</math></p> |
|--|--|

תרגיל 19 פונקציה מעריכית – מציאת אסימפטוטה אנכית

בשאלון הזה כדי למצוא אסימפטוטה אנכית נבחן שני מקרים :

- אם ה- $x$  שמאפס את המכנה (נניח  $x = a$ ) מאפס את המכנה של שבר שנמצא במעריך (לדוגמה  $e^{\frac{1}{x-a}}$ ) אז נבדוק לאן שואפים ערכי ה- $y$  של הפונקציה כאשר  $x \rightarrow a^+$  וכאשר  $x \rightarrow a^-$ .
  1. אם בצד מסוים של  $a$  ערכי ה- $y$  שואפים ל- $+\infty$  או ל- $-\infty$  אז באותו הצד יש אסימפטוטה אנכית  $x = a$ .
  2. אם בצד מסוים של  $a$  ערכי ה- $y$  שואפים למספר קבוע (נניח  $b$ ) אז באותו הצד יש חור  $(a, b)$ .
- אם ה- $x$  שמאפס את המכנה (נניח  $x = a$ ) לא מאפס את המכנה של שבר שנמצא במעריך אלא מכנה כללי (לדוגמה  $\frac{1}{e^x - e^a}$ ) אז נוכל לקבוע אסימפטוטה אנכית/חור לפי השיטות של שאלון קודם:
  1. אם  $x = a$  מאפס את המכנה אבל לא את המונה אז  $x = a$  היא אסימפטוטה אנכית.
  2. אם  $x = a$  מאפס את המכנה וגם את המונה נצמצם את הפונקציה צמצום מרבי ואז:
    - אם  $x = a$  כבר לא מאפס את המכנה של הפונקציה המצומצמת אז יש חור שיעור ה- $x$  שלו הוא  $a$  וכדי למצוא את שיעור ה- $y$  של החור נציב בפונקציה המצומצמת  $x = a$ .
    - אם  $x = a$  עדיין מאפס את המכנה של הפונקציה המצומצמת אז  $x = a$  היא אסימפטוטה אנכית.

מצאו את האסימפטוטות האנכיות/חורים של הפונקציות הבאות (אם יש כאלה).

ב.  $f(x) = \frac{e^x - 2}{x - 2}$

א.  $f(x) = \frac{3}{e^x - 3}$

ד.  $f(x) = \frac{e^x - 3}{e^{2x} - 9}$

ג.  $f(x) = e^{\frac{1}{x}} - 1$

ו.  $f(x) = \frac{e^x}{x - 4}$

ה.  $f(x) = e^{\frac{2-x}{x-4}}$

ח.  $f(x) = e^{\frac{1}{x^2+1}}$

ז.  $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2-1}$

י.  $f(x) = \frac{x-1}{e^x-1}$

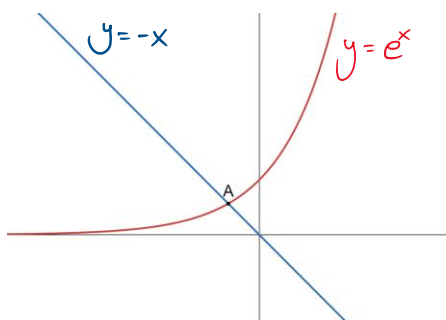
ט.  $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}-5e^x+4}$

יב.  $f(x) = \frac{1}{x} + e^{-x^2}$

יא.  $f(x) = 1 + e^{-2x+1}$

יד.  $f(x) = e^{\frac{1}{ax+1}}$  ( $a < 0$ )

יג.  $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$



טו. משמאלכם נתונים הגרפים של הפונקציות

$y = e^x$  ו- $y = -x$  הנחתכים בנקודה

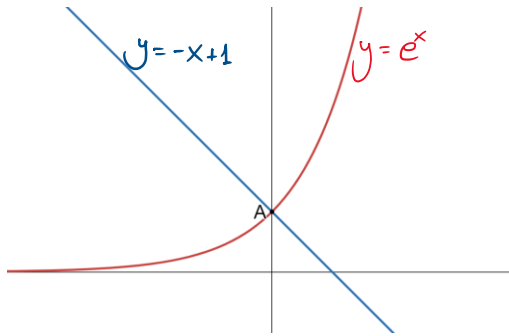
אחת בלבד והיא:

$A(-0.567, 0.567)$

מצאו את האסימפטוטה האנכית/חורים

של הפונקציה  $f(x)$  (אם יש כאלה)

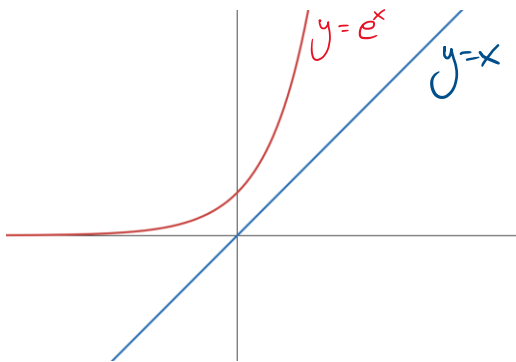
$$f(x) = \frac{x-1}{e^x+x}$$



טז. משמאלכם נתונים הגרפים של הפונקציות  $y = e^x$  ו- $y = -x + 1$  הנחתכים בנקודה אחת בלבד הנמצאת על ציר ה-y כמתואר בשרטוט.

מצאו את האסימפטוטה האנכית לחורים של הפונקציה  $f(x)$  (אם יש כאלה)

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + x - 1}$$



יז. משמאלכם נתונים הגרפים של הפונקציות  $y = e^x$  ו- $y = x$  שאינם נחתכים.

מצאו את האסימפטוטה האנכית לחורים של הפונקציה  $f(x)$  (אם יש כאלה)

$$f(x) = \frac{x - 2}{e^x - x}$$

פתרונות

- |   |   |
|---|---|
| א.  | ב. $x = 2$  |
| ג. $x = 0$ (מימין); $(0, -1)$ חור (משמאל) | ד. $(\ln(3), \frac{1}{6})$ חור                                  |
| ה. $x = 4$ (משמאל); $(4, 0)$ חור (מימין)  | ו. $x = 4$  |
| ז. $x = \pm 1$                            | ח. אין אסימפטוטות אנכיות או חורים                               |
| ט. $x = \ln(4)$ ; חור $(0, -\frac{2}{3})$ | י. $x = 0$  |
| יא. אין אסימפטוטות אנכיות או חורים        | יב. $x = 0$   |
| יג. $x = 0$ (מימין); $(0, 0)$ חור (משמאל) | יד. $x = -\frac{1}{a}$ (משמאל); $(-\frac{1}{a}, 0)$ חור (מימין) |
| טו. $x = -0.567$                          | טז. $x = 0$   |

תרגיל 20 פונקציה מעריכית – מציאת אסימפטוטה אופקית כאשר הבסיס אינו e. מצאו את האסימפטוטות האופקיות של הפונקציות הבאות (אם יש כאלה) תוכלו להעזר בזה:

אם  $a > 1$  אז  $a^x \rightarrow 0$  כ- $x \rightarrow -\infty$ ,  $a^x \rightarrow \infty$  כ- $x \rightarrow \infty$ .

אם  $0 < a < 1$  אז  $a^x \rightarrow \infty$  כ- $x \rightarrow -\infty$ ,  $a^x \rightarrow 0$  כ- $x \rightarrow \infty$ .

ב.  $f(x) = \frac{1}{0.2^x - 1}$

א.  $f(x) = \frac{1}{2^x - 1}$

$f(x) = \frac{(\frac{1}{3})^x - 1}{x-1}$ .ד	$f(x) = \frac{3^x - 1}{x-1}$ .ג
$f(x) = \frac{2^x - x}{2^x + x} + 3$ .ו	$f(x) = \frac{2^x - x}{2^x + x}$ .ה
$f(x) = \frac{2^x - x}{2^x + x} - \frac{1}{x^2}$ .ח	$f(x) = \frac{2^x - x}{2^x + x} - 3x$ .ז
$f(x) = \frac{(\frac{1}{2})^x - x}{(\frac{1}{2})^x + x}$ .י	$f(x) = 1 - \frac{2^x - x}{2^x + x}$ .ט
$f(x) = 5^{\frac{1}{x}} + 1$ .יב	$f(x) = 5^{\frac{1}{x}}$ .יא
$f(x) = \frac{5^{\frac{1}{x}}}{x}$ .יד	$f(x) = 5^{\frac{1}{x}} + x$ .יג
$f(x) = \frac{3^x - x}{9^x + x}$ .טז	$f(x) = \frac{2^x - 1}{4^x - 1}$ .טו
$f(x) = \frac{3 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 1}{4^x + 6 \cdot 2^x - 1}$ .יח	$f(x) = 3 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 1$ .יז
$f(x) = 6^{\frac{1-x}{x-3}} + \frac{5}{6}$ .כ	$f(x) = 6^{\frac{1-x}{x-3}}$ .יט
$f(x) = 6^{\frac{1-x}{x-3}} - \frac{1}{x}$ .כב	$f(x) = 6^{\frac{1-x}{x-3}} + \frac{5}{6}x$ .כא
$f(x) = \frac{5^{2x-x}}{5^x - x^2}$ .כד	$f(x) = \frac{7^x}{x-4}$ .כג
$f(x) = 0.5^{\frac{1}{x^2+1}}$ .כו	$f(x) = \frac{8^{2x}}{x^2-1}$ .כה
$f(x) = \frac{x^2+x-1}{3^x+x}$ .כח	$f(x) = \frac{9^x-1}{9^x-5 \cdot 3^x+4}$ .כז
$f(x) = \frac{1}{x} + 5^{-x^2}$ .ל	$f(x) = 2 + 0.2^{-x+1}$ .כט
$(a < 0) f(x) = 8^{\frac{1}{-ax+1}}$ .לב	$f(x) = x \cdot 2^{\frac{1}{x}}$ .לא

פתרונות

$y = -1, y = 0$ .ב $x \rightarrow \infty \quad x \rightarrow -\infty$	$y = -1, y = 0$ .א $x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow \infty$
$y = 0$ .ד $x \rightarrow \infty$	$y = 0$ .ג $x \rightarrow -\infty$
$y = 4, y = 2$ .ו $x \rightarrow \infty \quad x \rightarrow -\infty$	$y = 1, y = -1$ .ה $x \rightarrow \infty \quad x \rightarrow -\infty$
$y = 1, y = -1$ .ח $x \rightarrow \infty \quad x \rightarrow -\infty$	ז. אין אסימפטוטה אופקית
$y = -1, y = 1$ .י $x \rightarrow \infty \quad x \rightarrow -\infty$	$y = 0, y = 2$ .ט $x \rightarrow \infty \quad x \rightarrow -\infty$
$y = 2$ .יב	$y = 1$ .יא
$y = 0$ .יד	יג. אין אסימפטוטה אופקית
$y = -1, y = 0$ .טז $x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow \infty$	$y = 1, y = 0$ .טו $x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow \infty$
$y = -1, y = 3$ .יח $x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow \infty$	$y = 1$ .יז $x \rightarrow -\infty$

- יט.  $y = \frac{1}{6}$   
 כא. אין אסימפטוטה אופקית  
 כב.  $y = \frac{1}{6}$   
 כג.  $y = 0$   
 כד.  $y = 0$   
 כה.  $y = 0$   
 כו.  $y = 1$   
 כז.  $y = -\frac{1}{4}$ ,  $y = 1$   
 כח.  $y = 0$   
 כט.  $y = 2$   
 לו.  $y = 1$   
 לא. אין אסימפטוטה אופקית

תרגיל 21 פונקציה מעריכית – מציאת אסימפטוטה אנכית כאשר הבסיס אינו e.

- א.  $f(x) = \frac{-x+2}{2^x-1}$   
 ב.  $f(x) = 2^{\frac{1}{x}} + 3$   
 ג.  $f(x) = \frac{6}{3^x-3}$   
 ד.  $f(x) = 3^{\frac{6}{x-1}}$   
 ה.  $f(x) = \frac{5^x-1}{25^x-1}$   
 ו.  $f(x) = \frac{5^x-1}{(25^x-1)^2}$

בתרגילים **הממורקרים בצהוב** מומלץ קודם לחקור את הפונקציה שנמצאת במעריך, לשרטט אותה, ורק אז לגשת לבדוק האם לפונקציה  $f(x)$  יש אסימפטוטה אנכית או חור

- ז.  $f(x) = \frac{-x+2}{0.5^x-2^{-3}}$   
 ח.  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{-x+2}{x-3}}$   
 ט.  $f(x) = 4^{\frac{1}{x^2-2x-3}}$   
 י.  $f(x) = 2^{\frac{-3x+3}{x^2-3x+2}}$   
 יא.  $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{4x+4}{x^2-2x-3}}$   
 יב.  $f(x) = \frac{x+1}{3^x-8}$   
 יג.  $f(x) = \frac{(2^x-10)^2}{4^x-11 \cdot 2^x+10}$   
 יד.  $f(x) = 6^{\frac{x^2}{x^2-4x}}$

פתרונות

- א.  $x = 0$   
 ב. חור מימין  $(0,3)$ , אס אנכית משמאל  $x = 0$   
 ג.  $x = 1$   
 ד. חור משמאל  $(1,0)$ , אס אנכית מימין  $x = 1$   
 ה. חור  $(0, \frac{1}{2})$   
 ו.  $x = 0$   
 ז.  $x = 3$   
 ח. חור משמאל  $(3,0)$ , אס אנכית מימין  $x = 3$   
 ט. חור מימין  $(-1,0)$ , אס אנכית משמאל  $x = -1$   
 י. חור משמאל  $(3,0)$ , אס אנכית מימין  $x = 3$   
 יא. חור מימין  $(3,0)$ , אס אנכית משמאל  $x = 3$   
 יב. אס אנכית  $x = \log_3 8$   
 יג. חור  $(-1,5)$ .

יג. חור  $(\log_2 10, 0)$ , אס אנכית  $x = 0$

יד. חור  $(6,1)$ , חור משמאל  $(4,0)$ , אס אנכית  
מימין  $x = 4$

תרגיל 22 פונקציה מעריכית – נגזרות – רק e

$$y = e^{f(x)} \rightarrow y' = f'(x)e^{f(x)}$$

גזרו את הפונקציות הבאות וסדרו את הנגזרת עד שתגיעו לביטוי המופיע בתשובות

א.  $f(x) = e^{2x-3} + x^2 + 3$       ב.  $f(x) = e^{3x-1} + \frac{1}{x} + 1$

ג.  $f(x) = 2e^{-x+1}$       ד.  $f(x) = 3e^{x+1}$

ה.  $f(x) = e^x + 2e^{-x}$       ו.  $f(x) = e^x - e^{-x}$

ז.  $f(x) = e^x - x^2$       ח.  $f(x) = 2e^x - x^3$

ט.  $f(x) = e^{x^2-x}$       י.  $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

יא.  $f(x) = (x-1)e^x$       יב.  $f(x) = xe^x$

יג.  $f(x) = 3e^x + x^2e^x$       יד.  $f(x) = 2xe^x$

טו.  $f(x) = \frac{3}{e^x-3}$       טז.  $f(x) = \frac{e^x}{x}$

יז.  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$       יח.  $f(x) = e^{\frac{2-x}{x-4}}$

פתרונות

א.  $f'(x) = 2(e^{2x-3} + x)$       ב.  $f'(x) = 3e^{3x-1} - \frac{1}{x^2}$

ג.  $f'(x) = -2e^{-x+1}$       ד.  $f'(x) = 3e^{x+1}$

ה.  $f'(x) = e^x - 2e^{-x}$       ו.  $f'(x) = e^x + e^{-x}$

ז.  $f'(x) = e^x - 2x$       ח.  $f'(x) = 2e^x - 3x^2$

ט.  $f'(x) = (2x-1)e^{x^2-x}$       י.  $f'(x) = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$

יא.  $f'(x) = xe^x$       יב.  $f'(x) = (x+1)e^x$

יג.  $f'(x) = e^x(x^2 + 2x + 3)$       יד.  $f'(x) = 2(x+1)e^x$

טו.  $f'(x) = -\frac{3e^x}{(e^x-3)^2}$       טז.  $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$

יז.  $f'(x) = \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$       יח.  $f'(x) = \frac{2e^{\frac{2-x}{x-4}}}{(x-4)^2}$

תרגיל 23 פונקציה מעריכית – נגזרות – בסיס שאינו e

$$y = a^{f(x)} \rightarrow y' = f'(x) \cdot a^{f(x)} \cdot \ln a$$

א.  $f(x) = 3^{2x+1} + 2x^2 + 3$       ב.  $f(x) = 4 \cdot 2^{6x-1} + \frac{2}{x} + 1$

ג.  $f(x) = 6^{x^2-x+1}$       ד.  $f(x) = 0.5^x + 2 \cdot 0.5^{-x}$

ה.  $f(x) = 3x^3 \cdot 4^x$       ו.  $f(x) = x \cdot 3^x$

ז.  $f(x) = x^3 \cdot 2^{\frac{1}{x}}$       ח.  $f(x) = \frac{5^x}{4x}$

ט.  $f(x) = 6 \cdot 7^{\frac{2-x}{x-4}}$       י.  $f(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}$

