



מתמטיקורס

טריגונומטריה במישור

יש סרטוני הסבר מלאים לכל התרגילים בקורס באתר:

Matematicourse.com

[לחץ כאן כדי להגיע ישירות לדף הקורס](#)

תוכן

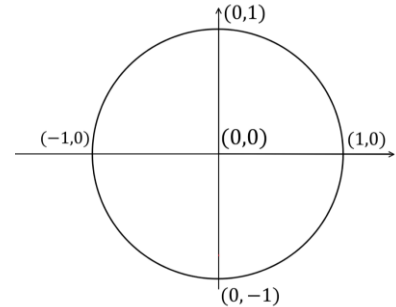
3	טריגונומטריה במישור
3	רגע לפני טריגונומטריה במישור – מעגל היחידה
3	הגדרת פונקציות הסינוס, קוסינוס, טנגנס וקוטנגנס במעגל היחידה.
4	טריגונומטריה במשולש ישר זווית
5	שאלות - טריגונומטריה במשולש ישר זווית- שאלות חישוביות.....
17	שטח משולש (שאינו בהכרח ישר זווית) לפי שתי צלעות וזווית ביניהן
19	שטח משולש (שאינו בהכרח ישר זווית) לפי 3 זוויות וצלע.
21	טריגו במשולש ישר זווית - שאלות עם פרמטרים.....
29	טריגו במשולש ישר זווית-בעיות עם במרובעים
33	משפט הסינוסים
40	שטח מרובע לפי מכפלת האלכסונים בסינוס הזווית שביניהם
42	משפט הקוסינוסים
49	זהויות של סכום והפרש זוויות בסינוס ובקוסינוס
49	זהויות של זווית כפולה בסינוס ובקוסינוס

טריגונומטריה במישור

רגע לפני טריגונומטריה במישור – מעגל היחידה

הגדרת פונקציות הסינוס, קוסינוס, טנגנס וקוטנגנס במעגל היחידה.

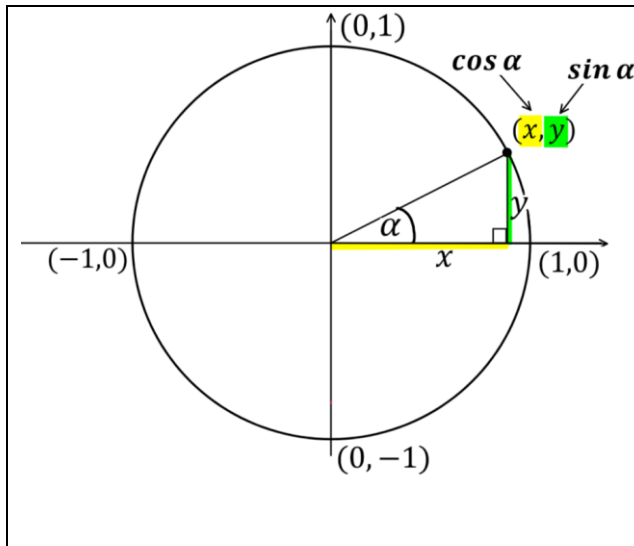
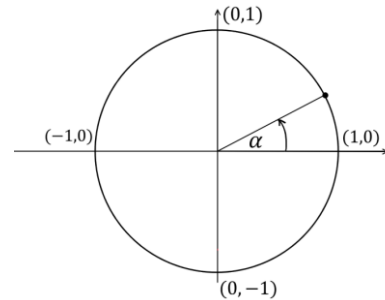
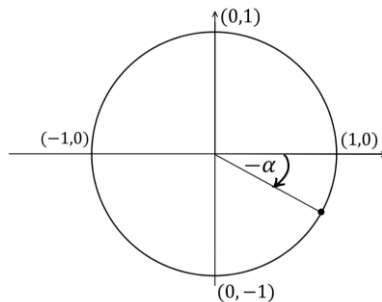
נגדיר מעגל היחידה – מעגל שרדיוסו באורך יחידה אחת. ומרכזו בראשית הצירים.



סיבוב של רדיוס המעגל נגד כיוון השעון מוגדרת כזווית חיובית.

סיבוב של רדיוס המעגל עם כיוון השעון מוגדרת כזווית שלילית.

הזווית נמדדת מהכיוון והחיובי של ציר ה- x . כאשר הרדיוס מונח על הקרן החיובית של ציר ה- x הזווית היא אפס.

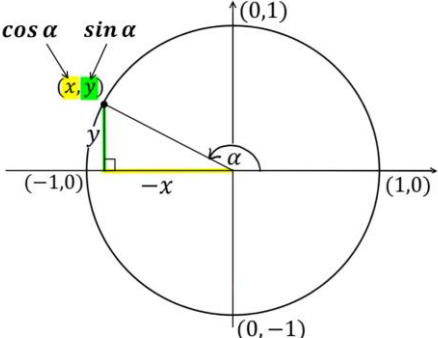
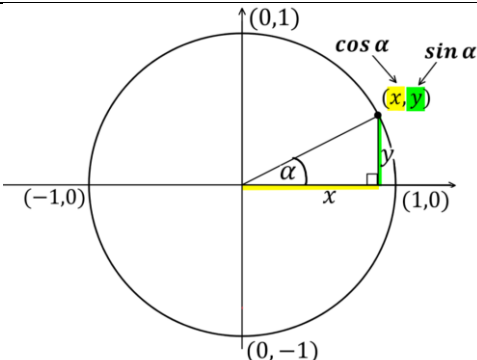
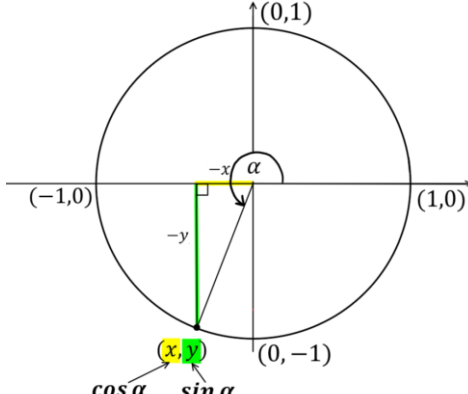
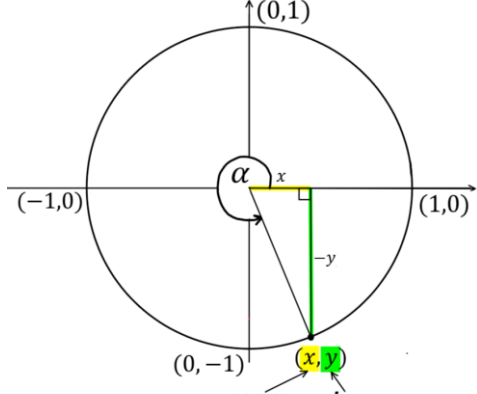


הגדרת סינוס α – $(\sin \alpha)$ אם נסובב את הרדיוס α מעלות והנקודה (x, y) היא הנקודה בה הרדיוס נוגע במעגל אז: $\sin \alpha = y$.

הגדרת קוסינוס α – $(\cos \alpha)$ אם נסובב את הרדיוס α מעלות והנקודה (x, y) היא הנקודה בה הרדיוס נוגע במעגל אז: $\cos \alpha = x$.

הגדרת טנגנס α – $(\tan \alpha)$ אם נסובב את הרדיוס α מעלות והנקודה (x, y) היא הנקודה בה הרדיוס נוגע במעגל אז: $\tan \alpha = \frac{y}{x}$.

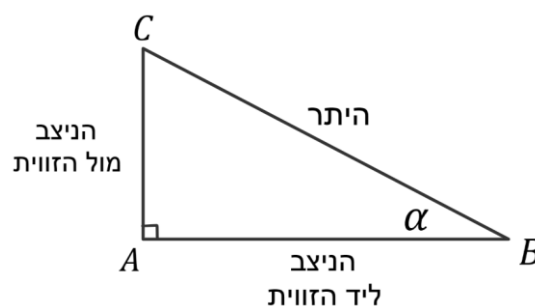
הגדרת קוטנגנס α – $(\cot \alpha)$ אם נסובב את הרדיוס α מעלות והנקודה (x, y) היא הנקודה בה הרדיוס נוגע במעגל אז: $\cot \alpha = \frac{x}{y}$.

כדי לראות ויזואלית את ערך הסינוס והקוסינוס נוח וקל להוריד אנכים לצירים ולהתבונן במשולש ישר הזווית שנוצר	
אם הרדיוס ממוקם ברביע הראשון. ערך הסינוס שווה לניצב הירוק (זה שמקביל לציר ה-y) ערך הקוסינוס שווה למינוס הניצב הצהוב (זה שמונח על ציר ה-x)	אם הרדיוס ממוקם ברביע הראשון. ערך הסינוס שווה לניצב הירוק (זה שמקביל לציר ה-y) ערך הקוסינוס שווה לניצב הצהוב (זה שמונח על ציר ה-x)
	
אם הרדיוס ממוקם ברביע השלישי. ערך הסינוס שווה למינוס הניצב הירוק (זה שמקביל לציר ה-y) ערך הקוסינוס שווה למינוס הניצב הצהוב (זה שמונח על ציר ה-x)	אם הרדיוס ממוקם ברביע השלישי. ערך הסינוס שווה למינוס הניצב הירוק (זה שמקביל לציר ה-y) ערך הקוסינוס שווה למינוס הניצב הצהוב (זה שמונח על ציר ה-x)
	

טריגונומטריה במשולש ישר זווית

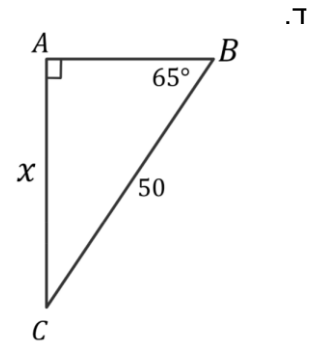
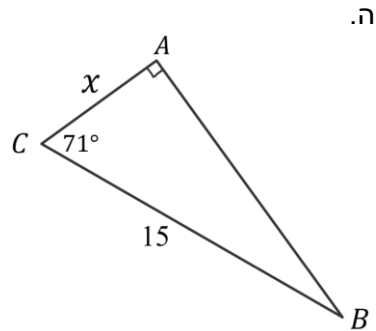
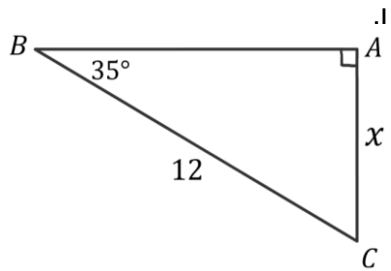
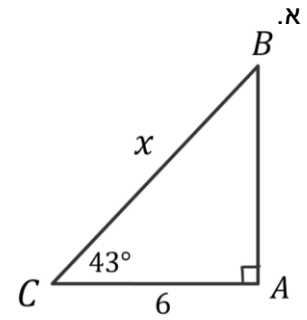
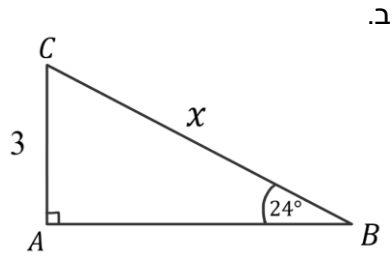
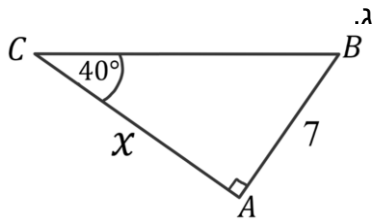
ראה סרטון שמסביר את הקשר בין הגדרת הפונקציות הטריגונומטריות במעגל היחידה לבין הגדרתן במשולש ישר זווית.

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{\text{הניצב מול הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{AC}{BC} \\ \cos \alpha &= \frac{\text{הניצב ליד הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{AB}{BC} \\ \tan \alpha &= \frac{\text{הניצב מול הזווית}}{\text{הניצב ליד הזווית}} = \frac{AC}{AB} \\ \cot \alpha &= \frac{\text{הניצב ליד הזווית}}{\text{הניצב מול הזווית}} = \frac{AB}{AC} \end{aligned}$$

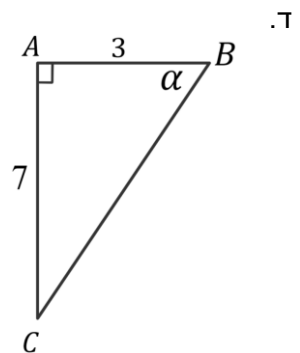
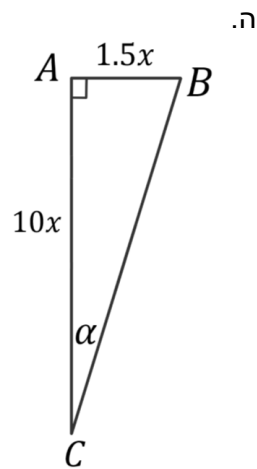
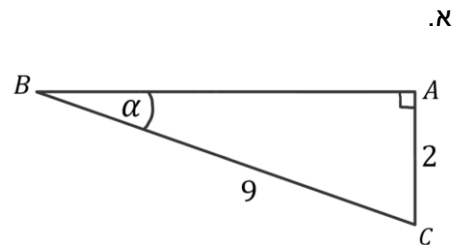
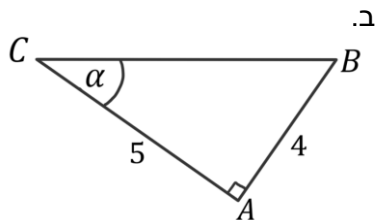
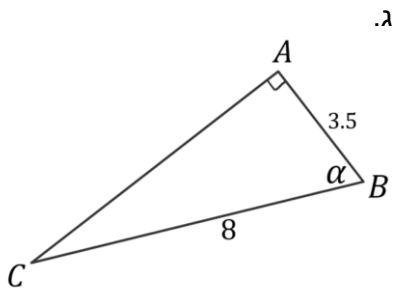


שאלות - טריגונומטריה במשולש ישר זווית- שאלות חישוביות

1. מצא את x במשולשים הבאים:



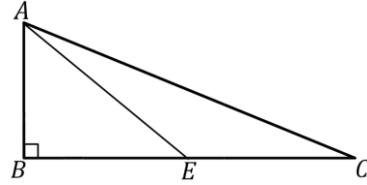
2. מצא את α במשולשים הבאים:



תשובות לתרגילים 1 ו-2:

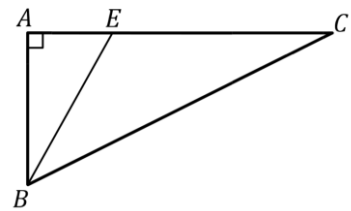
6.883(ו.1	4.884(ה.1	45.315(ד.1	8.342(ג.1	7.376(ב.1	8.204(א.1
8.531°(ה.2	66.801°(ד.2	64.056°(ג.2	38.66°(ב.2	12.84°(א.2	

3. המשולש ABC הוא ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$) AE הוא תיכון לניצב BC . $CE = 4$ ס"מ. $\angle C = 20^\circ$.
חשב את זווית AEB .



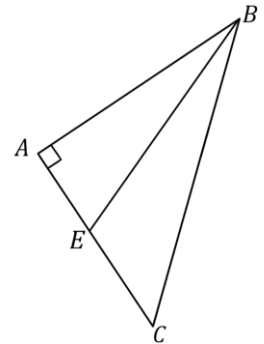
תשובה: 36.052°

4. המשולש ABC הוא ישר זווית ($\angle BAC = 90^\circ$) BE הוא חוצה זווית B . $CA = 12$ ס"מ. $\angle C = 26^\circ$.
חשב את אורכו של CE .



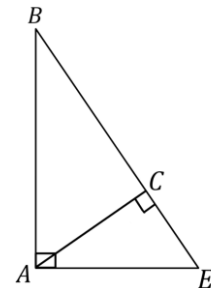
תשובה: $CE = 8.343$ ס"מ

5. המשולש ABC הוא ישר זווית ($\angle BAC = 90^\circ$) BE הוא חוצה זווית B . $EA = 3$ ס"מ. $\angle B = 50^\circ$.
חשב את אורכו של BE ואת אורכו של BC .



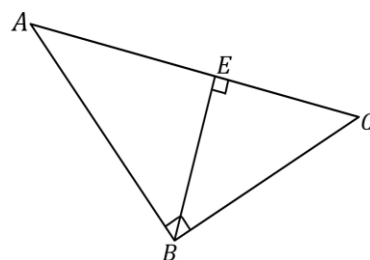
תשובה: $BE = 7.099$ ס"מ, $CB = 10.01$ ס"מ

6. המשולש ABE הוא ישר זווית ($\angle BAE = 90^\circ$) AC הוא גובה ליתר BE . $EA = 15$ ס"מ. $\angle E = 65^\circ$.
חשב את אורכו של BC .



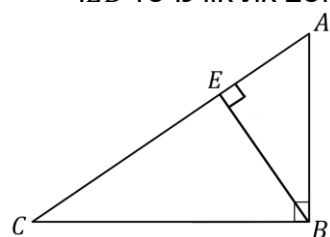
תשובה: $BC = 29.154$ ס"מ

7. המשולש ABC הוא ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$) הוא גובה ליתר AC .
 $BA = 10$ ס"מ $BC = 8$ ס"מ. חשב את אורכו של BE .



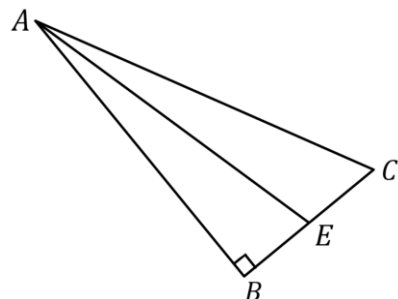
תשובה: $BE = 6.247$ ס"מ.

8. המשולש ABC הוא ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$) הוא גובה ליתר AC . $AC = 14$ ס"מ $\angle C = 28^\circ$.
 חשב את אורכו של EB .



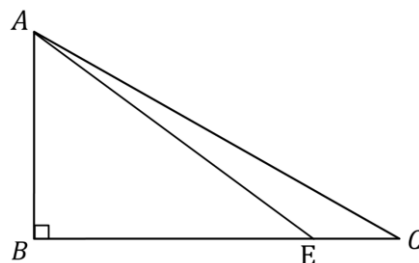
תשובה: $BE = 5.803$ ס"מ.

9. המשולש ABC הוא ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$) הוא תיכון לניצב BC . $AB = 7.5$ ס"מ.
 $\angle AEB = 77^\circ$. חשב את זווית C .



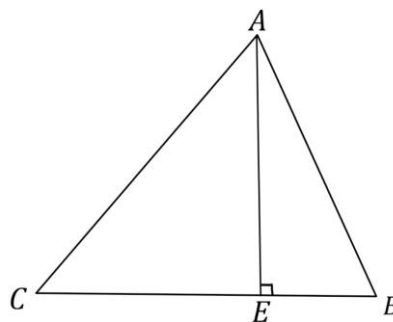
תשובה: $\angle C = 65.216^\circ$.

10. המשולש ABC הוא ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$) הנקודה E נמצאת על הצלע BC כך ש- $\angle EAB = 51^\circ$.
 $BA = 13$ ס"מ $\angle CAE = 11^\circ$. חשב את אורכו של EC .



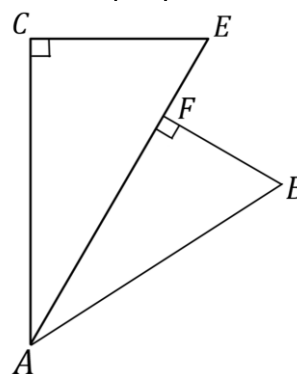
תשובה: $EC = 8.395$ ס"מ.

11. AE הוא הגובה לצלע BC במשולש ABC $AC = 23$ ס"מ $\angle C = 47^\circ$ $BC = 25$ ס"מ. חשב את זווית $\angle BAE$.



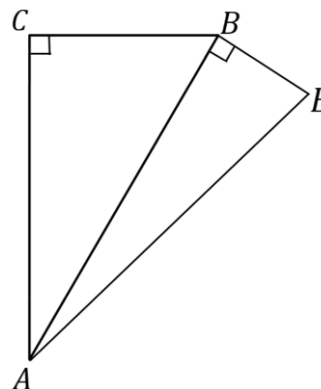
תשובה: $\angle BAE = 28.974^\circ$.

12. המשולש AEC הוא ישר זווית ($\angle ACE = 90^\circ$) הנקודה F נמצאת על היתר AE כך ש- $BF \perp AE$ $\angle E = 73^\circ$ $EC = 3$ ס"מ $\angle BAF = 18^\circ$. AB קצר ב-0.4 ס"מ מ- AC . חשב את אורך הקטע FE .



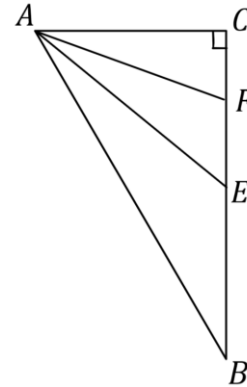
תשובה: $FE = 1.309$ ס"מ.

13. המשולש ABC הוא ישר זווית ($\angle ACB = 90^\circ$) הנקודה E נמצאת מחוץ למשולש כך ש- $BA \perp BE$. $AB = 6$ ס"מ $CB = 2.7$ ס"מ $\angle CAE = 50^\circ$. חשב את אורך הקטע AE .



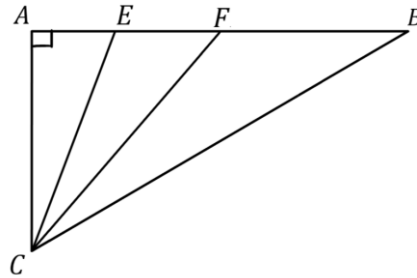
תשובה: $AE = 6.531$ ס"מ.