יא.  $f(x) = \frac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}}$       יב.  $f(x) = \frac{4^x + x}{4^x - x}$

פתרונות

א.  $f'(x) = 2 \ln 3 \cdot 3^{2x+1} + 4x$       ב.  $f'(x) = 24 \ln 2 \cdot 2^{6x-1} - \frac{2}{x^2}$

ג.  $f'(x) = \ln 6 \cdot (2x - 1) 6^{x^2-x+1}$       ד.  $f'(x) = \ln 0.5 \cdot (0.5^x - 2 \cdot 0.5^{-x})$

ה.  $f'(x) = 3x^2 \cdot 4^x \cdot (3 + \ln 4 \cdot x)$       ו.  $f'(x) = 3^x (1 + \ln 3 \cdot x)$

ז.  $f'(x) = x \cdot 2^{\frac{1}{x}} (3x - \ln 2)$       ח.  $f'(x) = \frac{5^x (\ln 5 \cdot x - 1)}{4x^2}$

ט.  $f'(x) = \frac{12 \ln 7 \cdot 7^{\frac{2-x}{x-4}}}{(x-4)^2}$       י.  $f'(x) = \frac{4 \ln 2}{(2^x + 2^{-x})^2}$

יא.  $f'(x) = \frac{-4 \ln 3}{(3^x - 3^{-x})^2}$       יב.  $f'(x) = \frac{4^x + x}{4^x - x}$

תרגיל 24 פונקציה מעריכית – חקירה מלאה – בסיס e

לפני התרגילים הבאים יש לעבור בצורה יסודית על תרגילים 18,19,22

1. נתונה הפונקציה  $f(x) = -x \cdot e^x$ 
  - א. מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה.
  - ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה.
  - ג. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
  - ד. מצאו את האסימפטוטות של הפונקציה אם יש כאלה.
  - ה. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.
  - ו. שרטטו את גרף הפונקציה  $f(x)$ .
  - ז. מצאו את ערכי  $k$  הישר  $y = k$  לא חותך את גרף הפונקציה.
  - ח.  $g(x)$  היא פונקציה המקיימת  $3 + f(x) = g'(x)$  לכל  $x$ . מצאו את שיעור ה- $x$  של נקודת הפיתול של הפונקציה  $g(x)$ .
  - ט. היעזרו בגרף של  $f(x)$  ושרטטו סקיצה של גרף הנגזרת  $f'(x)$  אם ידוע שלפונקציה  $f(x)$  יש נקודת פיתול אחת.

2. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$ .
- מצאו את תחום ההגדרה.
  - מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה.
  - מצאו את תחומי העלייה והירידה.
  - מצאו את נקודות החיתוך עם הצירים.
  - מצאו את האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  אם יש כאלה.
  - שרטטו את גרף הפונקציה  $f(x)$ .
  - מצאו את האסימפטוטות של הפונקציה  $f'(x)$  אם יש כאלה.
  - הסתמכו על הגרף של  $f(x)$  ושרטטו בצורה כללית סקיצה של הגרף של  $f'(x)$  אם ידוע שלפונקציה  $f(x)$  אין נקודות פיתול.

3. לפונקציה  $f(x) = (x-a)^2 \cdot e^x$  יש נקודת קיצון בנקודה  $x = 1$ .
- מצאו את שני הערכים האפשריים של  $a$ .
  - עבור הערך הגדול מבין שני הערכים של  $a$  שמצאתם חקרו את הפונקציה  $f(x)$  חקירה מלאה ושרטטו.
  - מצאו לאילו ערכים של  $m$  למשוואה  $f(x) = m$ :
    - אין פתרון.
    - יש פתרון יחיד.
    - יש שני פתרונות.
    - יש שלושה פתרונות.

4. לפונקציה  $f(x) = \frac{a \cdot e^x}{x+b}$  ידוע כי הישר  $x = -2$  הוא אסימפטוטה לפונקציה. המשיק לגרף הפונקציה בנקודה  $x = 0$  יוצר זווית של  $45^\circ$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .
- מצאו את הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .
  - הציבו  $a = 4$  ו- $b = 2$ , חקרו את הפונקציה חקירה מלאה ושרטטו אותה.
  - נתונה הפונקציה  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$  שרטטו אותה.

5. תחום השליליות של הפונקציה  $f(x) = \frac{e^x}{2x^2 - ax + b}$  הוא  $1 < x < 2.5$ .
- מצאו את הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .
  - הציבו  $a = 7$  ו- $b = 5$ , חקרו את הפונקציה חקירה מלאה ושרטטו אותה.

6. נתונה הפונקציה  $f(x) = e^x - ex + 1$ .
- מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
  - מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה.
  - מצאו את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$ .
  - מצאו את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים אם יש כאלה.
  - שרטטו את גרף הפונקציה  $f(x)$ .
- נתונה הפונקציה  $g(x) = \frac{1}{e^x - ex + 1}$
- מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה  $g(x)$ .
  - שרטטו את גרף הפונקציה  $g(x)$ .

7. נתונה הפונקציה  $f(x) = (x-a)e^{-x^2}$  נתון שתחום החיוביות של הפונקציה הוא  $x > \frac{1}{2}$ .
- מצאו את ערכו של הפרמטר  $a$ .
  - בצעו חקירה מלאה של הפונקציה ושרטטו את הגרף שלה.

8. הישר  $y = \eta$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + m}$  בנקודה שבה  $x = 4$ .
- מצאו את ערכם של הפרמטרים  $m$  ו- $\eta$ .
  - בצעו חקירה מלאה של הפונקציה ושרטטו את הגרף שלה.

9. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 3e^x + a}$  בנקודה שבה  $x = \ln 3$  הוא  $-3$ .

- מצאו את שני הערכים האפשריים של  $a$ .
- הציבו בפונקציה את ה- $a$  הגדול מבין שני ערכי ה- $a$  שמצאתם ומצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה והאסימפטוטות המאונכות לצירים.
- מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה אם יש כאלה.
- שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .
- $g(x)$  היא פונקציה המקיימת  $g(x) = bf(x) + c$  ו- $b > 0$  הביעו בעזרת הפרמטרים  $b$  ו- $c$  במידת הצורך את האסימפטוטות וה-"חורים" של הפונקציה  $g(x)$ .

10. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{ke}{xe^x - e^x}$ ,  $k < 0$ . מרחקה של נקודת הקיצון מראשית הצירים הוא  $e$ .

- מהוא הערך של  $k$ .
- חקרו את הפונקציה חקירה מלאה ושרטטו אותה.
- קבעו האם יש פתרון למשוואה  $e^{1-x} = 1 - x$ ?
- הפונקציה  $g(x)$  מקיימת:  $g'(x) = f'(x) \cdot f(x)$ . מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $g(x)$ .

11. נתונה הפונקציה  $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$ .

- חקרו את הפונקציה  $f(x)$  חקירה מלאה ושרטטו אותה.
- נתונה הפונקציה  $g(x) = |x| \cdot e^{\frac{1}{|x|}}$ . שרטטו אותה. אין צורך לבצע חקירה חדשה.

12. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{e^x - a}{e^x + a}$ ,  $0 < a < 1$ .

- מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה אם יש כאלה.
- הבע באמצעות  $a$  את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים אם יש כאלה.
- שרטטו שקיצה של גרף הפונקציה.

13. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{e^x - a}{e^x + a}$ ,  $a < -1$ .

- מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה אם יש כאלה.
- הבע באמצעות  $a$  את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים אם יש כאלה.
- שרטטו שקיצה של גרף הפונקציה.

14. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{e^x - ae^{-x}}{e^x + ae^{-x}}$ ,  $a \neq 0$ ,  $a \neq -1$ .

בכל אחד מהסעיפים הבאים התחייסו לשני המקרים:  $a > 0$  ו- $a < 0$  (אם יש צורך) והביעו את התשובות באמצעות  $a$  במידת הצורך.

- מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה אם יש כאלה.
- הבע באמצעות  $a$  את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים אם יש כאלה.
- ידוע כי שיעור ה- $y$  של נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $y$  הוא שלילי. שרטטו שקיצה של גרף הפונקציה.

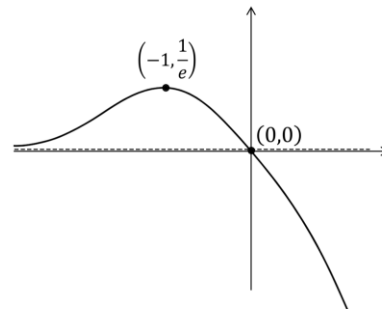
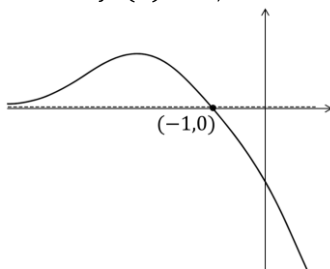
15. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2 - 2x - k}{e^{-x}}$ , פרמטר  $k$ .
- מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
  - עבור אילו ערכי  $k$  יש לפונקציה 2 נקודות קיצון.
  - דרך נקודות הקיצון של הפונקציה העבירו ישרים המאונכים לציר ה- $x$  אשר המרחק ביניהם הוא 6. מצאו את ערכו של הפרמטר  $k$ .
  - חקרו את הפונקציה חקירה מלאה ושרטטו את הגרף שלה.

16. נתונה הפונקציה  $f(x) = (x^2 - k)e^{-x}$ , פרמטר  $k$ .
- הוכיחו שאם לפונקציה יש גם מינימום וגם מקסימום אז מתקיים  $k > -1$ .
  - הראו שאם  $-1 < k \leq 0$  אז גם המינימום וגם המקסימום מתקבלים בתחום  $0 \leq x \leq 2, x \neq 1$ .
  - הראו שאם  $k < -1$ , הפונקציה יורדת לכל  $x$ .

### פתרונות לתרגיל 24

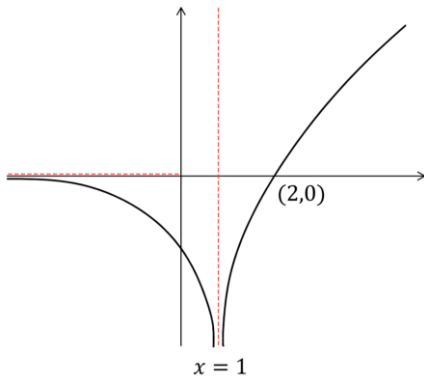
#### שאלה 1

- Max  $(-1, \frac{1}{e})$ .
- $(0, 0)$ .
- תחום חיוביות:  $x < 0$ ,  
תחום שליליות:  $x > 0$ .  
שרטוט הגרף של  $f(x)$ .
- תחום עלייה:  $x < -1$ ,  
תחום ירידה:  $x > -1$ .
- $y = 0$   
 $x \rightarrow -\infty$ .
- $k > \frac{1}{e}$ .
- $x = -1$ .
- שרטוט הגרף של  $f'(x)$ .



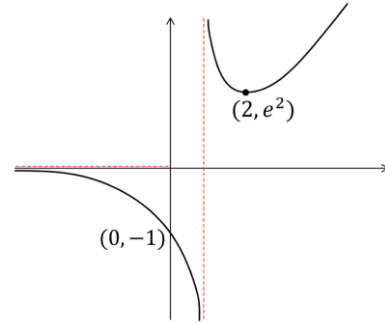
שאלה 2

- ב.  $(2, e^2) \min$
- ד.  $(0, -1)$
- ה. אסימפטוטה אנכית של  $f(x)$  :  $x = 1$
- ה. אסימפטוטה אופקית של  $f(x)$  :  $y = 0$  :  $x \rightarrow -\infty$
- ח. שרטוט הגרף של  $f'(x)$



- א.  $x \neq 1$
- ג. תחום עלייה:  $x > 2$ , תחום ירידה:  $1 < x < 2$  או  $x < 1$

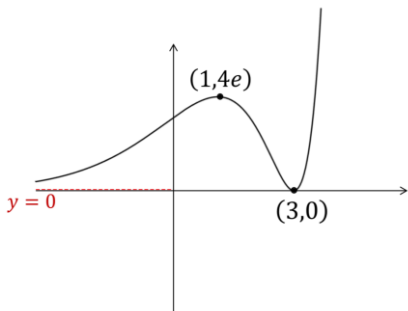
- ו. שרטוט הגרף של  $f(x)$



- ז. אסימפטוטה אנכית של  $f'(x)$  :  $x = 1$
- ז. אסימפטוטה אופקית של  $f'(x)$  :  $y = 0$  :  $x \rightarrow -\infty$

שאלה 3

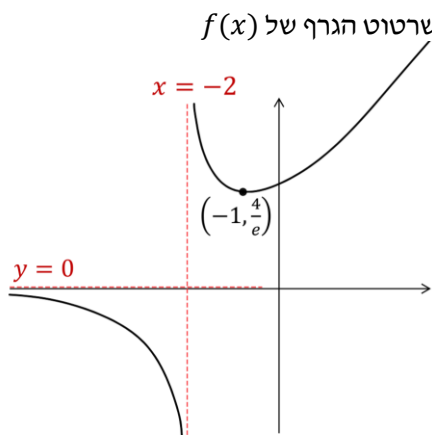
- ב. שרטוט הגרף של  $f(x)$



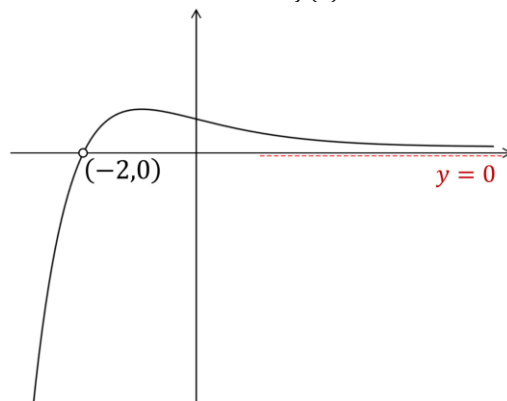
- א.  $a = 3$  או  $a = 1$
- ג. אף פתרון:  $m < 0$
- ג. פתרון יחיד:  $m = 0$  או  $m > 4e$
- שני פתרונות:  $m = 4e$
- שלושה פתרונות:  $0 < m < 4e$

שאלה 4

- ב. שרטוט הגרף של  $f(x)$



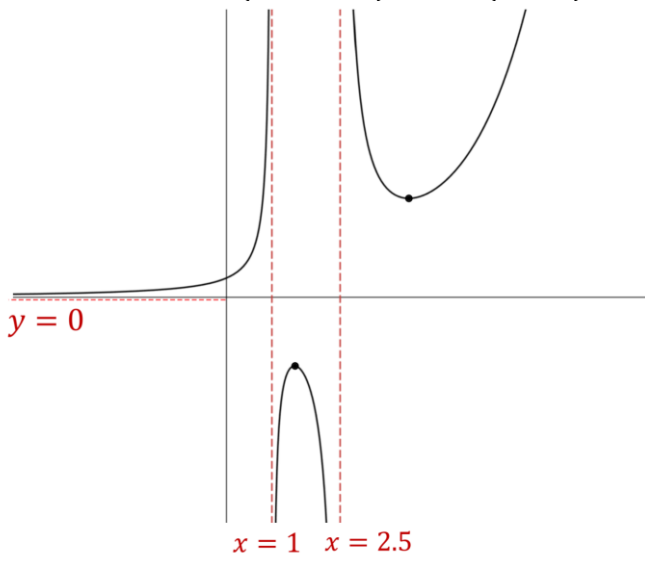
- ב.  $b = 2, a = 4$
- ג. שרטוט הגרף של  $\frac{1}{f(x)}$



שאלה 5

א.  $b = 5, a = 7$

ב. שרטוט הגרף של  $f(x)$   
 (  $(1.5, -4.48)max$  ו-  $(4, 6.07)min$  )



שאלה 6

א. תחום עלייה:  $x > 1$ ,

תחום ירידה:  $x < 1$ .