14. המשולש ABC הוא ישר זווית ($\angle ACB = 90^\circ$). $\angle BAC = 72^\circ$. $\angle EAB = \angle EAF = \angle CAF$. $CA = 24$ ס"מ. חשב את אורכי הקטעים BE ו- EF .



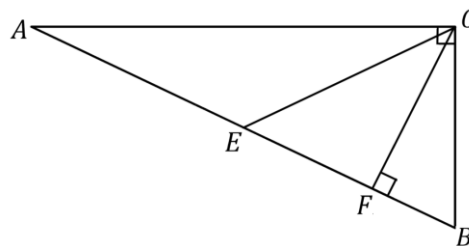
תשובה: $BE = 47.209$ ס"מ, $EF = 15.79$ ס"מ.

15. המשולש ABC הוא ישר זווית ($\angle CAB = 90^\circ$). $\angle ABC = 32^\circ$. CE הוא חוצה זווית ACF . CF הוא תיכון לצלע AB במשולש ABC . $CA = 7$ ס"מ. חשב את אורך הקטע EF .



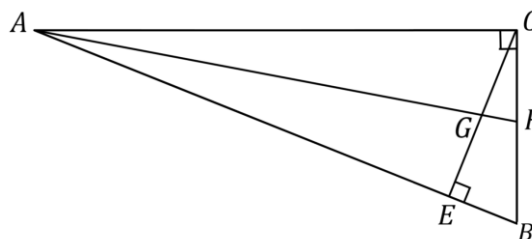
תשובה: $EF = 3.145$ ס"מ.

16. המשולש ABC הוא ישר זווית ($\angle ACB = 90^\circ$). $\angle BAC = 22^\circ$. CE הוא חוצה זווית ACF . CF הוא גובה ליתר במשולש ABC . $CB = 4$ ס"מ. חשב את אורך הקטע AE .



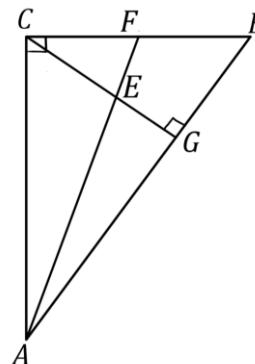
תשובה: $AE = 6.667$ ס"מ.

17. המשולש ABC הוא ישר זווית ($\angle ACB = 90^\circ$). $\angle BAC = 20^\circ$. AF הוא חוצה זווית CAB . CE הוא גובה ליתר במשולש ABC . $GE = 2$ ס"מ. חשב את אורך הקטע GF .



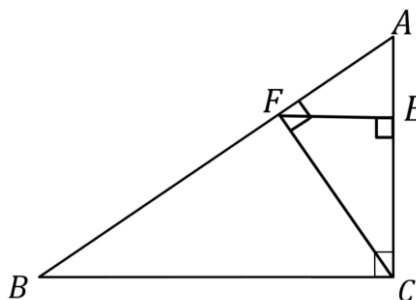
תשובה: $GF = 0.739$ ס"מ.

18. המשולש ABC הוא ישר זווית ($\angle ACB = 90^\circ$). AF הוא תיכון לצלע BC . CG הוא גובה ליתר במשולש ABC . $BC = 10$ ס"מ. $BG = 6$ ס"מ. חשב את זווית BAF .



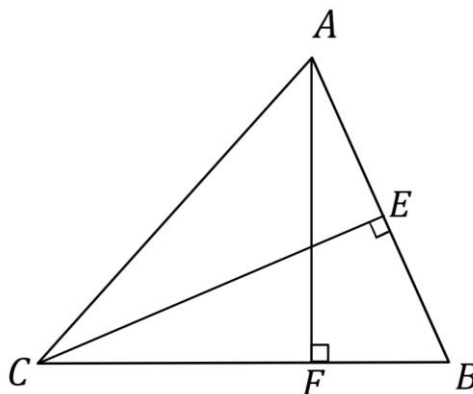
תשובה: $\angle BAF = 16.312^\circ$.

19. המשולש ABC הוא ישר זווית ($\angle ACB = 90^\circ$). CF הוא גובה ליתר במשולש ABC . נקודה E נמצאת על AC כך ש- $FE \perp AC$. $BA = 10$ ס"מ. $\angle ABC = 33^\circ$.
- חשב את אורכי הקטעים FE ו- BF .
 - חשב את זווית CBE . (הזווית אינה מצוירת בציור).



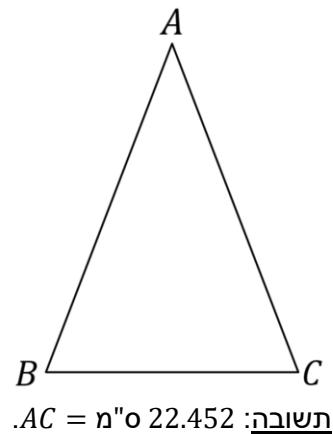
תשובה: א) $BF = 7.034$ ס"מ, $EF = 2.488$ ס"מ. ב) $\angle CBE = 24.55^\circ$.

20. במשולש ABC CE ו- AF הם גבהים לצלעות AB ו- BC בהתאמה. $BC = 12.5$ ס"מ, $AB = 8.3$ ס"מ, $AF = 7$ ס"מ. חשב את אורך הקטע AE .



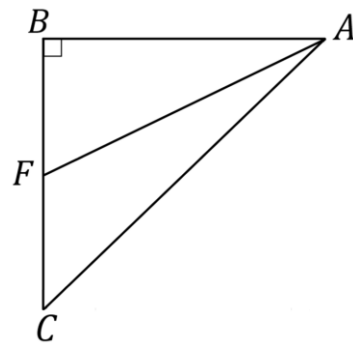
תשובה: $AE = 1.583$ ס"מ.

21. נתון משולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$). $\angle A = 31^\circ$. $BC = 12$ ס"מ. חשב את אורך שוק המשולש.



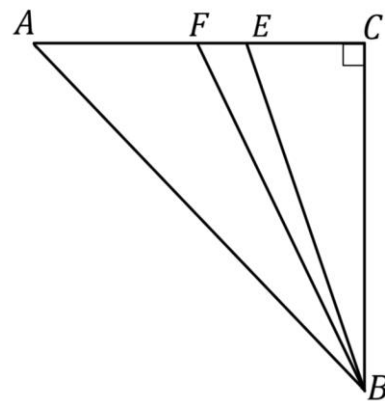
22. במשולש שווה שוקיים אורך השוק הוא 10 ס"מ ואורך הבסיס הוא 7 ס"מ. חשב את זווית הראש של המשולש.
- תשובה: 40.974° .

23. המשולש ABC הוא ישר זווית ושווה שוקיים ($\angle ABC = 90^\circ$). AF הוא תיכון לניצב BC . חשב את זווית CAF .



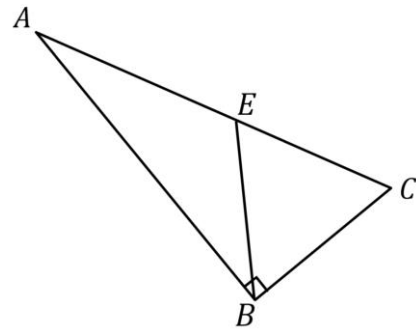
תשובה: $\angle CAF = 18.434^\circ$.

24. המשולש ABC הוא ישר זווית ושווה שוקיים ($\angle ACB = 90^\circ$). BF הוא תיכון לניצב AC . BE הוא חוצה זווית B . $AB = 8$ ס"מ. חשב את אורך הקטע EF .



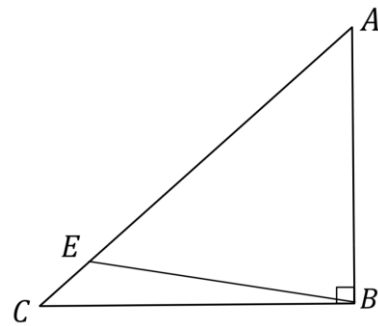
תשובה: $EF = 0.485$ ס"מ.

25. המשולש ABC הוא ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$). נקודה E נמצאת על הצלע AC כך ש- $BE = BC$.
 $\angle ACB = 72^\circ$, $CB = 2$ ס"מ. חשב את אורך הקטע AE .



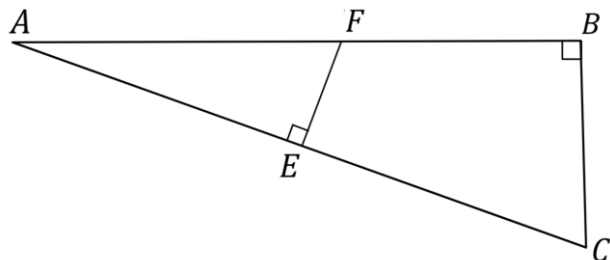
תשובה: $AE = 5.236$ ס"מ.

26. המשולש ABC הוא ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$). נקודה E נמצאת על הצלע AC כך ש- $BE = BA$.
 $\angle ACB = 38^\circ$, $CA = 12$ ס"מ. חשב את אורך הקטע AE .



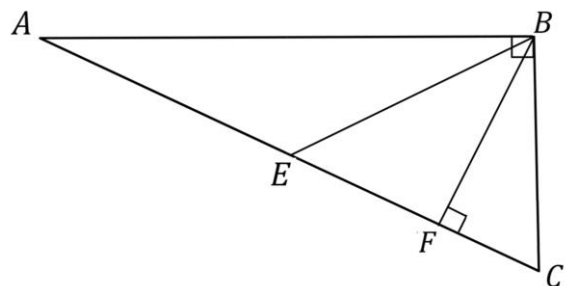
תשובה: $AE = 9.098$ ס"מ.

27. המשולש ABC הוא ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$). נמצאת F על AB ו- E נמצאת על AC כך ש- EF הוא אנך אמצעי לצלע AC . $BC = 30$ ס"מ. $\angle BAC = 14^\circ$. חשב את אורך הקטע BF .



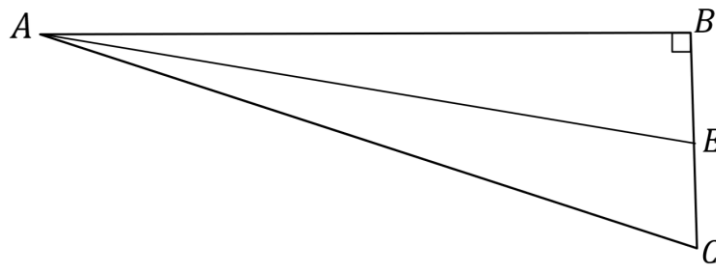
תשובה: $BF = 56.421$ ס"מ.

28. המשולש ABC הוא ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$). BE הוא תיכון ליתר. BF הוא גובה ליתר.
 $BC = 3$ ס"מ, $AC = 8$ ס"מ. חשב את זווית FBE .



תשובה: $\angle FBE = 45.952^\circ$.

29. המשולש ABC הוא ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$). AE הוא תיכון לניצב BC . $\frac{BC}{AB} = \frac{1}{3}$. חשב את זווית EAC .