ה. שרטוט הגרף של  $f(x)$

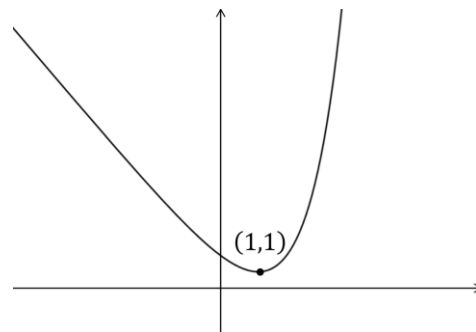
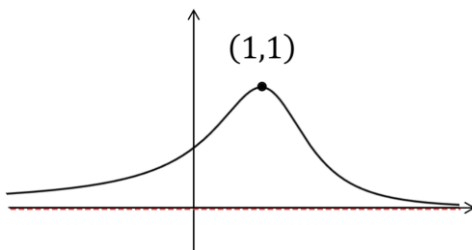
ב.  $(1,1)min$

ג.  $(0,2)$

ד. אין

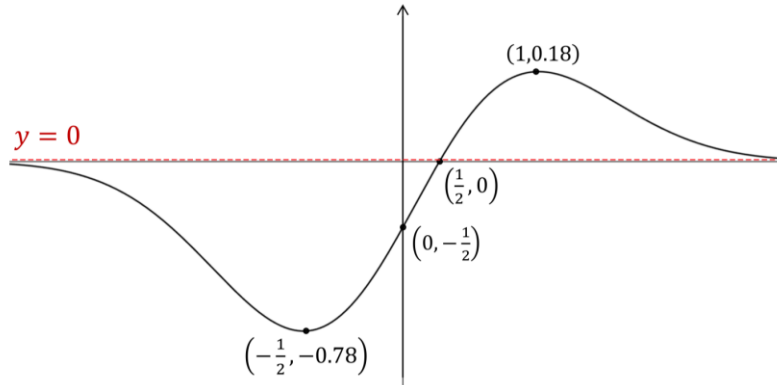
ו. כל  $x$

ז. שרטוט הגרף של  $g(x)$ .



שאלה 7

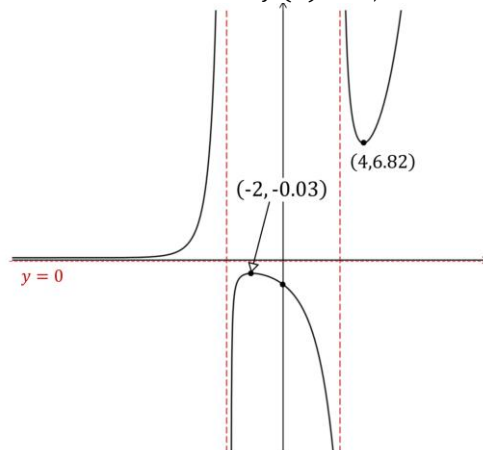
- א.  $a = 0.5$   
 ב. שרטוט הגרף של  $f(x)$



שאלה 8

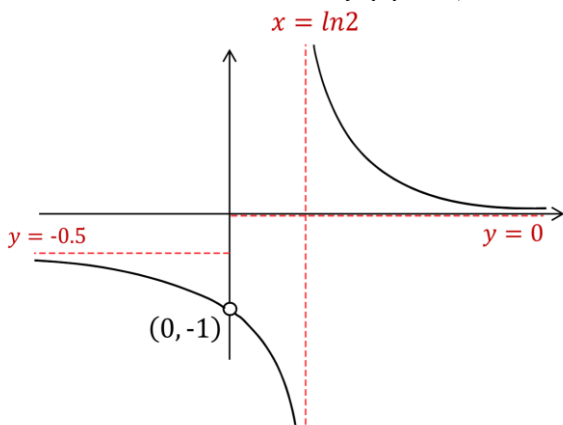
- א.  $n = \frac{e^4}{8}, m = -8$

- ב. שרטוט הגרף של  $f(x)$



שאלה 9

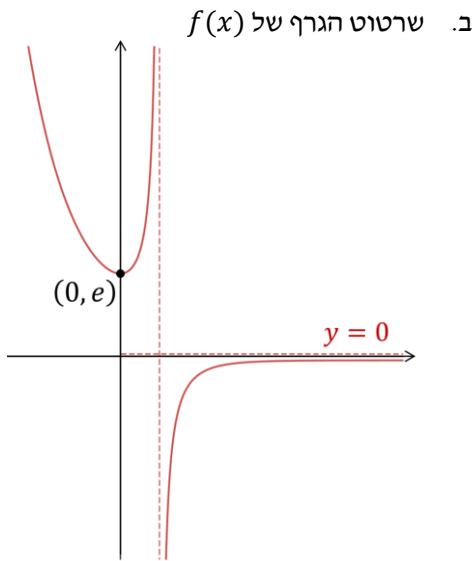
- ד. שרטוט הגרף של  $f(x)$



- א.  $a = -3, a = 2$   
 ב. תחום הגדרה:  $x \neq 0, x \neq \ln 2$   
 אסי אנכית:  $x = \ln 2$ . חור:  $(0, -1)$   
 אסי אופקיות:  $y = -\frac{1}{2}$  as  $x \rightarrow -\infty$ ,  $y = 0$  as  $x \rightarrow \infty$   
 ג. תחומי ירידה:  $x < \ln 2$  או  $x > \ln 2$ ,  $x \neq 0$   
 תחומי עלייה: אין.  
 ה. אסי אנכית:  $x = \ln 2$ . חור:  $(0, -b + c)$   
 אסי אופקיות:  $y = -\frac{1}{2}b + c$  as  $x \rightarrow -\infty$ ,  $y = c$  as  $x \rightarrow \infty$

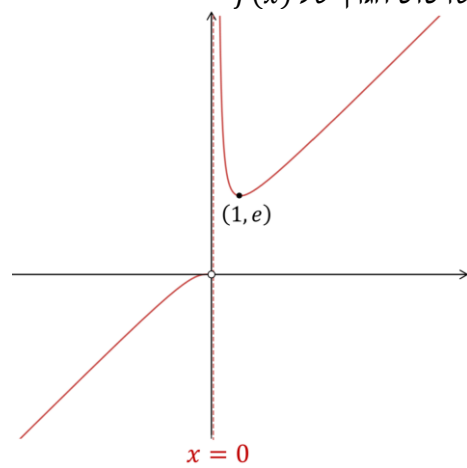
שאלה 10

- א.  $k = -1$
- ג. לא
- ד. תחום עלייה:  $0 < x < 1$   
תחומי ירידה:  $x < 0$  או  $x > 1$

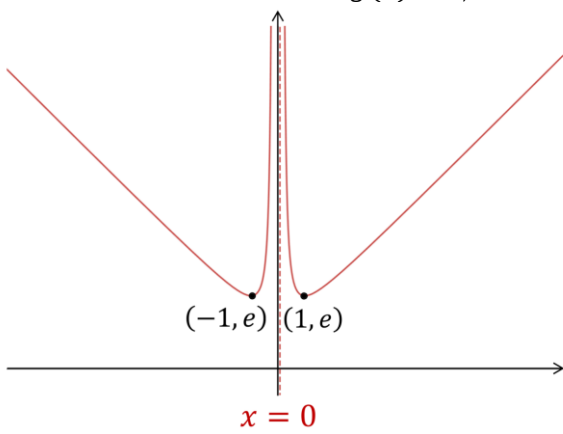


שאלה 11

א. שרטוט הגרף של  $f(x)$



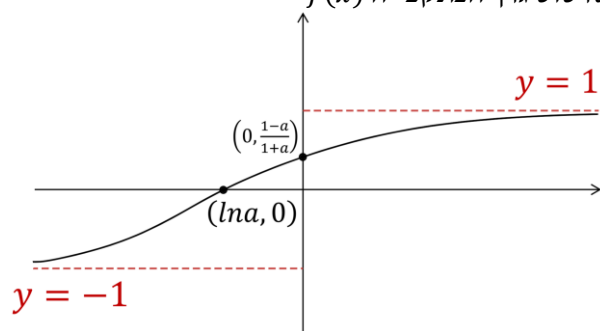
ב. שרטוט הגרף של  $g(x)$



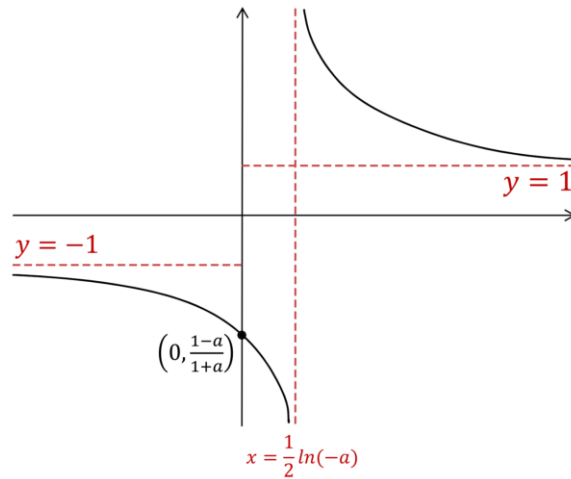
שאלה 12

- א. כל  $x$
- ג.  $(\ln a, 0)$ ,  $(0, \frac{1-a}{1+a})$
- ד. תחום עלייה: כל  $x$ , תחום ירידה: אין.  
 $y = 1$ ,  $y = -1$  as  $x \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow -\infty$

ה. שרטוט גרף הפונקצייה  $f(x)$



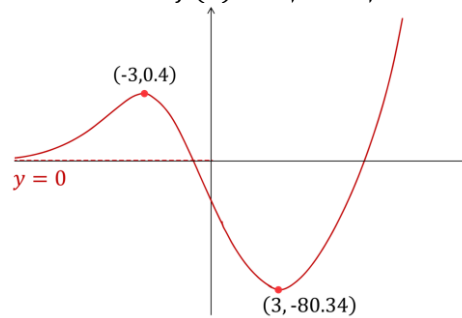




שאלה 15

- א. כל  $x$ .  
 ב.  $k > -2$ .  
 ג.  $k = 7$ .

ד. שרטוט גרף הפונקצייה  $f(x)$



תרגיל 25 פונקציה מעריכית – חקירה מלאה – בסיס שאינו  $e$   
 לפני התרגילים הבאים יש לעבור בצורה יסודית על תרגילים 20, 21, 23

- נתונה הפונקציה  $f(x) = -x \cdot 9^x$ .
  - מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה.
  - מצאו את תחומי העלייה והירידה.
  - מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
  - מצאו את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים אם יש כאלה.
  - שרטטו את גרף הפונקציה  $f(x)$ .
- נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{4^x}{x}$ .
  - מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
  - מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה.
  - מצאו את תחומי העלייה והירידה.
  - מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
  - מצאו את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.
  - שרטטו את גרף הפונקציה  $f(x)$ .
- נתונה הפונקציה  $f(x) = x^3 \cdot 7^{\frac{1}{x}} - 2$ .
  - מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
  - מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה.
  - מצאו את תחומי העלייה והירידה.
  - מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $y$ .

- ה. מצאו את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים (אם יש כאלה).  
ו. שרטטו את גרף הפונקציה  $f(x)$ .

4. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \frac{4^x}{2^x+a}$  בנקודה שבה  $x = 2$  הוא  $\frac{32}{9} \ln 2$ .

- א. מצאו את שני הערכים האפשריים של  $a$ .  
הציבו בפונקציה את ה- $a$  הקטן מבין השניים שמצאתם בסעיף א' ומצאו את:  
ב. תחום ההגדרה של הפונקציה.  
ג. נקודת הקיצון של הפונקציה.  
ד. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.  
ה. אסימפטוטות מאונכות לצירים.  
ו. שרטטו את גרף הפונקציה.

5. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$ .

- א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.  
ב. הוכיחו שהפונקציה היא אי-זוגית.  
ג. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).  
ד. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם הצירים.  
ה. מצאו את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים (אם יש כאלה).  
ו. שרטטו את גרף הפונקציה  $f(x)$ .  
ז. נתונה הפונקציה  $g(x)$  המוגדרת כך  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ . שרטטו את הגרף שלה.

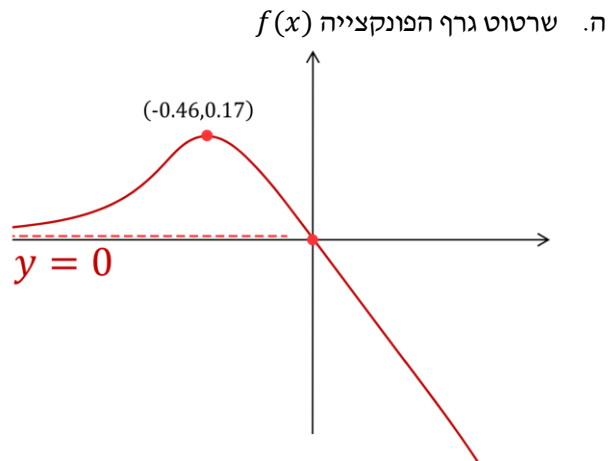
6. לפונקציה  $f(x) = 9^x + a \cdot 3^x - b$  יש נקודת קיצון בנקודה  $(\log_3 2, -1)$ .

- א. מצאו את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .  
ב. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.  
ג. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.  
ד. מצאו את תחומי העלייה והירידה.  
ה. מצאו את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים (אם יש כאלה).  
ו. שרטטו את גרף הפונקציה  $f(x)$ .

## פתרונות לתרגיל 25

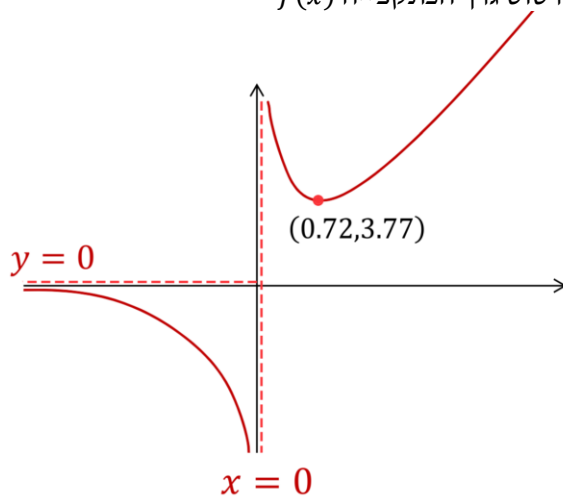
### שאלה 1

- א.  $\max(-0.46, 0.17)$ .  
ב. תחום עלייה:  $x > -0.46$ .  
ג.  $(0, 0)$ .  
ד.  $y = 0$  כ- $x \rightarrow -\infty$ .  
ה. שרטטו את גרף הפונקציה  $f(x)$ .



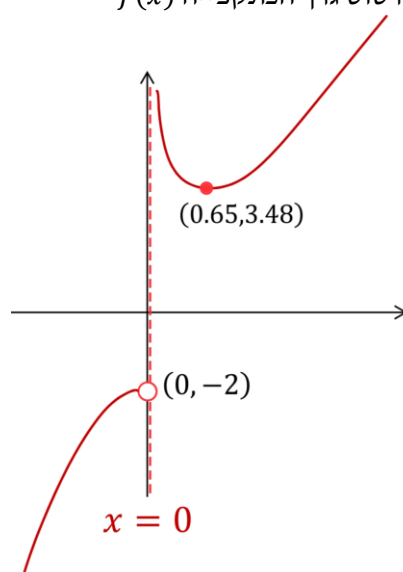
שאלה 2

- א.  $x \neq 0$
  - ג. תחום עלייה:  $x > 0.72$ ,
  - תחומי ירידה:  $0 < x < 0.72$  או  $x < 0$ .
  - ה. אסימפטוטה אנכית:  $x = 0$ .
  - אסימפטוטה אופקית:  $y = 0$ .
  - ו. שרטוט גרף הפונקצייה  $f(x)$
- ב.  $\min(0.72, 3.77)$
- ד. אין.



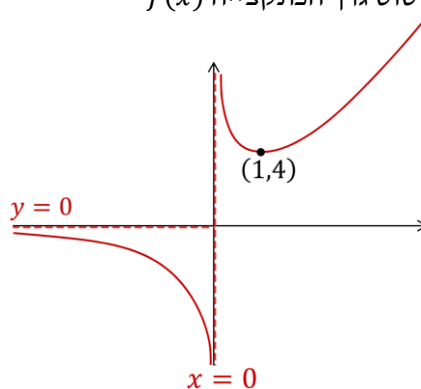
שאלה 3

- א.  $x \neq 0$
  - ג. תחומי עלייה:  $x > 0.65$  או  $x < 0$ ,
  - תחום ירידה:  $0 < x < 0.65$ .
  - ה. אסימפטוטה אנכית:  $x = 0$ .
  - אסימפטוטה אופקית: אין.
  - ו. שרטוט גרף הפונקצייה  $f(x)$
- ב.  $\min(0.65, 3.48)$
- ד.  $(0, -2)$



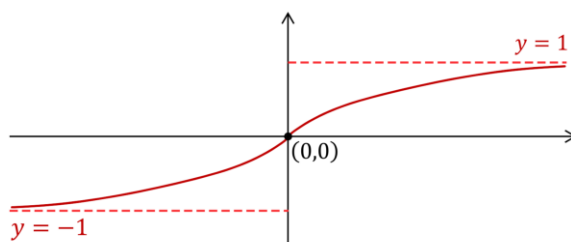
שאלה 4

- א.  $a = -1$  או  $a = 2$ .  
 ג.  $\min(1,4)$ .  
 ה. אסימפטוטה אנכית:  $x = 0$ .  
 ו. אסימפטוטה אופקית:  $y = 0$ .  
 ז. שרטוט גרף הפונקצייה  $f(x)$   $x \rightarrow -\infty$ .
- ב.  $x \neq 0$ .  
 ד. תחום עלייה:  $x > 1$ ,  
 תחומי ירידה:  $0 < x < 1$  או  $x < 0$ .