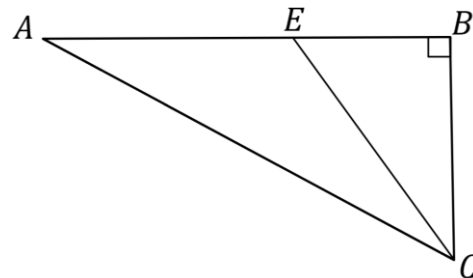


תשובה: $\angle EAC = 8.973^\circ$.

30. במשולש ישר זווית סכום הניצבים הוא 16 ס"מ ואחת הזוויות שווה 66° . חשב את היקף המשולש.
תשובה: $P = 28.118$ ס"מ.

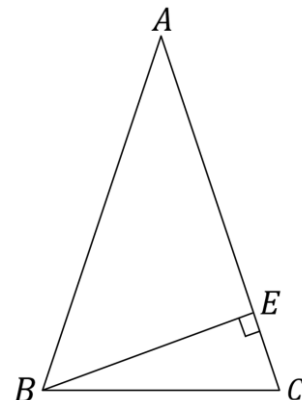
31. במשולש שווה שוקיים השוק ארוכה פי 1.5 מהבסיס. מצא את זוויות המשולש.
תשובה: $38.942^\circ, 70.529^\circ, 70.529^\circ$.

32. המשולש ABC הוא ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$). CE הוא חוצה זווית C . $\angle BAC = 32^\circ$. חשב את היחס בין אורך הקטע AE לאורך הקטע BC .



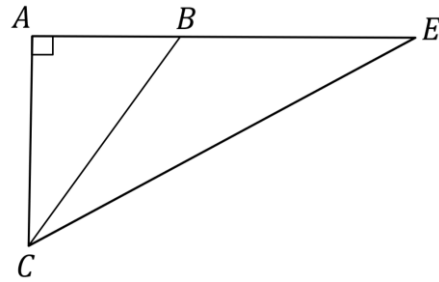
תשובה: $\frac{AE}{BC} = 1.046$.

33. משולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$). BE הוא גובה לשוק AC זווית הראש שווה 28° . חשב את היחס $\frac{AE}{EC}$.



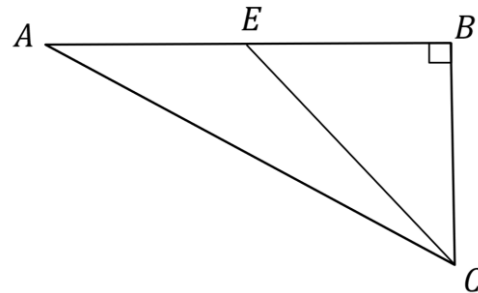
תשובה: $\frac{AE}{EC} = 7.544$.

34. המשולש ACE הוא ישר זווית ($\angle CAE = 90^\circ$). CB הוא חוצה זווית C . $\frac{CE}{AC} = \frac{11}{5}$. חשב את היחס בין אורך הקטע CB לאורך הקטע BE .



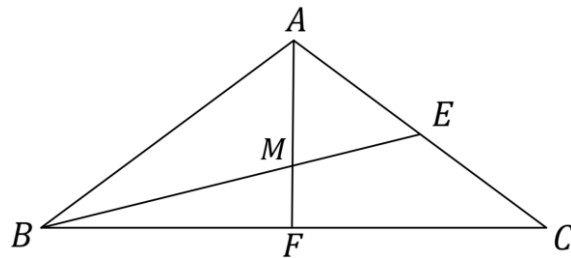
תשובה: $\frac{CB}{BE} = 0.87$

35. המשולש ABC הוא ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$). CE הוא תיכון לניצב AB . $\angle BAC = 31^\circ$. חשב את $\angle BEC$.



תשובה: $\angle BEC = 50.235^\circ$

36. משולש ABC הוא משולש שווה שוקיים ($AB = AC$). $\angle BAC = 110^\circ$. BE ו- AF הם תיכונים לצלעות AC ו- BC בהתאמה הנחתכים בנקודה M . חשב את זווית MBF .

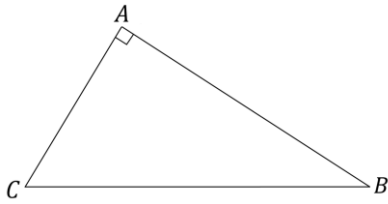
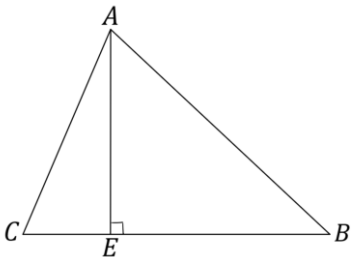
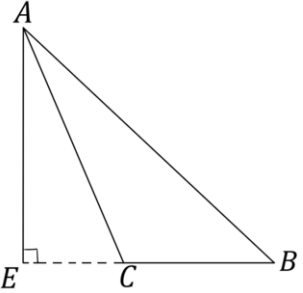


תשובה: $\angle MBF = 13.139^\circ$

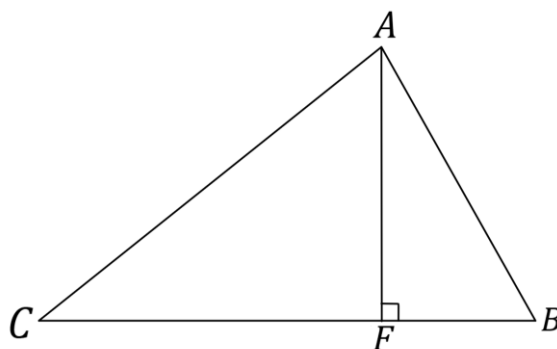
37. היקפו של משולש ישר זווית הוא 50 ס"מ. אחת מהזוויות שלו היא 15° . מצא את צלעות המשולש.

תשובה: 5.817 ס"מ, 21.709 ס"מ, 22.477 ס"מ.

תזכורת:

שטח משולש ישר זווית	
	$S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2}$ (מחצית ממכפלת הניצבים)
שטח משולש שאינו ישר זווית	
	$S_{ABC} = \frac{BC \cdot AE}{2}$ (מחצית ממכפלת צלע בגובה לאותה הצלע)
הערה: במשולש קהה זווית הגובה היורד מזווית שאינה קהה הוא גובה חיצוני	
	$S_{ABC} = \frac{BC \cdot AE}{2}$ (AE הוא גובה חיצוני)

38. AF הוא הגובה לצלע BC במשולש ABC. $AF = 10$ ס"מ, $\angle BAF = 25^\circ$, $\angle BAC = 87^\circ$.
 א. חשב את אורך הצלע BC.
 ב. חשב את שטח המשולש ABC.



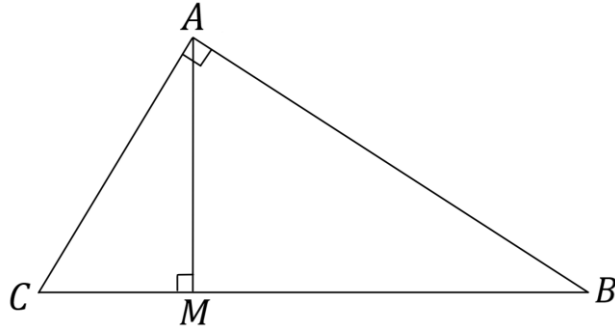
תשובה: א. $BC = 23.47$ ס"מ. ב. $S_{ABC} = 117.35$ סמ"ר.

39. מצא את שטחו של משולש ישר זווית אם ידוע שאחד מניצביו שווה 5 ס"מ והזווית שמול ניצב זה היא 53° .

תשובה: $S = 9.42$ סמ"ר

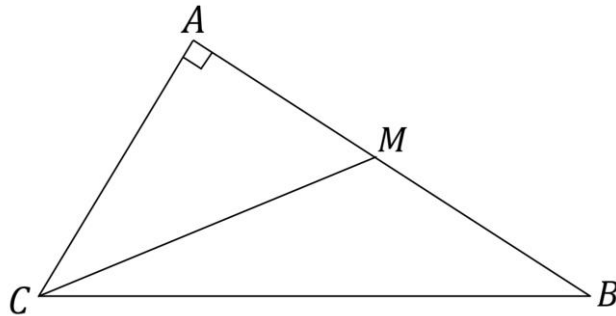
40. המשולש ABC הוא ישר זווית ($\angle BAC = 90^\circ$) AM הוא גובה ליתר במשולש ABC .
 $\angle CAM = 20^\circ$, $AM = 12$ ס"מ.

- א. חשב את שטח המשולש AMC .
ב. חשב את שטח המשולש ABC .



תשובה: א. $S_{AMC} = 26.208$ סמ"ר. ב. $S_{ABC} = 224.028$ סמ"ר.

41. המשולש ABC הוא ישר זווית ($\angle BAC = 90^\circ$). $AC = 10$ ס"מ, $AM = 6$ ס"מ, $\angle ABC = 23^\circ$.
חשב את שטח המשולש BMC .



תשובה: $S_{MBC} = 87.795$ סמ"ר.

42. במשולש שווה שוקיים אורך הבסיס הוא 20 ס"מ וזווית הראש שווה 30° . חשב את שטח המשולש.
תשובה: $S_{MBC} = 373.21$ סמ"ר.

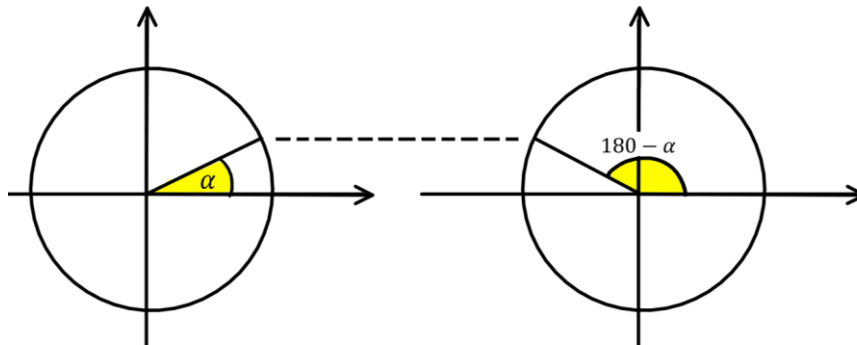
43. במשולש שווה שוקיים אורך השוק הוא 20 ס"מ וזווית הראש שווה 30° . חשב את שטח המשולש.
תשובה: $S_{MBC} = 100$ סמ"ר.

44. במשולש שווה שוקיים אורך הגובה לשוק הוא 20 ס"מ וזווית הראש שווה 25° . חשב את שטח המשולש.

תשובה: $S_{MBC} = 473.24$ סמ"ר.

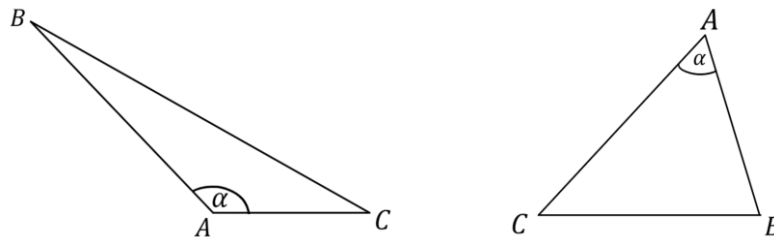
שטח משולש (שאינו בהכרח ישר זווית) לפי שתי צלעות וזווית ביניהן

עד עכשיו כשדיברנו על $\sin \alpha$ התמקדנו במשולש ישר זווית ולכן הזווית הייתה בתחום $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. לפני שנמשיך לתרגילים הבאים נצטרך להזכר שהגדרת פונקצית הסינוס רחבה יותר מזו שעסקנו בה במשולש ישר זווית. לפי מה שלמדנו על הגדרת הסינוס במעגל היחידה, פונקצית הסינוס מוגדרת לא רק עבור זוויות חדות. כעת נרצה להרחיב את הדין על $\sin \alpha$ ולהתמקד בתחום $0^\circ < \alpha < 180^\circ$. פשוט להבין ממעגל היחידה זהות מאוד מוכרת וחשובה: $\sin \alpha = \sin(180 - \alpha)$ כפי שתוכלו לראות באיור הבא:

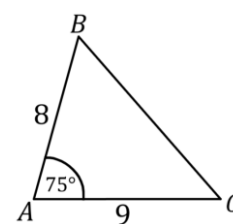
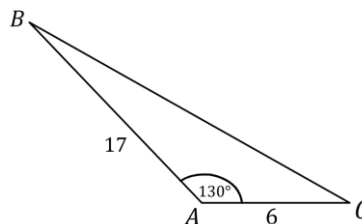
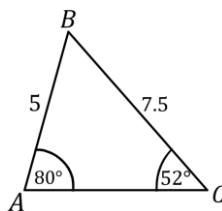


כפי שנסביר בסרטון הבא ישנה נוסחה לחישוב שטח משולש (שאינו בהכרח ישר זווית) לפי 2 צלעות והזווית שביניהם:

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \alpha}{2} \quad (\text{מחצית ממכפלת שתי צלעות בסינוס הזווית שביניהן})$$



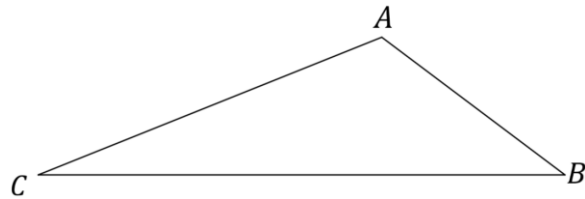
1. מצא את שטח המשולש במשולשים הבאים (יחידות האורך נתונות בס"מ):



תשובה: שטח המשולש הימני: 34.773 סמ"ר.
שטח המשולש האמצעי: 39.068 סמ"ר.
שטח המשולש השמאלי: 13.934 סמ"ר.

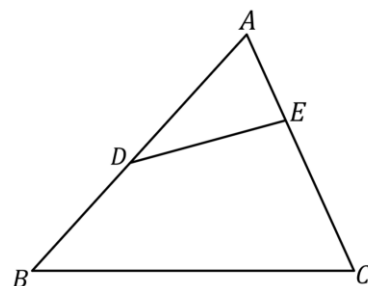
****לפני פתרון תרגיל 2 יש לצפות בסרטון ההסבר שמראה איך למצוא 2 זוויות בהינתן 2 צלעות במשולש ושטחו.**

2. במשולש ABC נתון $AB = 4$ ס"מ , $AC = 9$ ס"מ , שטח המשולש הוא 6 סמ"ר. מצא את זווית A במשולש אם ידוע ש- $\angle A > 90^\circ$.



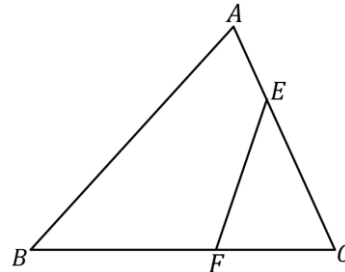
תשובה: $\angle A = 160.529^\circ$.

3. נתון משולש ששטחו 42 סמ"ר. מצא את הזווית בין הצלעות שאורכיהן 30 ס"מ ו-20 ס"מ.
תשובה: 171.952° או 8.048° .
4. חשב את שטחו של משולש שווה שוקיים שאורך השוק שלו שווה 6 ס"מ וזווית הראש שלו שווה 20° .
תשובה: 6.156 סמ"ר.
5. נתון משולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$). אורך שוק המשולש שווה 6 ס"מ וזווית ABC שווה 35° . נקודה E נמצאת על צלע AB כך ש- CE הוא תיכון לשוק. חשב את שטח משולש AEC .
תשובה: 8.457 סמ"ר.
6. מצא את שטחו של משולש שווה צלעות שאורך צלעו 10 ס"מ.
תשובה: 43.301 סמ"ר אפשר להגיש תשובה גם ככה: $25\sqrt{3}$ סמ"ר.
7. נתון משולש שווה שוקיים ששטחו 50 סמ"ר. חשב את אורך שוק המשולש אם נתון שזווית הראש שלו שווה 44° .
תשובה: 12.004 ס"מ.
8. במשולש ABC מתקיים $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$, $\angle ABC = 122^\circ$. חשב את אורכי הצלעות AB ו- BC אם נתון ששטח המשולש שווה 100 סמ"ר.
תשובה: $AB = 11.895$ ס"מ , $BC = 19.825$ ס"מ.
9. במשולש ABC מתקיים הצלע AB ארוכה ב-2 ס"מ מהצלע BC , $\angle ABC = 45^\circ$. חשב את אורכי הצלעות AB ו- BC אם נתון ששטח המשולש שווה $6\sqrt{2}$ סמ"ר.
תשובה: $AB = 6$ ס"מ , $BC = 4$ ס"מ.
10. שטחו של משולש קהה זווית הוא 50 סמ"ר. אורכי שתי צלעות במשולש 10 ס"מ ו-12 ס"מ. חשב את הזווית שכלואה בין שתי צלעות אלו.
תשובה: 123.557° .
11. במשולש ABC נקודות D ו- E נמצאות על צלעות AB ו- AC כך שמתקיים: $AD = 9$ ס"מ , $BD = 8$ ס"מ , $AE = 4$ ס"מ , $EC = 9$ ס"מ. זווית A שווה 75° . חשב את שטח המרובע $BDEC$.



תשובה: 89.348 סמ"ר.

12. במשולש חד זווית ABC נקודות E ו- F נמצאות על צלעות AC ו- BC כך שמתקיים: $AE = 5$ ס"מ, $BF = 18$ ס"מ, $FC = 12$ ס"מ, $EC = 15$ ס"מ. שטח המרובע $BFEA$ הוא $105\sqrt{3}$ סמ"ר. חשב את זווית C .



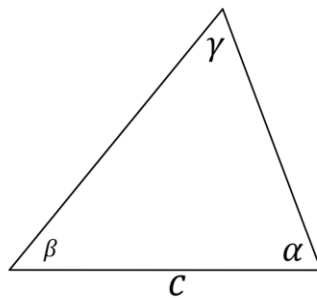
תשובה: $\angle C = 60^\circ$.

13. במשולש ABC $AB = 10$ ס"מ, $AC = 6$ ס"מ, $\angle BAC = 110^\circ$. AD הוא תיכון לצלע BC . חשב את שטחו של משולש ADC .
תשובה: 14.096 סמ"ר.

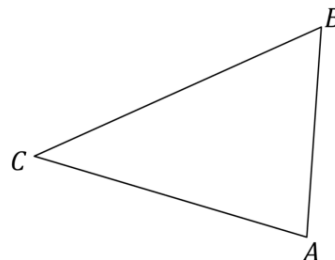
14. במשולש ABC $AB = 4$ ס"מ, $AC = 8$ ס"מ. AD הוא תיכון לצלע BC . חשב את זווית A אם ידוע שטחו של משולש ADC הוא $4\sqrt{2}$ סמ"ר.
תשובה: $\angle A = 45^\circ$ או $\angle A = 135^\circ$.

שטח משולש (שאינו בהכרח ישר זווית) לפי 3 זוויות וצלע.

$$S_{ABC} = \frac{c^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta}{2 \sin \gamma}$$

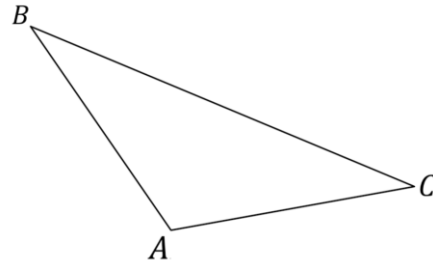


1. חשב את שטחו של משולש ABC אם נתון ש- $AB = 8$ ס"מ, $\angle BAC = 72^\circ$, $\angle BCA = 48^\circ$.



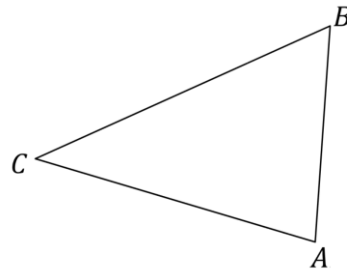
תשובה: 35.466 סמ"ר.

2. חשב את שטחו של משולש ABC אם נתון ש- $AB = 14$ ס"מ, $\angle BAC = 112^\circ$, $\angle CBA = 32^\circ$.



תשובה: 81.919 סמ"ר.

3. נתון משולש ABC ששטחו 100 סמ"ר חשב אורך הצלע AC אם נתון ש- $\angle BAC = 76^\circ$, $\angle BCA = 45^\circ$.



תשובה: 15.811 ס"מ.

טריגו במשולש ישר זווית - שאלות עם פרמטרים

לפני שנתחיל ללמוד שאלות עם פרמטרים נלמד מספר זהויות טריגונומטריות יסודיות. מאוד חשוב שתבינו כל אחת מהזהויות ולא רק תשננו בעל פה. כלומר, כן מומלץ לשנן בעל פה אבל גם להבין מה עומד מאחורי כל אחת מהזהויות. צפו בסרטון שמפרט את הזהויות הבאות ומסביר מה עומד מאחורי כל אחת מהן.