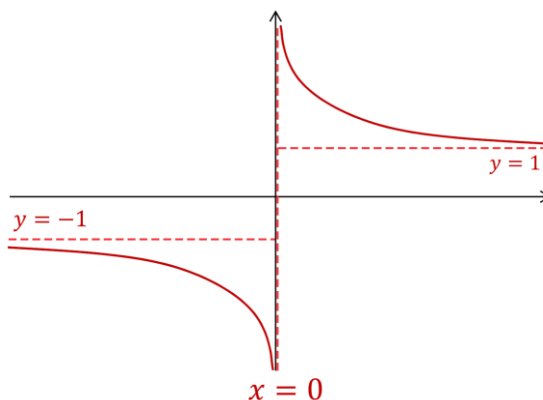


שאלה 5

- א. כל  $x$ .  
 ג. תחומי עלייה: כל  $x$ ,  
 תחום ירידה: אין.  
 ה. אסימפטוטה אנכית: אין.  
 ו. אסימפטוטות אופקיות:  $y = 1$ ,  $y = -1$ .  
 ז. שרטוט גרף הפונקצייה  $f(x)$   $x \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow -\infty$ .
- ב. הוכחה.  
 ד.  $(0,0)$ .



ז. שרטוט גרף הפונקצייה  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$



שאלה 6

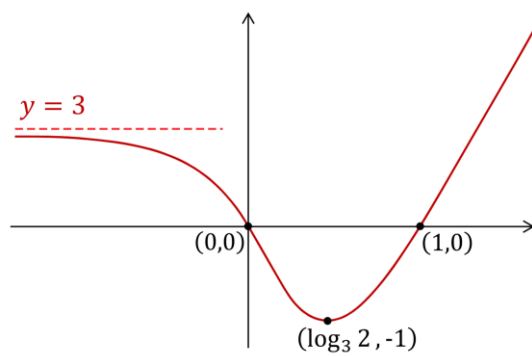
א.  $a = -4, b = -3$

ג.  $..(0,0), (1,0)$

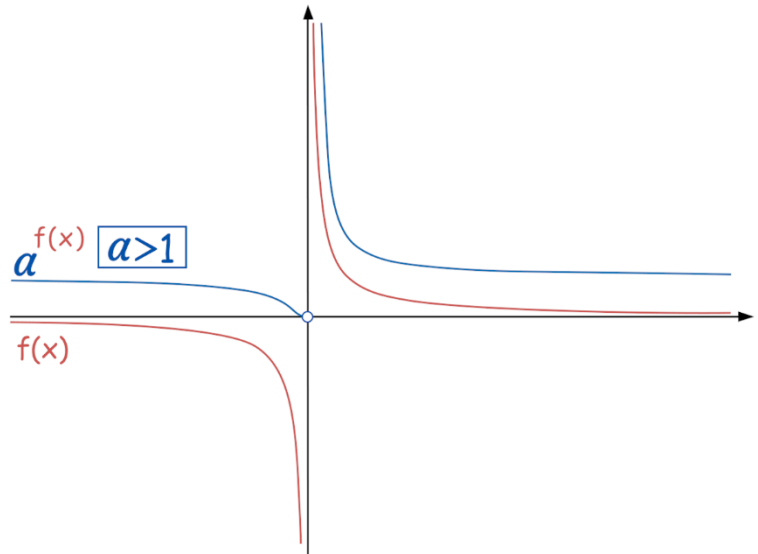
ה.  $y = 3$   
 $x \rightarrow -\infty$

ו. שרטוט גרף הפונקצייה  $f(x)$

- ב. כל  $x$ .  
ד. תחומי עלייה:  $x > \log_3 2$ ,  
תחום ירידה:  $x < \log_3 2$ .



תרגיל 26 פונקציה מעריכית – חקירת  $a^f(x)$  בהנתן הגרף של  $f(x)$ . עבור  $a > 1$ .



**תחום הגדרה-**

- הפונקציה  $y = a^{f(x)}$  מוגדרת בתחומים בהם  $f(x)$  מוגדרת.
- באופן כללי אם הנקודה  $(x_1, y_1)$  נמצאת על גרף הפונקציה  $f(x)$  אז הנקודה  $(x_1, a^{y_1})$  נמצאת על הגרף של  $y = a^{f(x)}$ .

**אסימפטוטות אופקיות-**

- אם לפונקציה  $f(x)$  יש בצד מסוים אסימפטוטה אופקית  $y = k$  לפונקציה  $y = a^{f(x)}$  תהיה באותו הצד אסימפטוטה אופקית  $y = a^k$ .
- אם לפונקציה  $f(x)$  בצד מסוים אין אסימפטוטה אופקית כך **שערכיה שואפים למינוס אינסוף** אז באותו הצד לפונקציה  $y = a^{f(x)}$  תהיה אסימפטוטה אופקית  $y = 0$ .
- אם לפונקציה  $f(x)$  בצד מסוים אין אסימפטוטה אופקית כך **שערכיה שואפים לאינסוף** אז באותו הצד לפונקציה  $y = a^{f(x)}$  לא תהיה אסימפטוטה אופקית וערכיה ישאפו לאינסוף גם הם.

**אסימפטוטות אנכיות-**

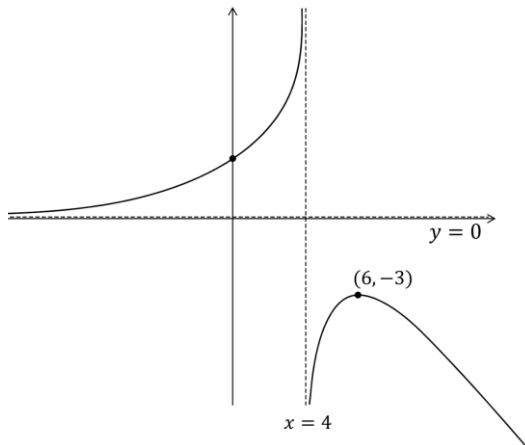
- אם לפונקציה  $f(x)$  יש אסימפטוטה אנכית  $x = k$  כך שבצד מסוים של האסימפטוטה **ערכיה שואפים לאינסוף** אז לפונקציה  $y = a^{f(x)}$  תהיה אסימפטוטה אנכית  $x = k$  וערכיה ישאפו לאינסוף מאותו הצד.
- אם לפונקציה  $f(x)$  יש אסימפטוטה אנכית  $x = k$  כך שבצד מסוים של האסימפטוטה **ערכיה שואפים למינוס אינסוף** אז לפונקציה  $y = a^{f(x)}$  יהיה חור ב- $(k, 0)$ .

**תחומי עליה וירידה-**

תחומי העליה של  $f(x)$  ושל  $y = a^{f(x)}$  זהים.

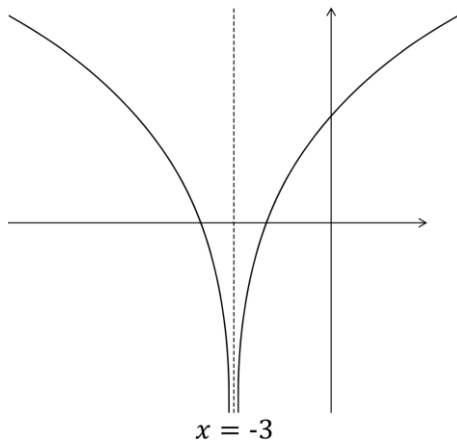
**תחומי חיוביות ושליליות של  $y = a^{f(x)}$**

- הפונקציה  $y = a^{f(x)}$  חיובית בכל תחום הגדרתה.



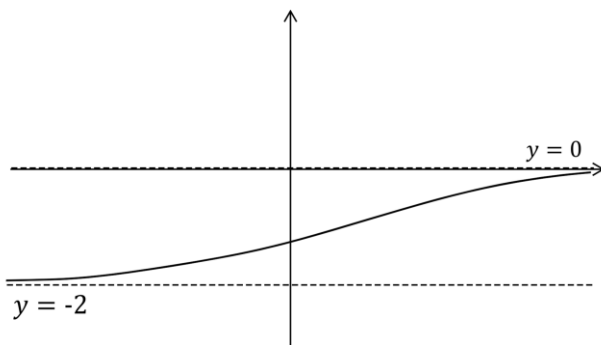
א. לפניכם הגרף של הפונקציה  $f(x)$ .  
יש לה אסימפטוטה אנכית  $x = 4$ , אסימפטוטה אופקית  $y = 0$  ונקודת מקסימום ששיעורי הם  $(6, -3)$ .  
 $x \rightarrow -\infty$

העזרו בגרף של הפונקציה  $f(x)$  ושרטטו את הגרף של הפונקציה  $g(x)$  המוגדרת באופן הבא:  $g(x) = 3^{f(x)}$ .



ב. לפניכם הגרף של הפונקציה  $f(x)$ .  
יש לה אסימפטוטה אנכית  $x = -3$  ואין לה אסימפטוטה אופקית.

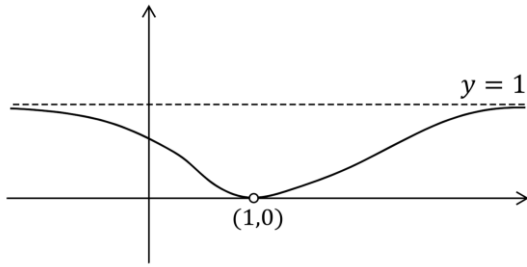
העזרו בגרף של הפונקציה  $f(x)$  ושרטטו את הגרף של הפונקציה  $g(x)$  המוגדרת באופן הבא:  $g(x) = e^{f(x)}$ .



ג. לפניכם הגרף של הפונקציה  $f(x)$  (הפונקציה מוגדרת לכל  $x$  והאסימפטוטות האופקיות שלה הן:  $y = 0$  ו-  $y = -2$ ).  
 $x \rightarrow -\infty$   $x \rightarrow \infty$

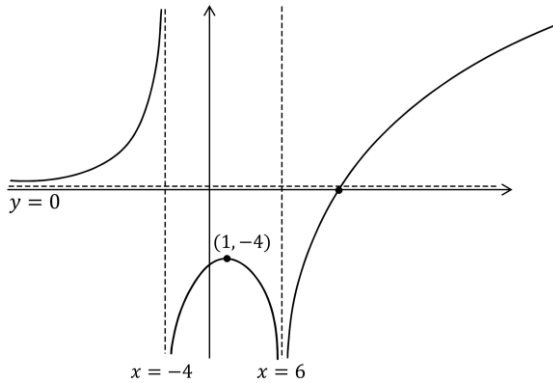
העזרו בגרף של הפונקציה  $f(x)$  ושרטטו את הגרף של הפונקציה  $g(x)$  המוגדרת באופן הבא:

$$g(x) = 2^{f(x)}$$



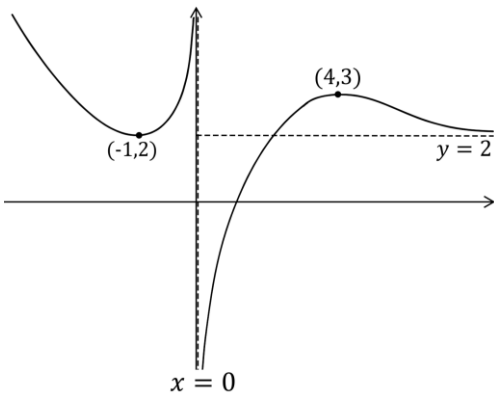
ד. לפניכם הגרף של הפונקציה  $f(x)$ .  
 לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית  $y = 1$   
 וחורב ב- $(1,0)$

העזרו בגרף של הפונקציה  $f(x)$  ושרטטו את הגרף של  
 הפונקציה  $g(x)$  המוגדרת באופן הבא:  
 $g(x) = e^{f(x)}$



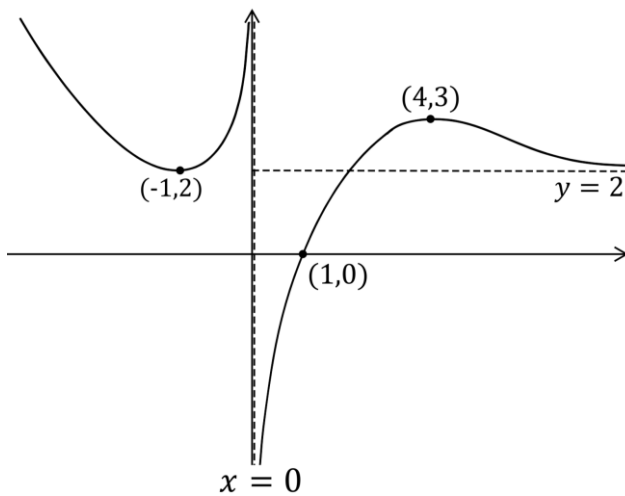
ה. לפניכם הגרף של הפונקציה  $f(x)$ .  
 לפונקציה יש 2 אסימפטוטות אנכיות  $x = -4$  ו- $x = 6$ .  
 לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית  $y = 0$   
 בצד ימין אין לה אסימפטוטה אופקית וערכי שואפים ל- $\infty$ .  
 לפונקציה יש נקודת מקסימום  $(1, -4)$  כמתואר בשרטוט.

העזרו בגרף של הפונקציה  $f(x)$  ושרטטו את הגרף של  
 הפונקציה  $g(x)$  המוגדרת באופן הבא:  
 $g(x) = e^{f(x)}$



ו. לפניכם הגרף של הפונקציה  $f(x)$ .  
 לפונקציה יש אסימפטוטה אנכית  $x = 0$ . לפונקציה יש  
 אסימפטוטה אופקית  $y = 2$   
 בצד שמאל אין לה אסימפטוטה אופקית וערכי שואפים ל- $\infty$ .  
 לפונקציה יש נקודת מקסימום  $(4,3)$  ונקודת מינימום  $(-1,2)$   
 כמתואר בשרטוט.

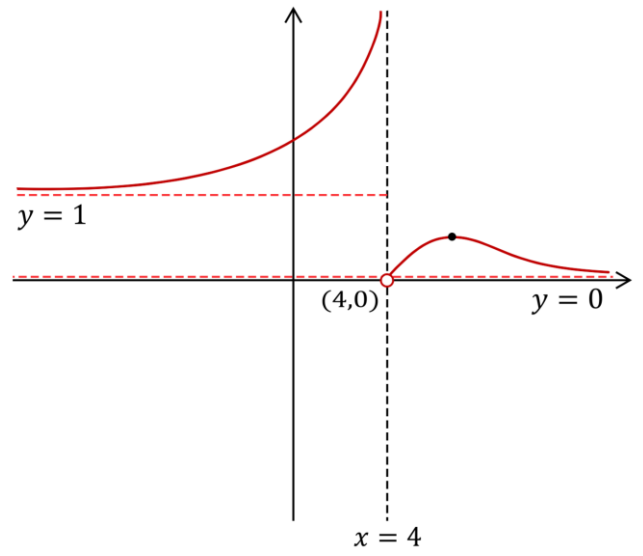
העזרו בגרף של הפונקציה  $f(x)$  ושרטטו את הגרף של הפונקציה  
 $g(x)$  המוגדרת באופן הבא:  
 $g(x) = e^{-f(x)}$



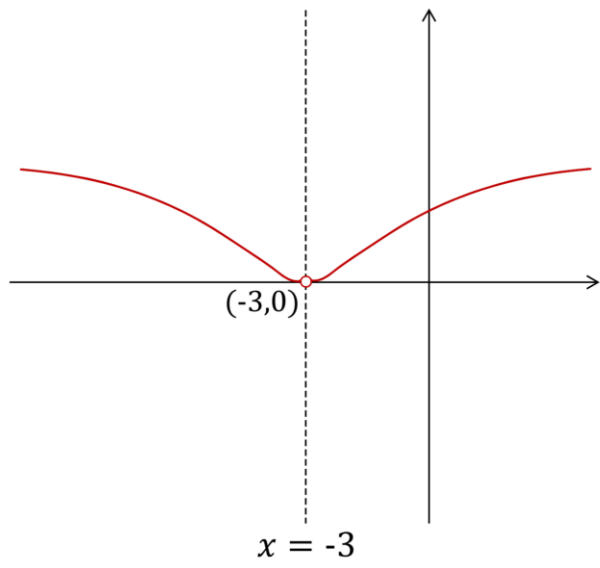
ז. לפניכם הגרף של הפונקציה  $f(x)$ .  
 לפונקציה יש אסימפטוטה אנכית  $x = 0$ . לפונקציה  
 יש אסימפטוטה אופקית  $y = 2$   
 בצד שמאל אין לה אסימפטוטה אופקית וערכי  
 שואפים ל- $\infty$ .  
 לפונקציה יש נקודת מקסימום  $(4,3)$  ונקודת מינימום  
 $(-1,2)$  כמתואר בשרטוט. הפונקציה חותכת את ציר  
 ה- $x$  ב- $(1,0)$

העזרו בגרף של הפונקציה  $f(x)$  ושרטטו את הגרף של  
 הפונקציה  $g(x)$  המוגדרת באופן הבא:  
 $g(x) = e^{\frac{1}{f(x)}}$

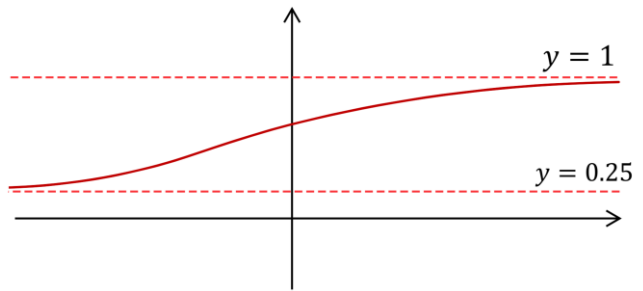
א.