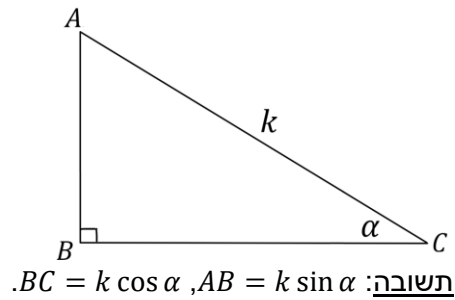
$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$	$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$	$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$
$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$	$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$	$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$	$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$
	$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$	$\tan(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\tan \alpha}$

הוכח את הזהויות הבאות:

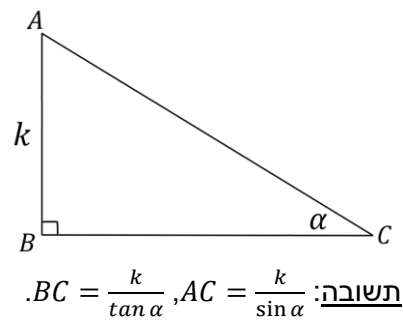
$$\begin{aligned} \cos(90^\circ - \alpha) \cot \alpha &= \cos \alpha & (2) & \sin(90^\circ - \alpha)(\tan \alpha - 1) = \sin \alpha - \cos \alpha & (1) \\ \frac{\sin(90^\circ - \alpha - \beta)}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)} &= \cot(\alpha + \beta) & (4) & \frac{\cos(90^\circ - \alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \tan(\alpha - \beta) & (3) \\ (1 - \cos(180^\circ + \alpha))(1 - \sin(90^\circ - \alpha)) &= \sin^2 \alpha & (6) & \frac{(1 - \cos(180^\circ - \alpha)) \sin(180^\circ - \alpha)}{1 + \sin(90^\circ + \alpha)} = \sin \alpha & (5) \\ 3\sin^2 \alpha + 4\cos^2 \alpha &= 3 + \cos^2 \alpha & (8) & \frac{\sin^3 \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha \cdot \sin^2 \alpha & (7) \\ (\cos \alpha - \sin \alpha)^2 &= 1 - 2\sin \alpha \cos \alpha & (10) & \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 1 = 2 & (9) \\ \frac{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)}{\cos^2 \alpha} &= \tan^2 \alpha & (12) & 2\sin^2 \alpha + 7\cos^2 \alpha = 7 - 5\sin^2 \alpha & (11) \\ 1 + \tan^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} & (14) & \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\tan \alpha} = 1 - \sin^2 \alpha & (13) \\ \cot \alpha + \tan \alpha &= \frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} & (16) & \cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} & (15) \\ \sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha &= 1 - \cos^2 \alpha & (18) & 1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\tan^2 \alpha} = \sin^2 \alpha & (17) \\ \sin \alpha \cos(90^\circ - \alpha) + \cos \alpha \sin(90^\circ - \alpha) &= 1 & (20) & \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} + \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} = 2 + 4\tan^2 \alpha & (19) \\ \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\tan(180^\circ - \alpha)} &= (\sin \alpha - 1)(\sin \alpha + 1) & (22) & \frac{\cos(-\alpha) - \sin(-\alpha)}{\sin \alpha + \sin(90^\circ - \alpha)} = 1 & (21) \\ \sin \alpha \cos(\alpha - 90^\circ) - \cos \alpha \sin(\alpha - 90^\circ) &= 1 & (24) & \tan \alpha \tan(90^\circ - \alpha) = 1 & (23) \\ (\cos(90^\circ + \alpha) - \cos(180^\circ - \alpha))^2 &= 1 - 2\sin \alpha \cos \alpha & (26) & \frac{\sin(180^\circ - \alpha) \cdot \sin(90^\circ + \alpha)}{\tan \alpha} = 1 - \sin^2 \alpha & (25) \\ & & & 2\cot(-\alpha) + 2\tan(-\alpha) = -\frac{2}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} & (27) \end{aligned}$$

בחלק מהתרגילים הבאים נשתמש בזהויות שלמדנו בעמוד הקודם.

1. במשולש ישר זווית ABC ($\angle ABC = 90^\circ$) אורך היתר הוא k וזווית C היא α . הבע באמצעות k ו- α את אורכי הניצבים AB ו- BC .

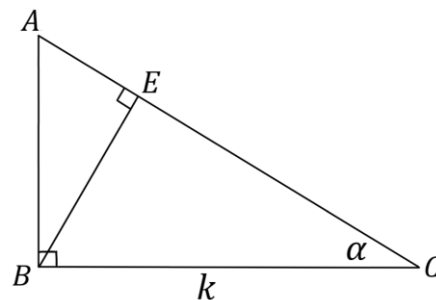


2. במשולש ישר זווית ABC ($\angle ABC = 90^\circ$) אורך הניצב AB הוא k וזווית C היא α . הבע באמצעות k ו- α את אורכי הצלעות AC ו- BC .

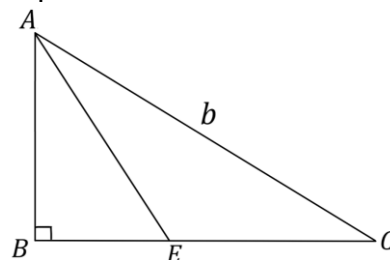


3. ABC הוא משולש ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$). אורך הניצב BC הוא k וזווית C היא α . BE הוא גובה ליתר. הבע באמצעות k ו- α את אורך הקטע AE .

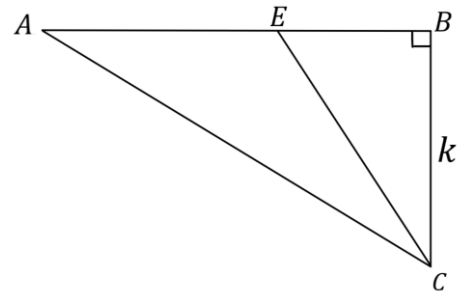
יש להביע את AE בשתי דרכים שונות: פעם אחת ללא שימוש בחיסור קטעים ופעם נוספת באמצעות חיסור קטעים. בשתי הדרכים יש להראות שהתשובה היא: $AE = k \sin \alpha \tan \alpha$.



4. ABC הוא משולש ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$). אורך היתר הוא b וזווית A היא α . AE הוא חוצה זווית A . הבע באמצעות b ו- α את אורך הקטע BE .

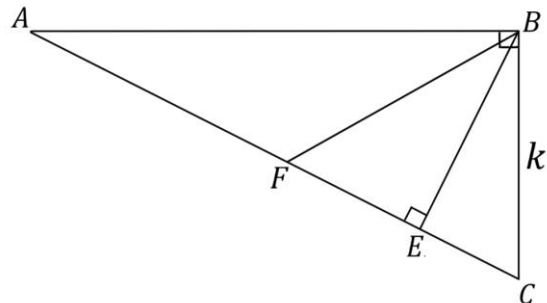


5. ABC הוא משולש ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$). אורך הניצב BC הוא k וזווית C היא α . CE הוא חוצה זווית C . הבע באמצעות k ו- α את אורך הקטע AE .

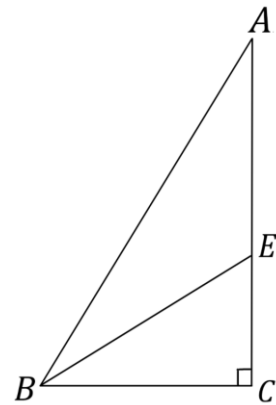


תשובה: $AE = k(\tan \alpha - \tan \frac{\alpha}{2})$

6. ABC הוא משולש ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$). אורך הניצב BC הוא k וזווית C היא α . BF הוא חוצה זווית B ו- BE הוא גובה ליתר. הבע באמצעות k ו- α את אורך הקטע AF והראה שהוא שווה ל- $AF = k \sin \alpha (\tan \alpha - \tan \frac{\alpha}{2})$.

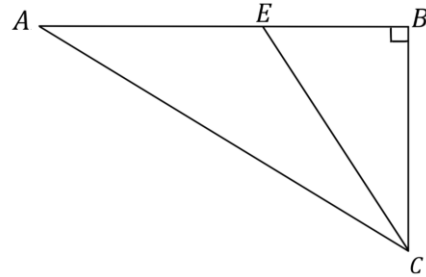


7. ABC הוא משולש ישר זווית ($\angle ACB = 90^\circ$). אורך הקטע AB הוא k . $\angle ABE = 20^\circ$, $\angle CBE = \beta$. הבע באמצעות הפרמטרים בשאלה את AE .



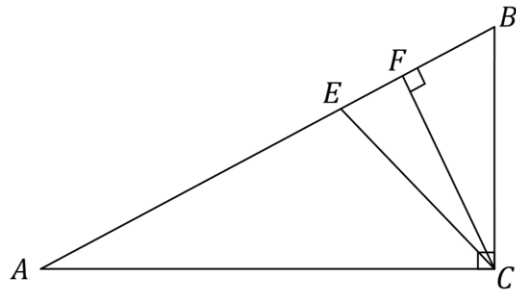
תשובה: $AE = k(\sin(20^\circ + \beta) - \cos(20^\circ + \beta) \tan \beta)$

8. ABC הוא משולש ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$). הנקודה E נמצאת על הניצב AB כך ש- $\angle BCE = \alpha$, $\angle ACE = \beta$, $EC = m$. הבע באמצעות הפרמטרים בשאלה את אורכו של AE .



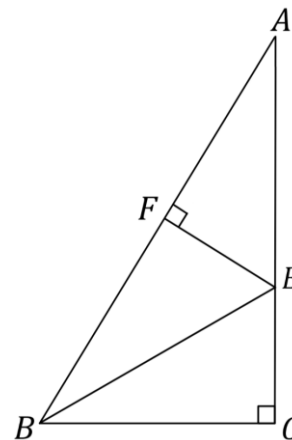
תשובה: $AE = m(\cos \alpha \cdot \tan(\alpha + \beta) - \sin \alpha)$

9. ABC הוא משולש ישר זווית ($\angle ACB = 90^\circ$). אורך הניצב BC הוא k וזווית ABC היא α . הנקודות E ו- F נמצאות עם היתר כך ש- CE הוא חוצה זווית ACB ו- CF הוא גובה ליתר (הנקודה F נמצאת בין B ל- E). הבע באמצעות k ו- α את אורך הקטע AE .



תשובה: $AE = k \sin \alpha (\tan \alpha - \tan(\alpha - 45^\circ))$
 *אם לא הגעת לתשובה הזאת תוכל להיעזר בזהויות: $\tan(90 - \alpha) = \frac{1}{\tan \alpha}$, $\cos(90 - \alpha) = \sin \alpha$ כדי להגיע אליה.

10. ABC הוא משולש ישר זווית ($\angle ACB = 90^\circ$). הנקודה E נמצאת על הניצב AC כך ש- BE חוצה זווית B . נקודה F נמצאת על AB כך ש- EF מאונך ל- AB . $BC = k$. $\angle ABC = \alpha$. הבע את AF באמצעות הפרמטרים הנתונים בשאלה.



תשובה: ישנן מספר תשובות אפשריות אשר כל אחת מהן תתקבל:

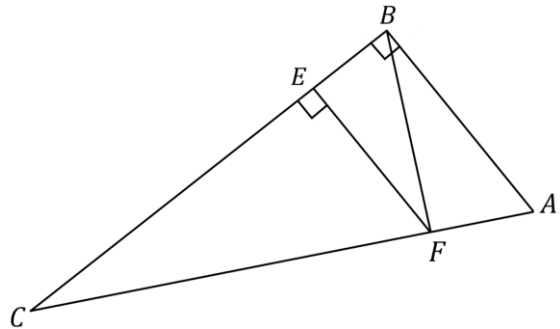
$$i. \quad k \tan \frac{\alpha}{2} \tan \alpha$$

$$ii. \quad \frac{k}{\cos \alpha} - k$$

$$iii. \quad k \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right)$$

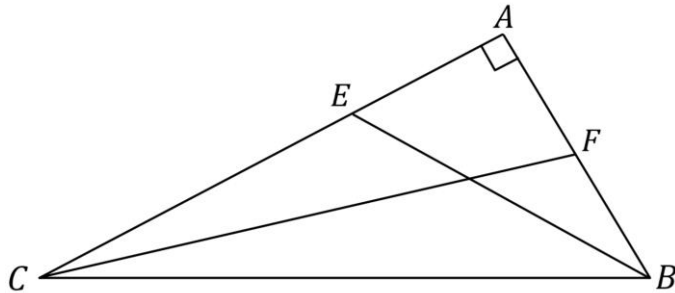
$$iv. \quad k \left(\frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} \right)$$

11. ABC הוא משולש ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$). BF הוא גובה ליתר. הנקודה E נמצאת על הניצב BC כך ש- FE מאונך לניצב BC . נסמן: $AC = m$, $\angle A = \alpha$. הבע את EF באמצעות הפרמטרים הנתונים בשאלה.



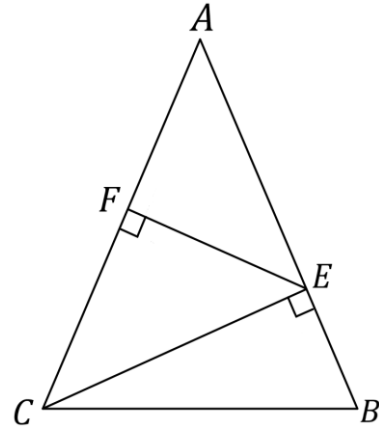
תשובה: $EF = m \cos \alpha \sin^2 \alpha$

12. ABC הוא משולש ישר זווית ($\angle CAB = 90^\circ$). הנקודה E נמצאת על הניצב AC כך ש- BE חוצה זווית B . נקודה F נמצאת על AB כך ש- CF חוצה זווית C . $CF = k$. $\angle ACB = \alpha$. הבע את BE באמצעות הפרמטרים הנתונים בשאלה.



תשובה: $\frac{k \cos \frac{\alpha}{2} \tan \alpha}{\sin(45^\circ + \frac{\alpha}{2})}$ או $\frac{k \cos \frac{\alpha}{2} \tan \alpha}{\cos(45^\circ - \frac{\alpha}{2})}$

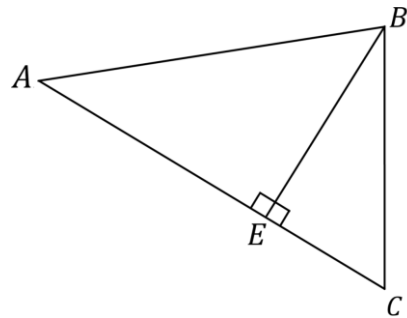
13. ABC הוא משולש שווה שוקיים ($AB = AC$). CE הוא גובה לשוק AB . הנקודה F נמצאת על השוק AC כך ש- $EF \perp AC$. $BC = k$, $\angle CBA = \alpha$. הבע את AF באמצעות הפרמטרים הנתונים בשאלה.



תשובה: ישנן מספר תשובות אפשריות אשר כל אחת מהן תתקבל:

$$\begin{aligned} & i. \frac{k \sin \alpha \cos 2\alpha}{\tan 2\alpha} \\ & ii. k \left(\frac{1}{2 \cos \alpha} - \sin \alpha \sin 2\alpha \right) \\ & iii. k \sin \alpha \left(\frac{1}{\sin 2\alpha} - \sin 2\alpha \right) \end{aligned}$$

14. BE הוא גובה לצלע AC במשולש ABC . $\angle CBA = 80^\circ$, $\angle CBE = \alpha$. הבע באמצעות α את היחס בין הקטעים EC ל- AE .

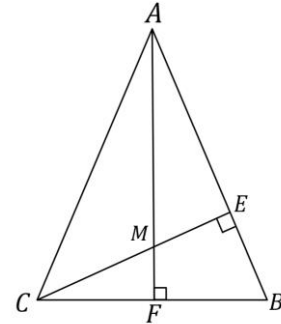


תשובה: $\frac{EC}{AE} = \frac{\tan \alpha}{\tan(80^\circ - \alpha)}$

15. ABC הוא משולש שווה שוקיים ($AB = AC$) שזווית הראש שלו שווה 20° . CF ו- AE הם גבהים ל- AB ו- BC בהתאמה והם נחתכים בנקודה M הנמצאת בתוך המשולש. $BC = k$. הבע את AM באמצעות k .

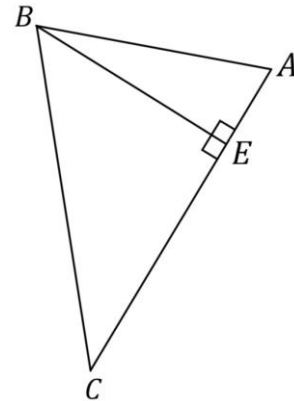
תשובה: $AM = 2.748k$

16. ABC הוא משולש שווה שוקיים ($AB = AC$) שזווית הראש שלו שווה $180^\circ - \alpha$. CE ו- AF הם גבהים ל- AB ו- BC בהתאמה והם נחתכים בנקודה M הנמצאת בתוך המשולש. הבע באמצעות α את היחס בין AM ל- MF .



תשובה: $\frac{AM}{MF} = \tan^2 \frac{\alpha}{2} - 1$

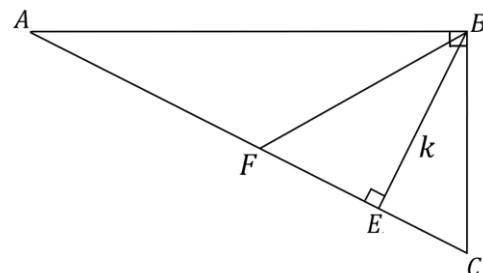
17. במשולש חד זווית ABC הזווית BE הוא הגובה לצלע AC . $\angle CBA = \alpha$, $\angle CBE = \beta$. $AC = m$. הבע באמצעות הפרמטרים בשאלה את הגובה BE .



תשובה: $\frac{m}{\tan(\alpha - \beta) + \tan \beta}$

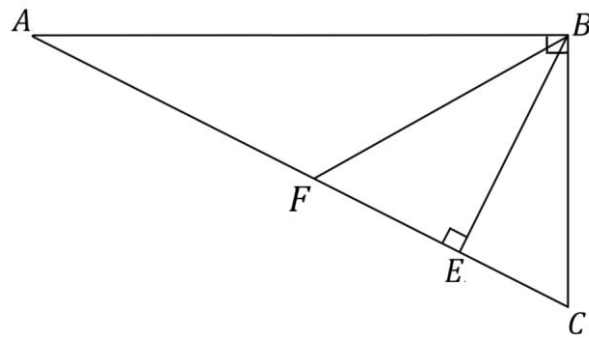
18. הבע את שטחו של משולש ישר זווית שאחד מניצביו הוא k והזווית מול ניצב זה היא α .

19. ABC הוא משולש ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$). זווית C היא α . BF הוא חוצה זווית ABE ו- BE הוא גובה ליתר השווה ל- k . הבע באמצעות k ו- α את שטחו של משולש BEF .



תשובה: $\frac{1}{2} k^2 \tan \frac{\alpha}{2}$

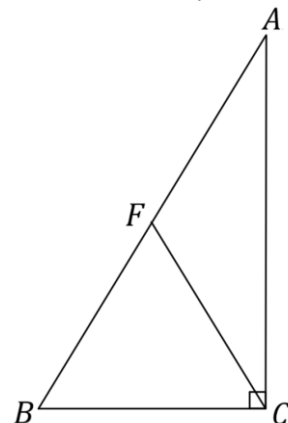
20. ABC הוא משולש ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$). זווית C היא α . BF הוא חוצה זווית ABE ו- BE הוא גובה ליתר. $AC = k$. הבע באמצעות k ו- α את שטחו של משולש BEF .



תשובה: $\frac{1}{2} k^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \tan \frac{\alpha}{2}$

21. ABC הוא משולש ישר זווית ($\angle ACB = 90^\circ$). CF הוא תיכון ליתר AB . נסמן: $\angle ABC = \beta$, $AB = 2m$. הראה ששטח המשולש AFC הוא $\frac{1}{2} m^2 \sin 2\beta$.

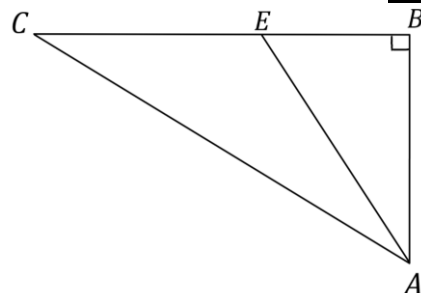
הערה: יש לשים לב שיש כמה דרכים להביע את שטח המשולש. לא כולן יניבו את הביטוי הנ"ל. לכן יש לנסות עד למציאת הדרך שתניב את הביטוי הנ"ל.



22. ABC הוא משולש ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$). אורכו של AE הוא b וזווית A היא α .

AE הוא חוצה זווית A . הראה ששטח משולש AEC הוא: $\frac{b^2 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \alpha}$.

רמז: אל תשתמש בחיסור של שני שטחים אלא הבע ישירות את שטחו של משולש AEC

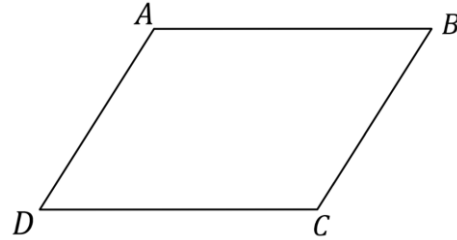


23. הבע את שטחו של משולש ישר זווית באמצעות b אם ידוע שאחת הזוויות החדות שלו שווה 40° וסכום האורכים של היתר והניצב שליד ה- 40° הוא b .

תשובה: $S = 0.079b^2$

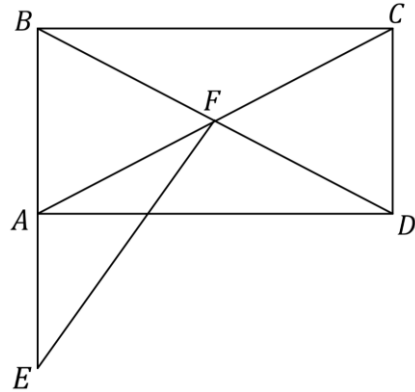
טריגו במשולש ישר זווית-בעיות עם במרובעים

1. נתונה מקבילית $ABCD$. $AB = 10$ ס"מ, $AD = 8$ ס"מ. חשב את זווית המקבילית אם נתון ששטחה הוא 61.2835 סמ"ר.