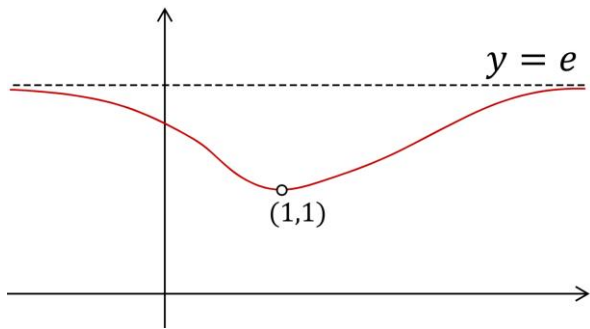
ב.



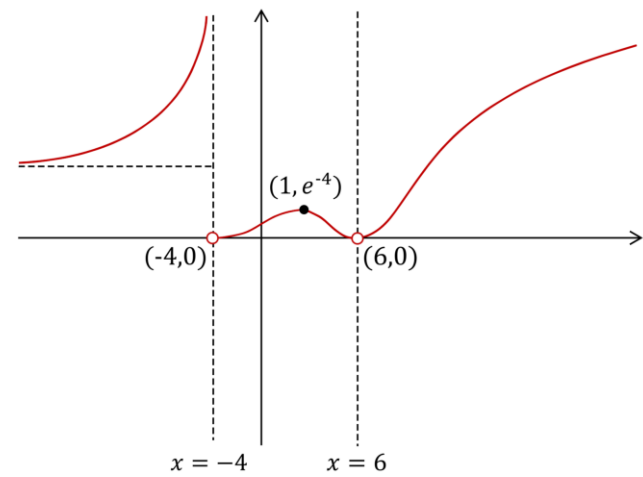
ג.



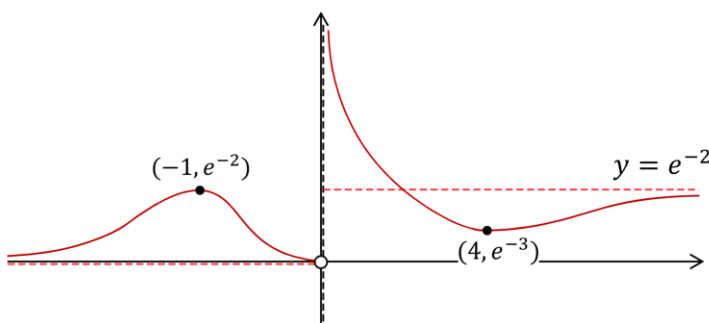
ד.

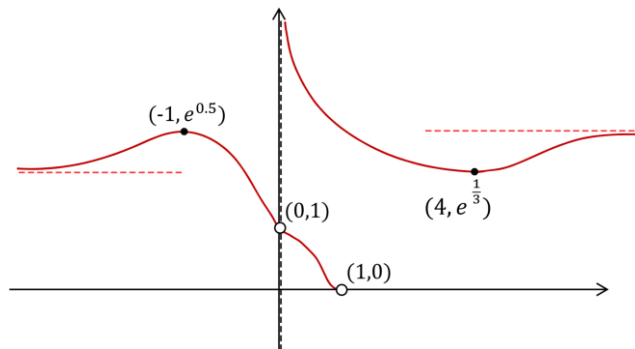


ה.



ו.





תרגיל 27 פונקציות לן – מציאת אסימפטוטה אופקית

בשאלון הזה כדי למצוא אסימפטוטה אופקית נרצה תמיד לבדוק  
**לאן שואפים ערכי ה-y של הפונקציה כאשר  $x \rightarrow \infty$  וכאשר  $x \rightarrow -\infty$**   
 (כמובן במידה והפונקציה מוגדרת כאשר  $x \rightarrow \infty$  וכאשר  $x \rightarrow -\infty$ )

מצאו את תחום ההגדרה ואת האסימפטוטות האופקיות של הפונקציות הבאות (אם יש כאלה)

- |  |   |
|--|---|
| <p>א. <math>f(x) = \frac{3}{\ln x}</math></p> <p>ב. <math>f(x) = \frac{\ln x}{x-2}</math></p> <p>ג. <math>f(x) = \frac{\ln^4(x)}{x-4}</math></p> <p>ד. <math>f(x) = \frac{x+1}{\ln x}</math></p> <p>ה. <math>f(x) = \frac{\ln(x^2)}{x+1}</math></p> <p>ו. <math>f(x) = \frac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)+1}</math></p> <p>ז. <math>f(x) = \frac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)-3\ln(x)+2}</math></p> <p>ח. <math>f(x) = \frac{x-1}{\ln^2(x)+1}</math></p> <p>ט. <math>f(x) = \frac{1}{\ln x - 1}</math></p> <p>י. <math>f(x) = \frac{1}{\ln(x^2)}</math></p> <p>יא. <math>f(x) = \ln(x-4)</math></p> <p>יב. <math>f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)</math></p> <p>יג. <math>f(x) = \frac{x \cdot \ln x}{\ln x + 4}</math></p> <p>יד. <math>f(x) = 2\ln x - x</math></p> <p>יז. <math>f(x) = \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln\left(\frac{1}{x}\right)+1}</math></p> | <p>א. <math>f(x) = \frac{3}{\ln x}</math></p> <p>ב. <math>f(x) = \frac{\ln^4(x)}{x-4}</math></p> <p>ג. <math>f(x) = \frac{\ln(x^2)}{x+1}</math></p> <p>ד. <math>f(x) = \frac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)+1}</math></p> <p>ה. <math>f(x) = \frac{\ln^2(x)-5\ln(x)}{\ln^2(x)-\ln(x)+4}</math></p> <p>ו. <math>f(x) = \frac{2\ln(-x)}{\ln^2(-x)-4}</math></p> <p>ז. <math>f(x) = \ln x + \frac{1}{\ln x}</math></p> <p>ח. <math>f(x) = \ln^2 x - 2\ln x</math></p> <p>ט. <math>f(x) = \ln(1-x)</math></p> <p>י. <math>f(x) = \ln\left(\frac{e^2 x + 1}{x-1}\right)</math></p> <p>יא. <math>f(x) = 2\ln\left(\frac{1}{x}\right) + x</math></p> <p>יב. <math>f(x) = \frac{3}{x \cdot \ln x}</math></p> <p>יג. <math>f(x) = \frac{\ln(-x)+2}{\ln(-x)+1}</math></p> |
|--|---|

פתרונות

- |   |   |
|---|---|
| <p>א. תחום הגדרה: <math>x &gt; 0, x \neq 1</math> <math>y = 0</math> <math>x \rightarrow \infty</math></p> <p>ב. תחום הגדרה: <math>x &gt; 0, x \neq 2</math> <math>y = 0</math> <math>x \rightarrow \infty</math></p> <p>ג. תחום הגדרה: <math>x &gt; 0, x \neq 4</math> <math>y = 0</math> <math>x \rightarrow \infty</math></p> <p>ד. תחום הגדרה: <math>x &gt; 0, x \neq 1</math> אין אסימפטוטה אופקית</p> | <p>א. תחום הגדרה: <math>x &gt; 0, x \neq 1</math> <math>y = 0</math> <math>x \rightarrow \infty</math></p> <p>ב. תחום הגדרה: <math>x &gt; 0, x \neq 2</math> <math>y = 0</math> <math>x \rightarrow \infty</math></p> <p>ג. תחום הגדרה: <math>x &gt; 0, x \neq 4</math> <math>y = 0</math> <math>x \rightarrow \infty</math></p> <p>ד. תחום הגדרה: <math>x &gt; 0, x \neq 1</math> אין אסימפטוטה אופקית</p> |
|---|---|



$f(x) = \frac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)-1}$ .ח	$f(x) = \frac{\ln^2 x - 4}{\ln x - 4}$ .ז
$f(x) = \frac{\ln^2(x)-5\ln(x)}{\ln^2(x)-\ln(x)+4}$ .ט	$f(x) = \frac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)-3\ln(x)+2}$ .טו
$f(x) = x \cdot \ln x$ .יב	$f(x) = (x-4) \ln(x-4) + 1$ .יא
$f(x) = \ln(3x-2)$ .יד	$f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$ .יג
$(a < 0) f(x) = (ax+3) \ln(ax+3)$ .טז	$f(x) = (x^2 - x - 2) \cdot \ln(x^2 - x - 2)$ .טו
$f(x) = \frac{x-1}{\ln^2(x)+1}$ .יח	$f(x) = \frac{\ln(-x^2-3x+4)}{(-x^2-3x+4)}$ .יז
$f(x) = \ln x + \frac{1}{\ln x}$ .כ	$f(x) = \frac{2\ln(-x)}{\ln^2(-x)-4}$ .יט
$f(x) = \ln^2 x - 2\ln x$ .כב	$f(x) = \frac{1}{\ln(x^2)}$ .כא
$f(x) = \ln(x-4)$ .כד	$f(x) = \ln(1-x)$ .כג
$f(x) = \ln\left(\frac{x^2+x}{x^2-x}\right)$ .כו	$f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$ .כה
$f(x) = \ln\left(\frac{x^2+x-20}{x^2+4x-5}\right)$ .כח	$f(x) = \ln\left(\frac{-x^2+3x-2}{x^2-5x+6}\right)$ .כז

פתרונות

$x = 2; x = 0$ .ב	$x = e$ ; חור (0,0) .א
$x = 1$ ; חור (0,0) .ד	$x = 6; x = 4$ .ג
$x = \frac{1}{e}$ ; חור (0,1) .ו	$x = -2; x = 0$ .ה
$x = \frac{1}{e}$ ; חור $(e, \frac{1}{2})$ , חור (0,0) .ח	$x = e^4; x = 0$ .ז
חור (0,1) .י	$x = e^2$ ; חור (e, -1), חור (0,0) .ט
חור (0,0) .יב	חור (4,1) .יא
$x = \frac{2}{3}$ .יד	$x = 2; x = 1$ .יג
חור $(-\frac{3}{a}, 0)$ .טז	חור (2,0), חור (-1,0) .טו
חור (0,0) .יח	$x = -4; x = 1$ .יז
$x = 0; x = 1$ .כ	חור (0,0); $x = -\frac{1}{e^2}$ ; $x = -e^2$ .יט
$x = 0$ .כב	חור (0,0); $x = -1$ ; $x = 1$ .כא
$x = 4$ .כד	$x = 1$ .כג
$x = -1; x = 1$ .כו	$x = -2; x = 2$ .כה
חור (-5, ln 1.5); $x = 4$ ; $x = 1$ .כח	חור (0,0); $x = 1$ ; $x = 3$ .כז

תרגיל 30 פונקציה לוגריתמית בסיס שאינו e – מציאת אסימפטוטה אנכית

תרגיל 31 פונקציה לוגריתמית נגזרות בסיס e (נגזרת של לן)

$$y = \ln(f(x)) \rightarrow y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

גזרו את הפונקציות הבאות וסדרו את הנגזרת עד שתגיעו לביטוי המופיע בתשובות

א.  $f(x) = \ln(x^3 - 1) + \frac{1}{x}$       ב.  $f(x) = 2\ln x + x^3 + 2$

ג.  $f(x) = 3\ln\left(\frac{1}{x^2-1}\right)$       ד.  $f(x) = \frac{\ln x}{3}$

ה.  $f(x) = \ln(x^3)$       ו.  $f(x) = \ln^2 x$

ז.  $f(x) = 4\ln^3 x$       ח.  $f(x) = \ln x + \frac{1}{\ln x}$

ט.  $f(x) = 4x \ln x$       י.  $f(x) = \frac{\ln x + 1}{x^2}$

יא.  $f(x) = \frac{\ln x + 1}{2\ln x - 1}$       יב.  $f(x) = \frac{x-1}{\ln^2 x + 1}$

יג.  $f(x) = \frac{\ln^3 x - 1}{x \ln x}$       יד.  $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

טו.  $f(x) = \frac{\ln(2x+6)}{2x+6}$       טז.  $f(x) = \ln^4(2x)$

יז.  $f(x) = x \ln^n x$       יח.  $f(x) = \frac{\ln x + a}{\ln x - a}$

יט.  $f(x) = \frac{1-x}{\ln(1-x)}$       כ.  $f(x) = 2\ln^4(-x) - \ln^3(-x) + 4\ln^2(-x)$

פתרונות

א.  $f'(x) = \frac{3x^2}{x^3-1} - \frac{1}{x^2}$       ב.  $f'(x) = \frac{2}{x} + 3x^2$

ג.  $f'(x) = -\frac{6x}{x^2-1}$       ד.  $f'(x) = \frac{1}{3x}$

ה.  $f'(x) = \frac{3}{x}$       ו.  $f'(x) = \frac{2\ln x}{x}$

ז.  $f'(x) = \frac{12\ln^2 x}{x}$       ח.  $f'(x) = \frac{\ln^2 x - 1}{x \ln^2 x}$

ט.  $f'(x) = 4\ln x + 4$       י.  $f'(x) = \frac{-1-2\ln x}{x^3}$

יא.  $f'(x) = \frac{-3}{x(2\ln x - 1)^2}$       יב.  $f'(x) = \frac{x \ln^2 x + x - 2x \ln x + 2\ln x}{x(\ln^2 x + 1)^2}$

יג.  $f'(x) = \frac{2\ln^3 x - \ln^4 x + \ln x + 1}{x^2 \ln^2 x}$       יד.  $f'(x) = -\frac{1}{x(x-1)}$

טו.  $f'(x) = \frac{1-\ln(2x+6)}{2(x+3)^2}$       טז.  $f'(x) = \frac{4\ln^3(2x)}{x}$

יז.  $f'(x) = (\ln x)^{n-1} \cdot (\ln x + n)$       יח.  $f'(x) = \frac{-2a}{x(\ln x - a)^2}$

יט.  $f'(x) = \frac{-\ln(1-x)+1}{\ln^2(1-x)}$       כ.  $f'(x) = \frac{\ln(-x)}{x} (8\ln^2(-x) - 3\ln(-x) + 8)$

תרגיל 32 פונקציה לוגריתמית נגזרות בסיס שאינו e  
תרגיל 33 פונקציה לוגריתמית -חקירת פונקצית לן

**לפני שאתם ניגשים לפתור את התרגילים הבאים ודאו שפתרתם היטב את תרגיל 27,28 ו-31 המופיעים לפני תרגיל זה ועוסקים באסימפטוטות תחום הגדרה ונגזרות.**

1. נתונה הפונקציה  $f(x) = x \ln x$

- מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
  - מצאו את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה (אם יש כאלה).
  - מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה ואת תחומי העליה והירידה שלה.
  - מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
  - שרטטו את גרף הפונקציה.
- ו.  $g(x)$  היא פונקציה המקיימת  $g'(x) = f(x)$  בתחום  $x > 0$
- מצאו את שיעור ה- $x$  של נקודת הקיצון של  $g(x)$  וקבעו את סוגה.
  - מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $g(x)$ .
  - מצאו את שיעור ה- $x$  של נקודת הפיתול של הפונקציה  $g(x)$ .

2. נתונה הפונקציה  $f(x) = 4 \ln x + \frac{1}{\ln x}$

- מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
  - מצאו את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה (אם יש כאלה).
  - מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה ואת תחומי העליה והירידה שלה.
  - מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
  - שרטטו את גרף הפונקציה.
- ו. ידוע שהאסימפטוטות המאונכות לציר ה- $x$  של פונקצית הנגזרת  $f'(x)$  הן כמו של הפונקציה  $f(x)$ . העזרו בגרף של  $f(x)$  ושרטטו סקיצה של גרף פונקצית הנגזרת  $f'(x)$  אם ידוע שלפונקציה  $f(x)$  יש נקודת פיתול אחת בלבד הנמצאת מימין לנקודת המינימום שלה והאסימפטוטה האופקית של  $f'(x)$  היא ציר ה- $x$ .

3. נתונה הפונקציה:  $f(x) = 2 \ln x - \ln^2 x$

- מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
  - מצאו את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה (אם יש כאלה).
  - מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה ואת תחומי העליה והירידה שלה.
  - מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
  - שרטטו את גרף הפונקציה.
- ו.  $g(x)$  היא פונקציה המקיימת  $g'(x) = f(x)$  בתחום  $x > 0$
- מצאו את שיעורי ה- $x$  של נקודות הקיצון של  $g(x)$  וקבעו את סוגן.
  - מצאו את שיעור ה- $x$  של נקודת הפיתול של הפונקציה  $g(x)$  וכתבו את תחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה שלה.

4. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{\ln x}{x^3}$

- מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
  - מצאו את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה.
  - מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה.
  - מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
  - שרטטו את גרף הפונקציה.
- ו.  $g(x)$  היא פונקציה המקיימת  $g'(x) = f(x)$  בתחום  $x > 0$
- מצאו את שיעור ה- $x$  של נקודת הקיצון של  $g(x)$  וקבעו את סוגה.
  - מצאו את שיעור ה- $x$  של נקודת הפיתול של הפונקציה  $g(x)$  וכתבו את תחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה שלה.

iii. נתון שהפונקציה  $g(x)$  חותכת את ציר ה- $x$  בנקודה אחת בלבד. נקודה זו היא הנקודה  $(\frac{1}{\sqrt{e}}, 0)$ . בנוסף יש לה אסימפטוטה אנכית. ואסידמפטוטה אופקית  $y=0$ . שרטטו בצורה כללית סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .

iv. הראו שמשוואת המשיק לגרף הפונקציה  $g(x)$  בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$  היא

$$y = -\frac{\sqrt{e^3}}{2}x + \frac{e}{2}$$

ז. נתונה הפונקציה  $h(x) = \sqrt{(f(x))^2}$ . מצאו את נקודת הקיצון של  $h(x)$ .

5. נתונה הפונקציה  $f(x) = -2x + x \ln(-x)$

- מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצאו את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה (אם יש כאלה).
- מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה ואת תחומי העליה והירידה שלה.
- מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
- שרטטו את גרף הפונקציה.

6. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2}{\ln^2 x}$

- מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- הסבירו מדוע הפונקציה חיובית בכל תחום הגדרתה.
- מצאו את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה (אם יש כאלה).
- מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה.
- מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
- שרטטו את גרף הפונקציה.
- נתונה הפונקציה  $g(x)$  המקיימת:  $g(x) = f(x) + a$ . ידוע שציר ה- $x$  משיק לפונקציה. מצאו את  $a$ .

ח. נתונה הפונקציה:  $h(x) = \frac{x^2}{\ln^2(-x)}$ . שרטטו אותה מבלי לבצע חקירה נוספת.

7. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{\ln(-x)}{x}$

- מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצאו את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה (אם יש כאלה).
- מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה ואת תחומי העליה והירידה שלה.
- מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
- שרטטו את גרף הפונקציה.
- נתונה הפונקציה:  $h(x) = \frac{\ln(-\frac{1}{x})}{x}$ . שרטטו אותה מבלי לבצע חקירה נוספת.

8. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{\sqrt{\ln x}}{x}$

- מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצאו את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה (אם יש כאלה).
- מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה ואת תחומי העליה והירידה שלה.
- מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
- שרטטו את גרף הפונקציה.

9. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{\ln^2 x - a}$  ( $a \neq 0$ ). בתשובתכם התייחסו לשני המקרים:  $a > 0$  ו- $a < 0$ .

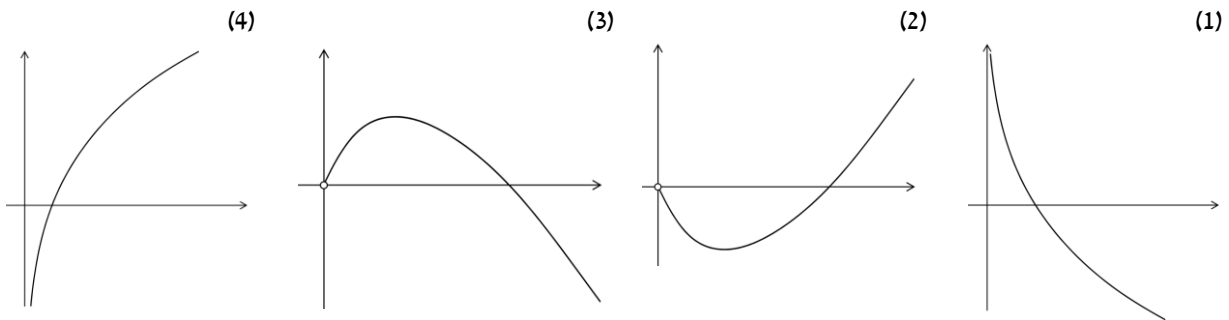
- מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצאו את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה (אם יש כאלה).
- מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה ואת תחומי העליה והירידה שלה.
- מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
- שרטטו את גרף הפונקציה.

נתון כי למשוואה  $f(x) = -\frac{1}{2}$  יש שני פתרונות.

1. מצאו את התחום שבו נמצא  $a$ .  
 2. נתונה הפונקציה:  $h(x) = f(|x|)$ . שרטטו אותה מבלי לבצע חקירה נוספת.

10. נתונה הפונקציה  $f(x) = 5 - a \ln(x^5)$  ( $a \neq 0$ ).  
 א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.  
 ב. הביעו בעזרת  $a$  את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .  
 ג. מצאו לאילו ערכי  $a$  הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה ולאילו ערכי  $a$  היא יורדת בכל תחום הגדרתה.  
 ד.  $g(x)$  היא פונקציה המקיימת:  $g'(x) = f(x)$  בתחום  $x > 0$ . ארבעת הגרפים הבאים מתארים, לווה דווקא לפי הסדר, את 4 הפונקציות הבאות:  
 i.  $f(x)$  עבור  $a > 0$ .  
 ii.  $f(x)$  עבור  $a < 0$ .  
 iii.  $g(x)$  עבור  $a > 0$ .  
 iv.  $g(x)$  עבור  $a < 0$ .

התאימו כל גרף לפונקציה שאותה הוא מתאר (הערה: קנה המידה לא מדויק וזהה בכל השרטוטים):

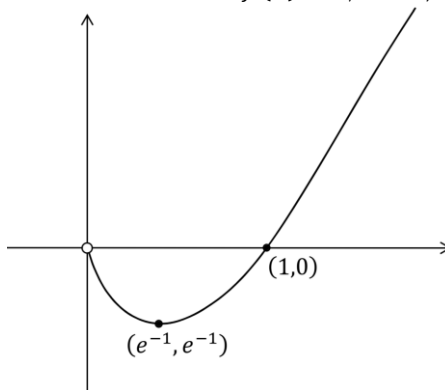


11. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \ln^2 x - a \ln x$ ,  $a > 0$ . בתשובתכם העזרו ב- $a$  במידת הצורך.  
 א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.  
 ב. מצאו את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה (אם יש כאלה).  
 ג. מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה.  
 ד. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).  
 ה. שרטטו את גרף הפונקציה.  
 ו. מצאו לאיזה ערך של  $a$  יש למשוואה  $f(x) = -1$  בדיוק פתרון אחד.  
 ז.  $g(x)$  היא פונקציה המקיימת  $g'(x) = f(x)$  בתחום  $x > 0$ .  
 i. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $g(x)$ .  
 ii. מצאו את תחומי הקעירות כלפי מעלה והקעירות כלפי מטה של הפונקציה  $g(x)$ .

12. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{\ln(ax-1)}{ax-1}$ ,  $a > 0$ . בתשובתכם העזרו ב- $a$  במידת הצורך.  
 א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.  
 ב. מצאו את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה (אם יש כאלה).  
 ג. מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה.  
 ד. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).  
 ה. שרטטו את גרף הפונקציה.  
 ו. הסבירו מדוע חייבת להיות לפונקציה  $f(x)$  נקודת פיתול אשר שיעור ה- $x$  שלה מקיים  $x > \frac{e+1}{a}$ .  
 ז. בהנחה שלפונקציה יש רק נקודת פיתול אחד שרטטו סקיצה של גרף הנגזרת  $f'(x)$ .

1.  $f(x) = x \ln x$

- א. תחום ההגדרה:  $x > 0$ .
- ב. אין אסימפטוטות. (יש חור ב- $(0,0)$ )
- ג.  $\min(e^{-1}, e^{-1})$ .
- ד.  $(1,0)$ .
- ה. גרף הפונקציה  $f(x)$ :

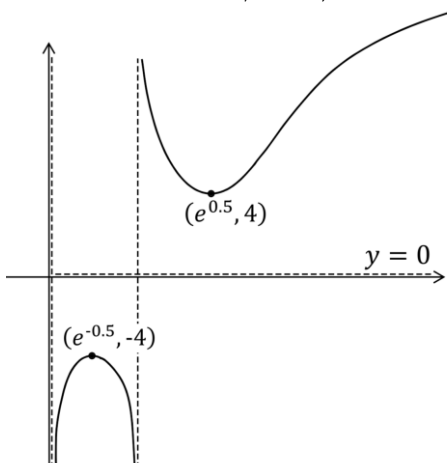


ו.  $g(x)$  היא פונקציה המקיימת  $g'(x) = f(x)$

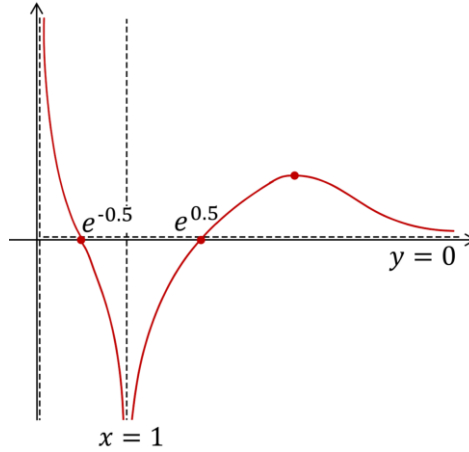
- i.  $\min x = 1$
- ii. תחום ירידה:  $0 < x < 1$ , תחום עלייה:  $x > 1$ .
- iii.  $x = e^{-1}$ .

2. נתונה הפונקציה  $f(x) = 4 \ln x + \frac{1}{\ln x}$

- א. תחום ההגדרה:  $x > 0, x \neq 1$ .
- ב. אסימפטוטות אנכיות:  $x = 1, x = 0$ . אסימפטוטות אופקיות: אין.
- ג.  $\min(e^{0.5}, 4), \max(e^{-0.5}, -4)$ .
- ד. תחומי עלייה:  $0 < x < e^{-0.5}$  או  $x > e^{0.5}$ .
- ה. תחומי ירידה:  $e^{-0.5} < x < 1$  או  $1 < x < e^{0.5}$ .
- ו. אין נקודות החיתוך עם הצירים.
- ז. שרטוט את גרף הפונקציה:

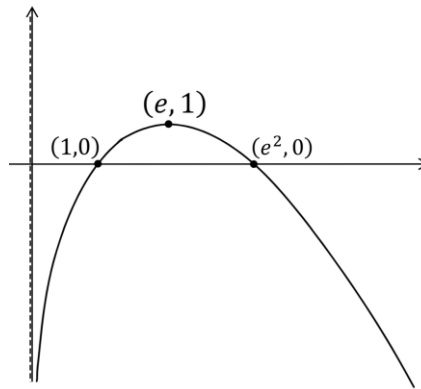


1. שרטוט את גרף הנגזרת:



3.  $f(x) = 2\ln x - \ln^2 x$

- א. תחום ההגדרה:  $x > 0$ .
- ב. אסימפטוטה אנכית:  $x = 0$ . אין אסימפטוטות אופקיות.
- ג.  $\max(e, 1)$ . **תחום עלייה**:  $0 < x < e$ . **תחום ירידה**:  $x > e$ .
- ד.  $(e^2, 0), (1, 0)$ .
- ה. גרף הפונקציה  $f(x)$ :



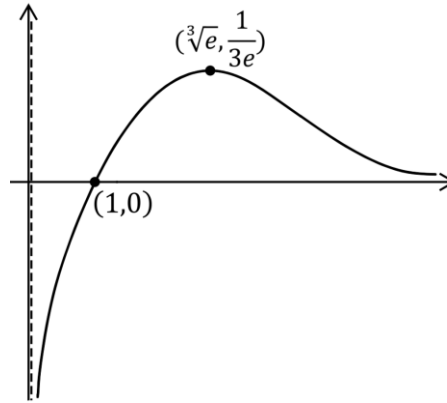
1.  $g(x)$  היא פונקציה המקיימת  $g'(x) = f(x)$

- i.  $x = e^2$ : max,  $x = 1$ : min
- ii. קעירות כלפי מעלה של  $g(x)$  :  $0 < x < e$ , קעירות כלפי מטה של  $g(x)$  :  $x > e$ .

4. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{\ln x}{x^3}$

- א. תחום ההגדרה:  $x > 0$ .
- ב. אסימפטוטה אנכית:  $x = 0$ . אסימפטוטה אופקית:  $y = 0$  כ- $x \rightarrow \infty$ .
- ג.  $(\sqrt[3]{e}, \frac{1}{3e})$  max
- ד.  $(1, 0)$ .

ה. גרף הפונקציה  $f(x)$  :



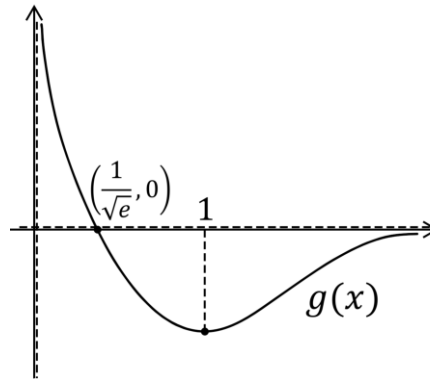
ו.  $g(x)$  היא פונקציה המקיימת  $g'(x) = f(x)$  בתחום  $x > 0$ .

i.  $x = 1$  : min

ii. שיעור ה- $x$  של נקודת הפיתול הוא  $x = \sqrt[3]{e}$ .

קעירות כלפי מעלה של  $g(x)$  :  $0 < x < \sqrt[3]{e}$ , קעירות כלפי מטה של  $g(x)$  :  $x > \sqrt[3]{e}$ .

iii. סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .



ז.  $(1,0)$  min ,  $(\sqrt[3]{e}, \frac{1}{3e})$  max

5. נתונה הפונקציה  $f(x) = -2x + x \ln(-x)$

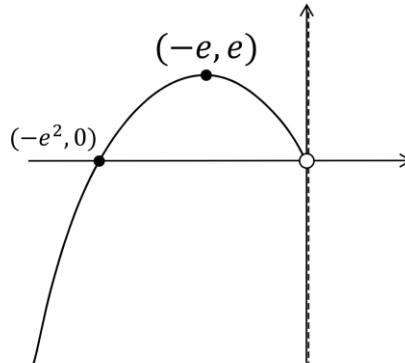
א.  $x < 0$

ב. אין אסימפטוטות המאונכות לצירים. יש חור ב- $(0,0)$

ג.  $(-e, e)$  max. תחום עלייה :  $x < -e$ . תחום ירידה :  $-e < x < 0$ .

ד.  $(-e^2, 0)$

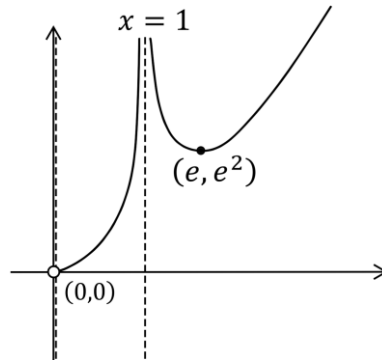
ה. סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .



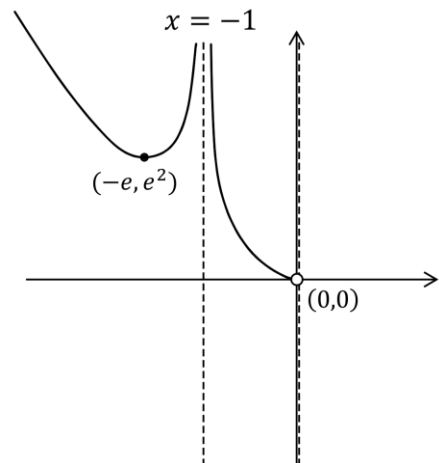
6. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2}{\ln^2 x}$

א. תחום הגדרה :  $x > 0, x \neq 1$

- ב. החזקה במכנה חיובית ולכן המכנה חיובי עבור כל  $x$  בתחום ההגדרה של הפונקציה. בנוסף היות  $x > 0$  אז גם המונה,  $x^2$ , חיובי עבור כל  $x$  בתחום ההגדרה של הפונקציה. אם גם המונה וגם המכנה חיוביים עבור כל  $x$  בתחום ההגדרה אז הפונקציה חיובית עבור כל  $x$  בתחום הגדרתה.
- ג. אסימפטוטה אנכית:  $x = 1$ . יש חור ב- $(0,0)$  אסימפטוטה אופקית: אין.
- ד.  $(e, e^2) \min$ .
- ה. אין.
- ו. גרף הפונקציה  $f(x)$ :

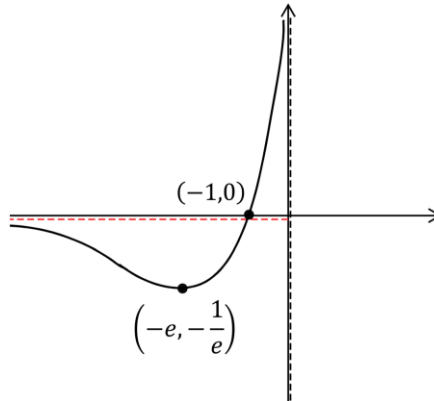


- ז.  $a = -e^2$ .
- ח. גרף הפונקציה  $h(x)$ .

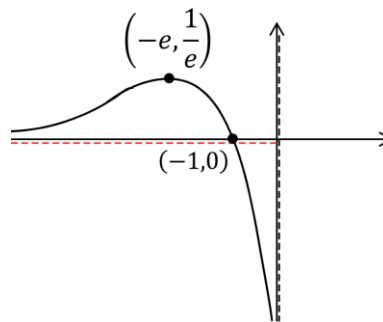


7. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{\ln(-x)}{x}$
- א. תחום הגדרה:  $x < 0$ .
- ב. אסימפטוטה אנכית:  $x = 0$ . אסימפטוטה אופקית:  $y = 0$  כ- $x \rightarrow -\infty$ .
- ג.  $(-e, -\frac{1}{e}) \min$ . תחום עלייה:  $-e < x < 0$ . תחום ירידה:  $x < -e$ .
- ד.  $(-1, 0)$ .

ה. גרף הפונקציה  $f(x)$ :

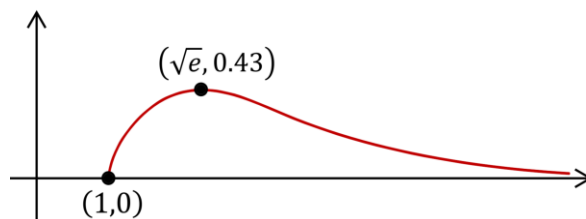


ו. גרף הפונקציה  $h(x) = \frac{\ln(-\frac{1}{x})}{x}$ :



8. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{\sqrt{\ln x}}{x}$

- א. תחום הגדרה:  $x \geq 1$ .
- ב. אין אסימפטוטות אנכיות. אסימפטוטה אופקית:  $y = 0$   $x \rightarrow \infty$ .
- ג. נקודת מקסימום:  $(\sqrt{e}, 0.43)$ . נקודת מינימום קצה:  $(1, 0)$ .
- ד. תחום עלייה:  $1 < x < \sqrt{e}$ . תחום ירידה:  $x > \sqrt{e}$ .
- ה. גרף הפונקציה  $f(x)$ .



9. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{\ln^2 x - a}$  ( $a \neq 0$ )

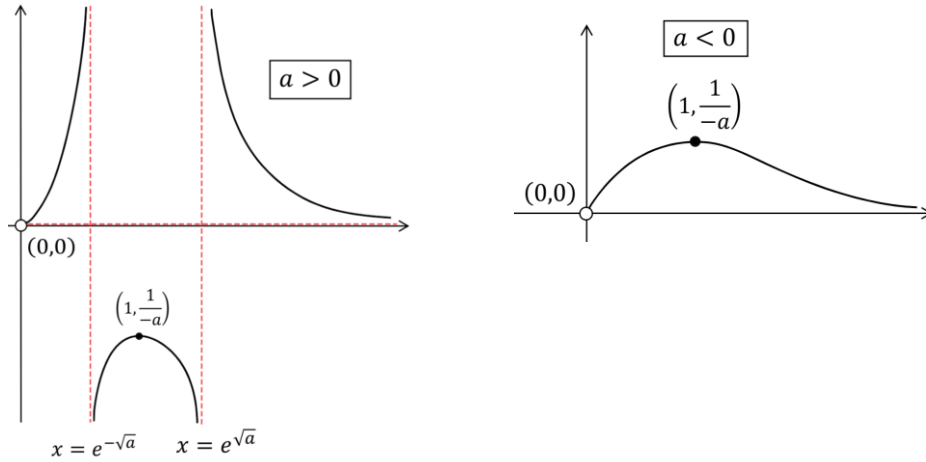
- א. אם  $a > 0$ : תחום ההגדרה:  $x > 0, x \neq e^{\sqrt{a}}, x \neq e^{-\sqrt{a}}$ .
- אם  $a < 0$ : תחום ההגדרה:  $x > 0$ .

ב. אם  $a > 0$ : אסימפטוטות אנכיות:  $x = e^{\sqrt{a}}, x = e^{-\sqrt{a}}$ . אסימפטוטה אופקית:  $y = 0$   $x \rightarrow \infty$

אם  $a < 0$ : אסימפטוטות אנכיות: אין. אסימפטוטה אופקית:  $y = 0$   $x \rightarrow \infty$

ג. אם  $a > 0$ : נקודת מקסימום:  $(1, \frac{1}{-a})$ . תחומי עלייה:  $0 < x < e^{-\sqrt{a}}$  או  $e^{-\sqrt{a}} < x < 1$ . תחומי ירידה:  $1 < x < e^{\sqrt{a}}$  או  $x > e^{\sqrt{a}}$ .

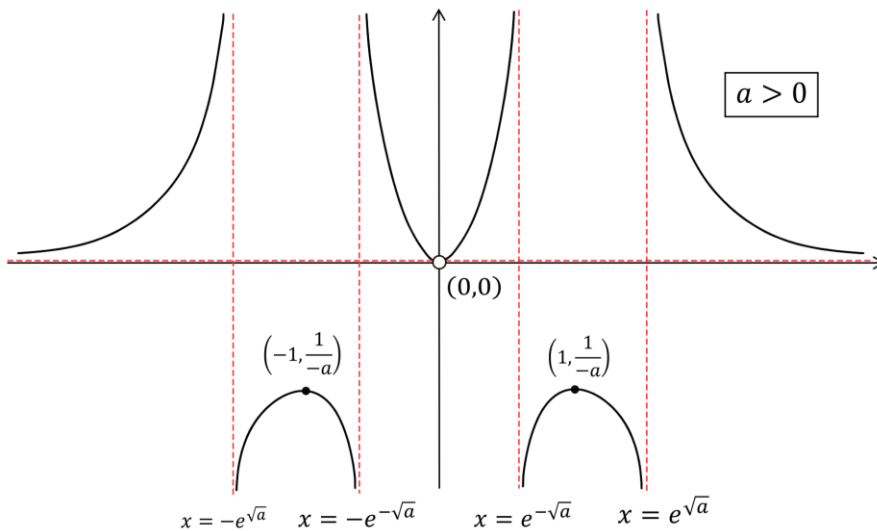
אם  $a < 0$ : נקודת מקסימום:  $(1, \frac{1}{-a})$ . תחום עלייה:  $0 < x < 1$ . תחום ירידה:  $x > 1$ .  
 ד. אין נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.  
 ה. שרטוט של גרף הפונקציה  $f(x)$ :



נתון כי למשוואה  $f(x) = -\frac{1}{2}$  יש שני פתרונות.

ו.  $a > 2$

ז. שרטוט של גרף הפונקציה  $h(x) = f(|x|)$



10. נתונה הפונקציה  $f(x) = 5 - a \ln(x^5)$  ( $a \neq 0$ ).

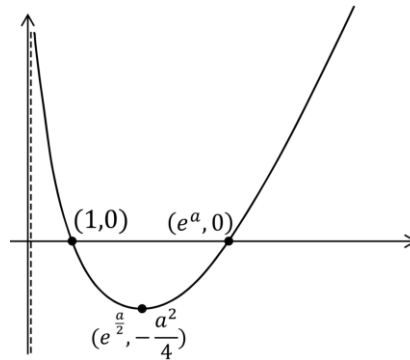
א. תחום ההגדרה:  $x > 0$ .

ב.  $(e^{\frac{1}{a}}, 0)$ .

- ג. אם  $a > 0$  הפונקצייה יורדת בכל תחום הגדרתה. אם  $a < 0$  הפונקצייה עולה בכל תחום הגדרתה.
- ד.  $g(x)$  היא פונקצייה המקיימת:  $g'(x) = f(x)$  בתחום  $x > 0$ . ארבעת הגרפים הבאים מתארים, לווּא דוּוקא לפי הסדר, את 4 הפונקציות הבאות:
- $f(x)$  עבור  $a > 0$  מתאים לגרף (1)
  - $f(x)$  עבור  $a < 0$  מתאים לגרף (4)
  - $g(x)$  עבור  $a > 0$  מתאים לגרף (3)
  - $g(x)$  עבור  $a < 0$  מתאים לגרף (2)

11. נתונה הפונקצייה:  $f(x) = \ln^2 x - a \ln x$ ,  $a > 0$ .

- תחום ההגדרה:  $x > 0$ .
- אסימפטוטה אנכית:  $x = 0$ . אסימפטוטה אופקית: אין
- נקודת מינימום:  $(e^{\frac{a}{2}}, -\frac{a^2}{4})$ .
- $(1, 0), (e^a, 0)$ .
- שרטוט של גרף הפונקצייה  $f(x)$ :

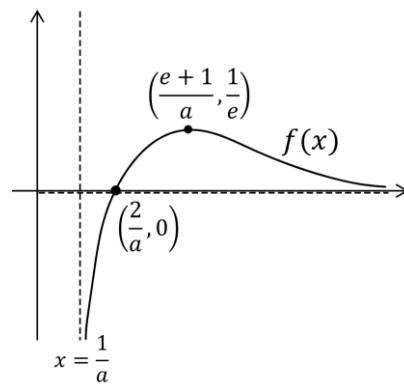


- $a = 2$
- $g(x)$  היא פונקצייה המקיימת  $g'(x) = f(x)$  בתחום  $x > 0$ .
- תחומי עלייה:  $0 < x < 1$  או  $x > e^a$ . תחום ירידה:  $1 < x < e^a$ .
- תחום הקעירות כלפי מעלה:  $x > e^{\frac{a}{2}}$ . תחום הקעירות כלפי מטה:  $0 < x < e^{\frac{a}{2}}$ .

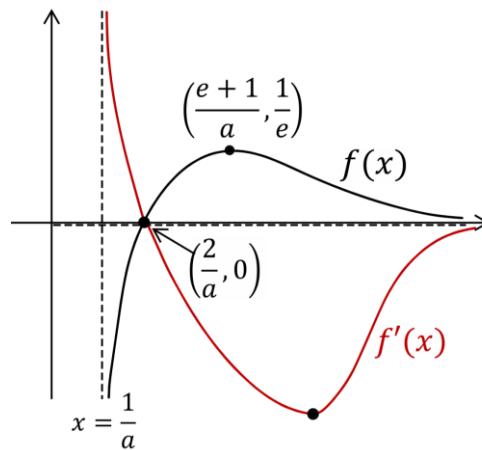
12. נתונה הפונקצייה:  $f(x) = \frac{\ln(ax-1)}{ax-1}$ ,  $a > 0$ .

- תחום ההגדרה:  $x > \frac{1}{a}$ .
- אסימפטוטה אנכית:  $x = \frac{1}{a}$ . אסימפטוטה אופקית:  $y = 0$  כ- $x \rightarrow \infty$ .
- נקודת מקסימום:  $(\frac{e+1}{a}, \frac{1}{e})$ .
- $(\frac{2}{a}, 0)$ .

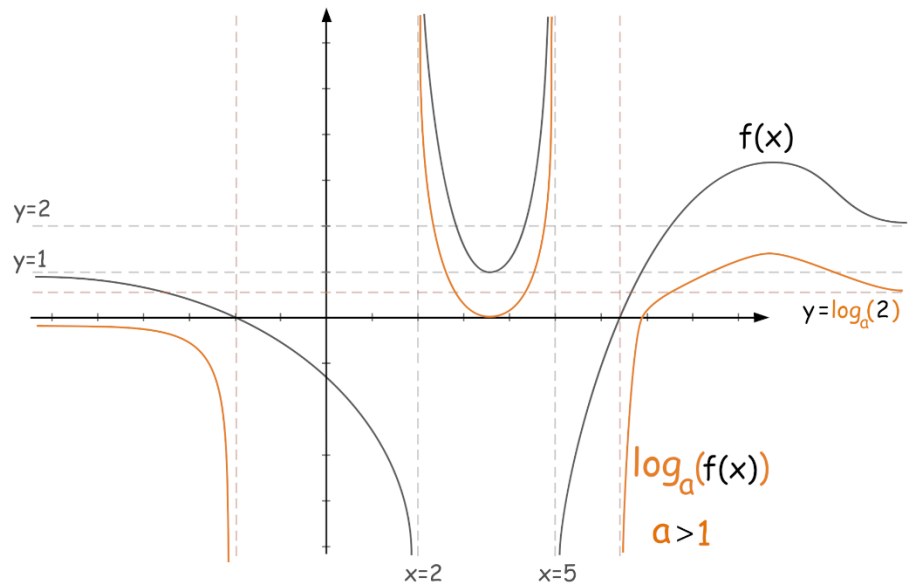
ה. שרטוט של גרף הפונקציה  $f(x)$  :



- ו. סביב  $x = \frac{e+1}{a}$  הפונקציה קעורה כלפי מטה (בגלל נקודת המקסימום) והחל מערך  $x$  מסויים הגדול מ- $\frac{e+1}{a}$  הפונקציה קעורה כלפי מעלה (בגלל שהפונקציה יורדת ושואפת לאסימפטוטה האופקית). נובע משני אלה שלפונקציה יש פיתול מימין ל- $x = \frac{e+1}{a}$ .
- ז. סקיצה של גרף הנגזרת  $f'(x)$  :



תרגיל 34 חקירת פונקציות  $\log_a f(x)$  בהנתן הגרף של  $f(x)$  (עבור  $a > 1$ )



#### תחום הגדרה-

- הפונקציה  $y = \log_a f(x)$  מוגדרת בתחומים בהם  $f(x) > 0$ .
- באופן כללי אם הנקודה  $(x_1, y_1)$  ( $y_1 > 0$ ) נמצאת על גרף הפונקציה  $f(x)$  אז הנקודה  $(x_1, \log_a(y_1))$  נמצאת על הגרף של  $y = \log_a f(x)$ .

#### אסימפטוטות אופקיות-

- אם לפונקציה  $f(x)$  יש בצד מסוים אסימפטוטה אופקית  $y = k$  כאשר  $k > 0$  אז לפונקציה  $y = \log_a f(x)$  תהיה באותו הצד אסימפטוטה אופקית  $y = \log_a k$ .
- אם לפונקציה  $f(x)$  יש בצד מסוים אסימפטוטה אופקית  $y = 0$  אז באותו הצד לפונקציה  $y = \log_a f(x)$  לא תהיה אסימפטוטה אופקית וערכיה ישאפו למינוס אינסוף.
- אם לפונקציה  $f(x)$  יש בצד מסוים אין אסימפטוטה אופקית כך **שערכיה שואפים לאינסוף** אז באותו הצד לפונקציה  $y = \log_a f(x)$  לא תהיה אסימפטוטה אופקית וערכיה ישאפו לאינסוף גם הם.

#### אסימפטוטות אנכיות-

- אם לפונקציה  $f(x)$  יש אסימפטוטה אנכית  $x = k$  כך שבצד מסוים של האסימפטוטה **ערכיה שואפים לאינסוף** אז לפונקציה  $y = \log_a f(x)$  תהיה אסימפטוטה אנכית  $x = k$  וערכיה ישאפו לאינסוף מאותו הצד.
- אם לפונקציה  $f(x)$  יש נקודת אפס  $(k, 0)$  כך **שמצד מסוים של נקודת האפס ערכי הפונקציה  $f(x)$  חיוביים** אז לפונקציה  $y = \log_a f(x)$  תהיה אסימפטוטה אנכית  $x = k$  וערכיה ישאפו למינוס אינסוף מאותו הצד. (זה יקרה גם אם יש ל-  $f(x)$  חור ב-  $(k, 0)$ .)

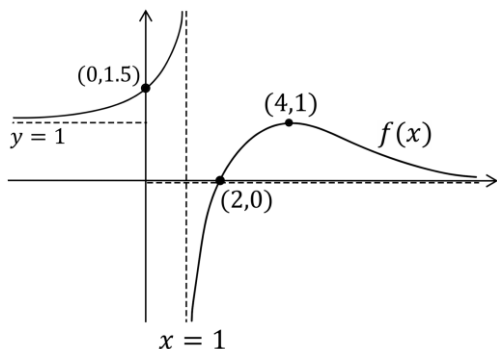
#### תחומי עליה וירידה-

בתחומים בהם  $f(x)$  ו-  $\log_a f(x)$  שתיהן מוגדרות תחומי העליה והירידה שלהן זהים.

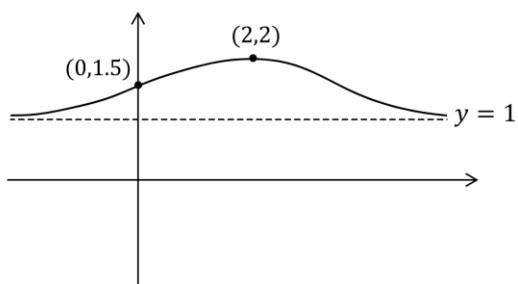
#### תחומי חיוביות ושליליות של $y = \log_a f(x)$

- בתחומים בהם מתקיים  $f(x) > 1$  ערכי הפונקציה  $y = \log_a f(x)$  חיוביים
- אם הנקודה  $(k, 1)$  נמצאת על גרף הפונקציה  $f(x)$
- אז הנקודה  $(k, 0)$  נמצאת על גרף הפונקציה  $y = \log_a f(x)$
- בתחומים בהם מתקיים  $0 < f(x) < 1$  ערכי הפונקציה  $y = \log_a f(x)$  שליליים

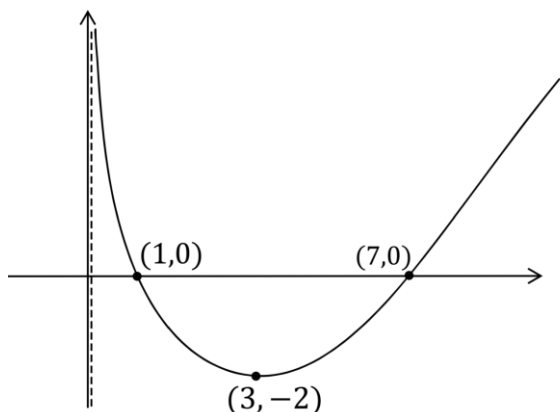
## שאלות



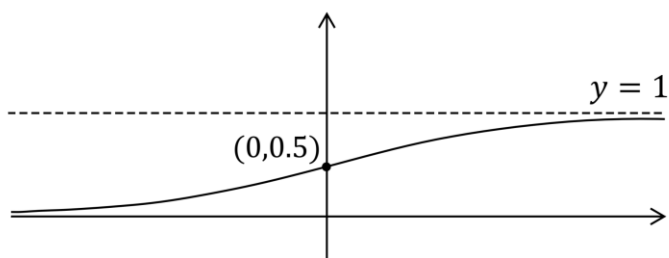
1. לפניכם הגרף של הפונקציה המוגדרת לכל  $x \neq 1$ . יש לה אסימפטוטה אנכית  $x = 1$ , אסימפטוטות אופקיות  $y = 1$ ,  $y = 0$ , נקודת מקסימום ששיעוריה הם  $(4, 1)$ , נקודת חיתוך עם ציר ה- $x$  ששיעוריה הם  $(2, 0)$  ונקודת חיתוך עם ציר ה- $y$  ששיעוריה הם  $(0, 1.5)$ . העזרו בגרף של הפונקציה  $f(x)$  ושרטטו את הגרף של הפונקציה  $g(x)$  המוגדרת באופן הבא:  $g(x) = \ln(f(x))$ .



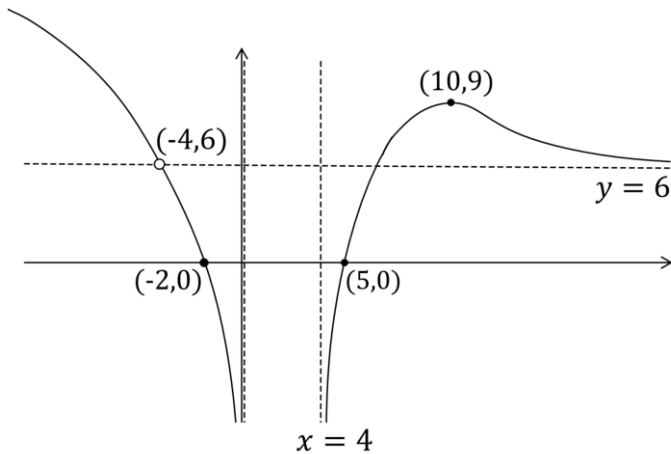
2. לפניכם הגרף של הפונקציה המוגדרת לכל  $x$ . יש לה אסימפטוטה אופקית  $y = 1$ , נקודת מקסימום ששיעוריה הם  $(2, 2)$  ונקודת חיתוך עם ציר ה- $y$  ששיעוריה הם  $(0, 1.5)$ . העזרו בגרף של הפונקציה  $f(x)$  ושרטטו את הגרף של הפונקציה  $g(x)$  המוגדרת באופן הבא:  $g(x) = \ln(f(x))$ .



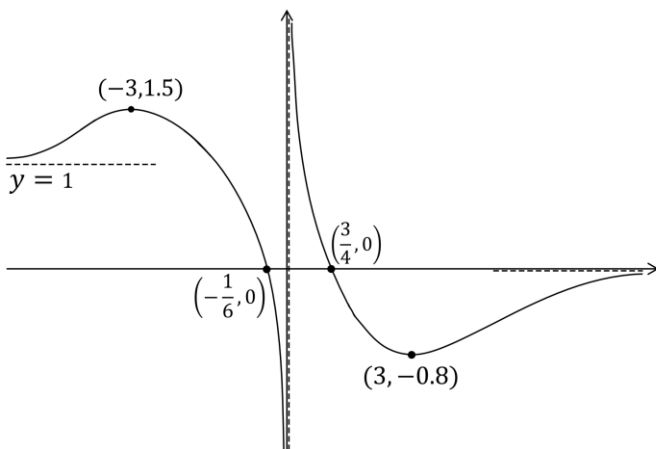
3. לפניכם הגרף של הפונקציה המוגדרת לכל  $x > 0$ . יש לה אסימפטוטה אנכית  $x = 0$ , נקודת מינימום ששיעוריה הם  $(3, -2)$  ונקודות חיתוך עם ציר ה- $x$ :  $(1, 0)$  ו- $(7, 0)$ . לפונקציה אין אסימפטוטה אופקית ומתקיים:  $f(x) = \infty$  as  $x \rightarrow \infty$ . העזרו בגרף של הפונקציה  $f(x)$  ושרטטו את הגרף של הפונקציה  $g(x)$  המוגדרת באופן הבא:  $g(x) = \ln(f(x))$ .



4. לפניכם הגרף של הפונקציה המוגדרת לכל  $x$ . יש לה אסימפטוטות אופקיות  $y = 1$ ,  $y = 0$  ונקודת חיתוך עם ציר ה- $y$  ששיעוריה הם  $(0, 0.5)$ . העזרו בגרף של הפונקציה  $f(x)$  ושרטטו את הגרף של הפונקציה  $g(x)$  המוגדרת באופן הבא:  $g(x) = \ln(f(x))$ .



5. לפניכם הגרף של הפונקציה המוגדרת בתחומים:  $x < -4$  או  $-4 < x < 0$  או  $x > 4$ . יש לה אסימפטוטות אנכיות  $x = 4$ ,  $x = 0$  ונקודות מקסימום ששיעוריה הם  $(10,9)$  ונקודות חיתוך עם ציר ה- $x$ :  $(5,0)$  ו- $(-2,0)$ . לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית  $y = 6$  וחורב- $(-4,6)$ .  
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$   
 העזרו בגרף של הפונקציה  $f(x)$  ושרטטו את הגרף של הפונקציה המוגדרת באופן הבא:  
 $g(x) = \ln(f(x))$ .



6. לפניכם הגרף של הפונקציה המוגדרת לכל  $x \neq 0$ . יש לה אסימפטוטה אנכית  $x = 0$ . נקודת מקסימום ששיעוריה הם  $(-3,1.5)$  ונקודות חיתוך עם ציר ה- $x$ :  $(\frac{3}{4}, 0)$  ו- $(-\frac{1}{6}, 0)$ . לפונקציה יש אסימפטוטות אופקיות  $y = 0$ ,  $y = 1$ .  
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$   
 העזרו בגרף של הפונקציה  $f(x)$  ושרטטו את הגרף של הפונקציה המוגדרת באופן הבא:  
 $g(x) = \frac{1}{\ln(f(x))}$ .

7. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \ln(-x^2 - 2x + 3)$ .

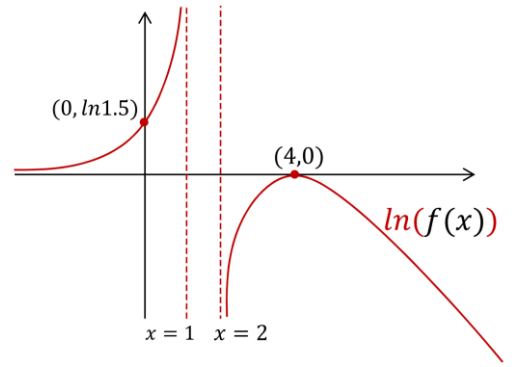
- מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצאו את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה (אם יש כאלה).
- מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה.
- מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- שרטטו את גרף הפונקציה.
- ידוע שלפונקציה  $f(x)$  אין נקודות פיתול. שרטטו סקיצה של גרף הנגזרת.
- נתונה הפונקציה:  $g(x) = \ln((-x^2 - 2x + 3)^3)$ . שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$  ומצאו את נקודת הקיצון שלה.
- נתונה הפונקציה:  $h(x) = e^{-f(x)}$ . שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $h(x)$  ומצאו את נקודת הקיצון שלה.

8. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \ln\left(\frac{5x-x^2}{x^2-6x+5}\right)$ . (מומלץ לפני החקירה של  $f(x)$  לחקור ולשרטט את הפונקציה "הפנימית")

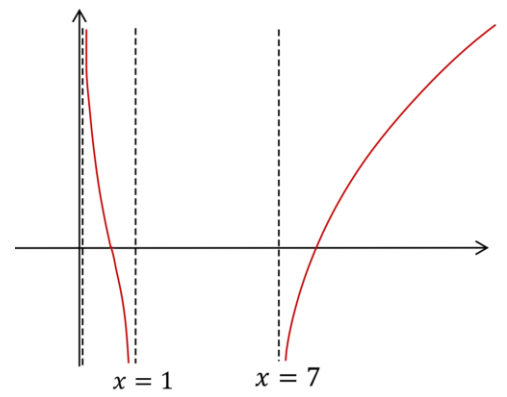
- מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצאו את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה (אם יש כאלה).
- מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- שרטטו את גרף הפונקציה.
- שרטטו את גרף הפונקציה  $h(x) = \ln\left(\frac{-5x+x^2}{x^2-6x+5}\right)$ .

תשובות

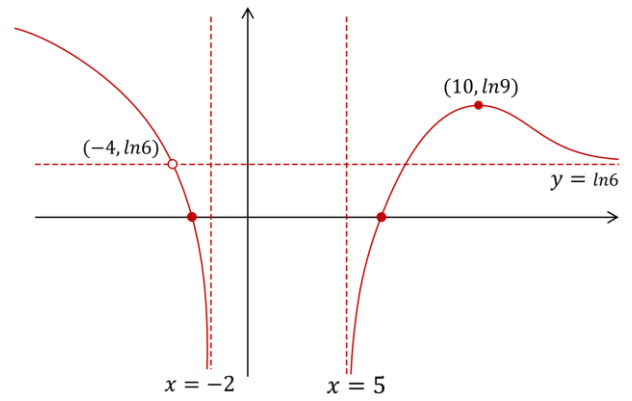
.1



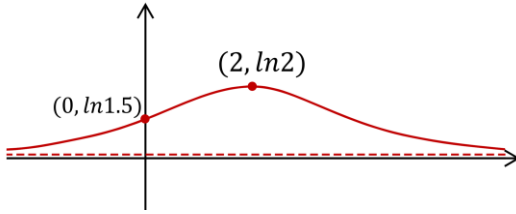
.3



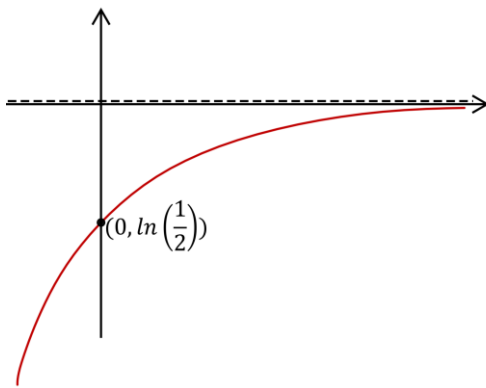
.5



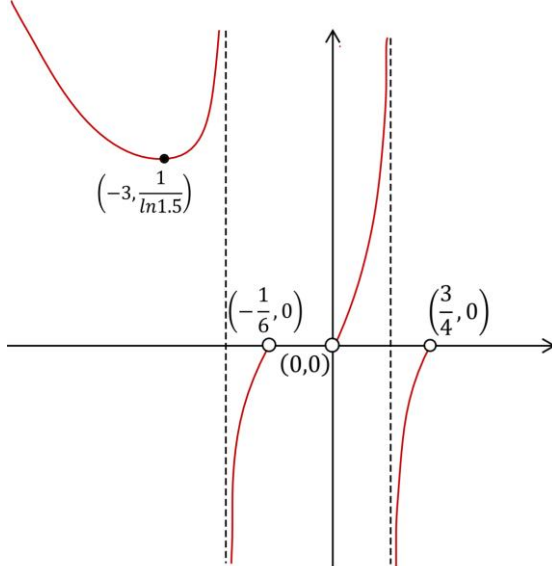
.2

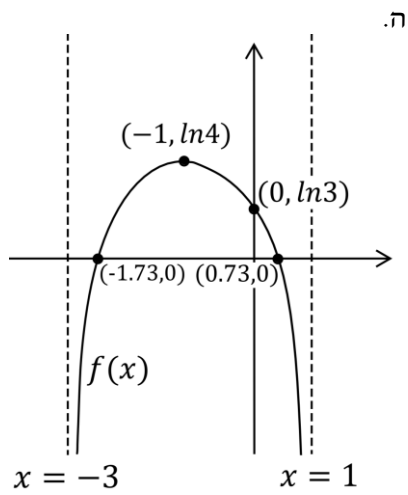


.4

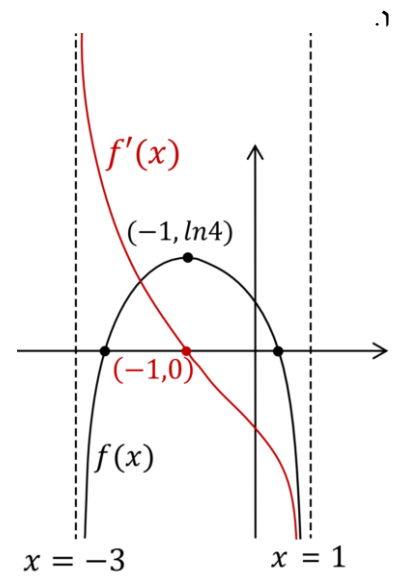
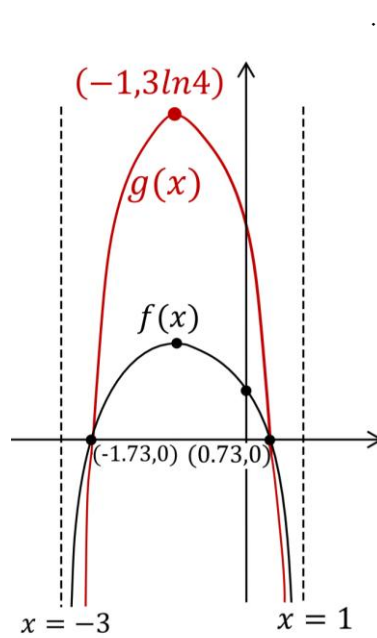
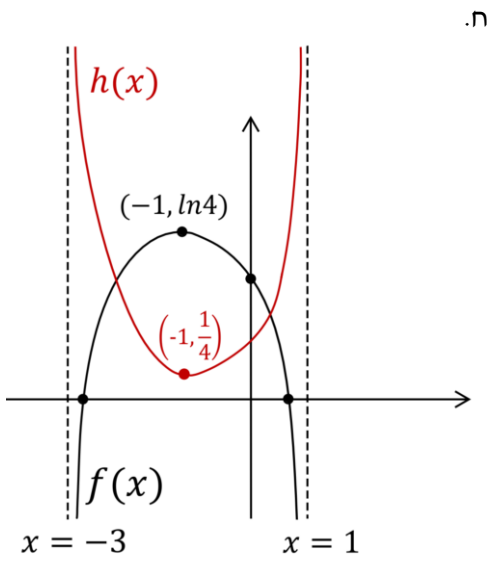


.6





7. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \ln(-x^2 - 2x + 3)$
- א.  $-3 < x < 1$
  - ב. אסימפטות אנכיות:  $x = -3$ ,  $x = 1$
  - ג.  $\max(-1, \ln 4)$
  - ד.  $(-1 - \sqrt{3}, 0)$ ,  $(-1 + \sqrt{3}, 0)$ ,  $(0, \ln 3)$



8. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \ln\left(\frac{5x-x^2}{x^2-6x+5}\right)$

א.  $0 < x < 1$

ב. אסימפטוטות אנכיות:  $x = 1, x = 0$

ג. תחום עלייה:  $0 < x < 1$ . תחומי ירידה: אין.

ד.  $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

1.