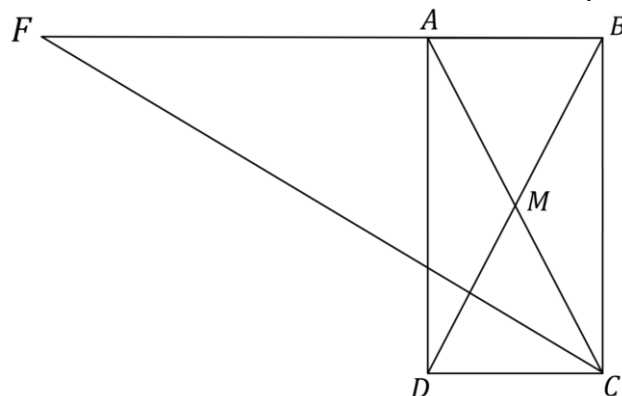
תשובה: $\angle A \approx 130^\circ, \angle B \approx 50^\circ, \angle C \approx 130^\circ, \angle D \approx 50^\circ$

2. נתון מלבן $ABCD$. המשיכו את הצלע AB לכיוון של A עד נקודה E כך ש- $AE = 4$ ס"מ. $AB = 5$ ס"מ, $BC = 12$ ס"מ. חשב את שטחו של משולש AFE .



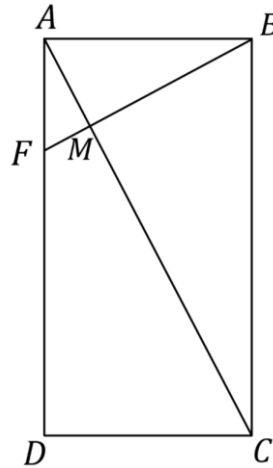
תשובה: 12 סמ"ר.

3. נתון מלבן $ABCD$. אלכסוני המלבן נפגשים בנקודה M . המשיכו את הצלע AB לכיוון של A עד נקודה F כך ש- $AF = BD$. $AB = 8$ ס"מ, $BC = 12$ ס"מ. חשב את שטחו של משולש AFC .

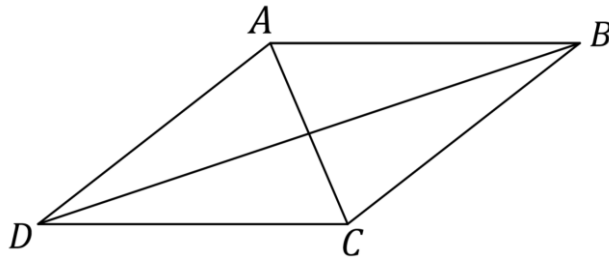


תשובה: 86.533 סמ"ר.

4. נתון מלבן $ABCD$. נקודה F נמצאת על צלע AD כך ש- BF מאונך לאלכסון AC (והם נחתכים בנקודה M). נסמן: $\angle ACB = \beta$, $BC = k$. הראה שהקטע FM שווה: $k \tan^2 \beta \sin \beta$ בשתי דרכים:
 א. ללא חיסור קטעים.
 ב. ע"י חיסור קטעים ושימוש בזהויות.



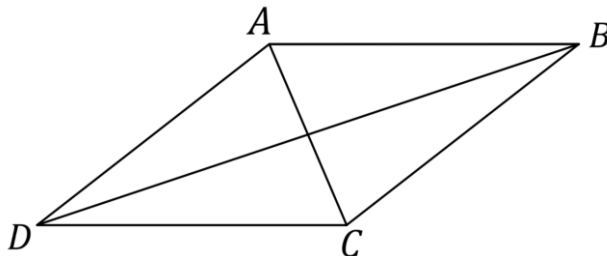
5. נתון מעוין $ABCD$. היקף המעוין 80 ס"מ ואורכו של האלכסון הקצר AC הוא 14 ס"מ. חשב את זווית המעוין.



תשובה: $\angle A = 139.126^\circ$, $\angle B = 40.974^\circ$, $\angle C = 139.126^\circ$, $\angle D = 40.974^\circ$

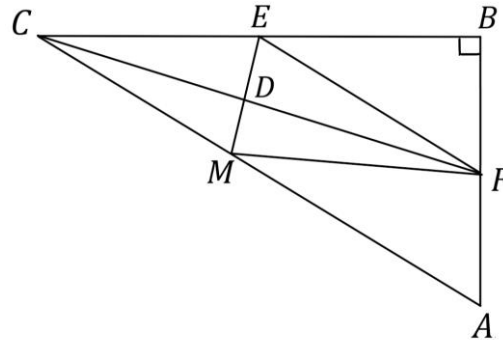
6. נתון מעוין $ABCD$. גובה המעוין הוא 4 ס"מ ואורכו של האלכסון BD (הארוך מבין השניים) הוא 16 ס"מ. חשב:

- א. את זווית המעוין.
 ב. את צלע המעוין.



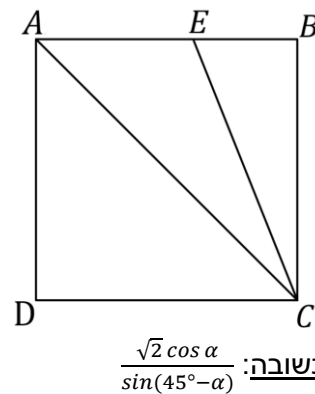
תשובה: א. $\angle A = 151.044^\circ$, $\angle B = 28.956^\circ$, $\angle C = 151.044^\circ$, $\angle D = 28.956^\circ$
 ב. 8.262 ס"מ

7. ABC הוא משולש ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$). הנקודות F, E ו- M נמצאות על צלעות המשולש כמתואר בשרטוט כך שמרובע $CEFM$ הוא מעוין. אלכסוני המעוין נחתכים בנקודה D . נסמן: $EM = b$, $\angle C = \alpha$. הבע באמצעות הפרמטרים בשאלה את AC .



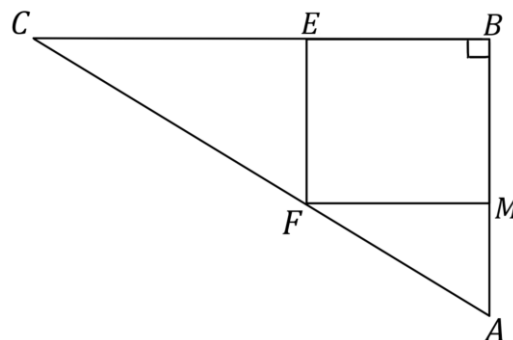
תשובה: $AC = \frac{b \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha \cdot \tan \frac{\alpha}{2}}$ או $AC = \frac{b(\cos \alpha + 1)}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \alpha}$

8. $ABCD$ הוא ריבוע נקודה E נמצאת על צלע AB . נסמן $\angle ECB = \alpha$. הבע באמצעות α את היחס בין שטח הריבוע לשטח המשולש AEC .



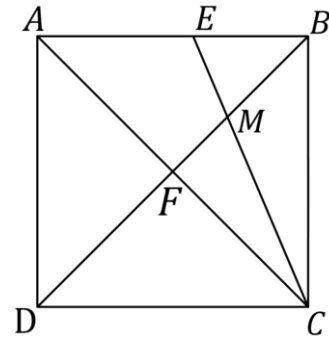
תשובה: $\frac{\sqrt{2} \cos \alpha}{\sin(45^\circ - \alpha)}$

9. $EBMF$ הוא ריבוע החסום במשולש ישר זווית ABC . $\angle ACB = 38^\circ$. נסמן את אלכסון הריבוע ב- k . הבע באמצעות k את שטח המשולש ABC .



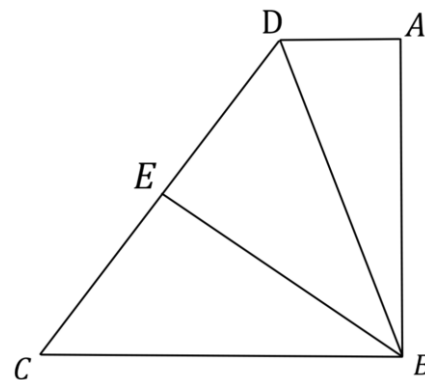
תשובה: $1.015k^2$

10. $ABCD$ הוא ריבוע אשר אלכסוניו נחתכים בנקודה F . CE הוא חוצה זווית ACB . נסמן את צלע הריבוע ב- K . הבע באמצעות K את שטח משולש EBM .

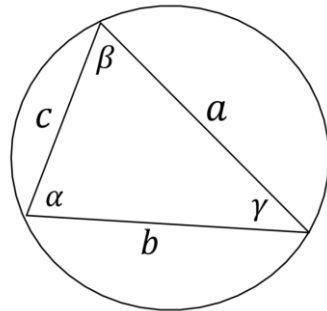


תשובה: $0.061k^2$.

11. $ABCD$ הוא טרפז ישר זווית ($AD \parallel BC, \angle DAB = 90^\circ$). נקודה E היא אמצע השוק CD . האלכסון BD שווה באורכו לבסיס הגדול BC . נסמן: $BE = b, \angle C = \beta$ ($45^\circ < \beta < 90^\circ$). השתמש בזהויות טריגונומטריות במידת הצורך והראה ש- AD שווה $\frac{-b \cos 2\beta}{\sin \beta}$.



משפט הסינוסים



$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

1. במשולש ABC נתון:

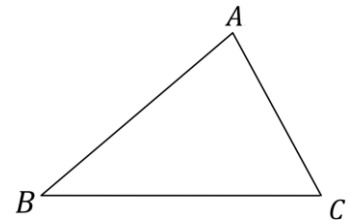
$$\sphericalangle A = 85^\circ$$

$$\sphericalangle C = 54^\circ$$

$$AB = 10 \text{ ס"מ}$$

א. חשב את אורכי הצלעות AC ו- BC .

ב. חשב את שטח המעגל החוסם את המשולש.



תשובה: א. $AC = 8.109 \text{ ס"מ}$, $BC = 12.314 \text{ ס"מ}$ ב. 119.998 סמ"ר .

2. במשולש ABC נתון:

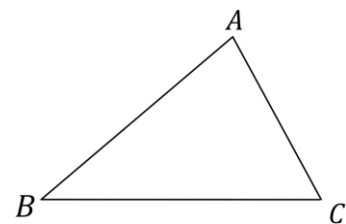
$$\sphericalangle A = 81^\circ$$

$$AC = 4.8 \text{ ס"מ}$$

$$BC = 7 \text{ ס"מ}$$

א. חשב את $\sphericalangle B$

ב. חשב את היקף המעגל החוסם את המשולש.



תשובה: א. $\sphericalangle B = 42.63^\circ$ ב. 22.268 ס"מ .

3. במשולש ABC נתון:

$$\angle A = 96^\circ$$

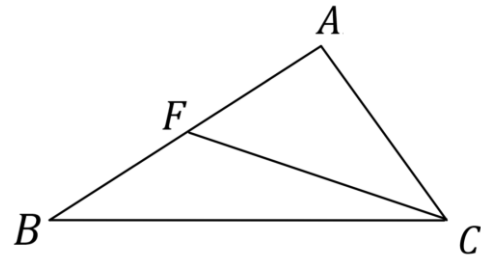
$$\angle B = 21^\circ$$

$$\angle ACF = 27^\circ$$

$$AC = 3 \text{ ס"מ}$$

א. חשב את FB .

ב. חשב את שטח משולש BFC .



תשובה: א. $FB = 5.835 \text{ ס"מ}$ ב. $S_{BFC} = 8.703 \text{ סמ"ר}$.

4. במשולש ABC נתון:

$$\angle C = 84^\circ$$

$$\angle A = 32^\circ$$

$$\angle AFB = 103^\circ$$

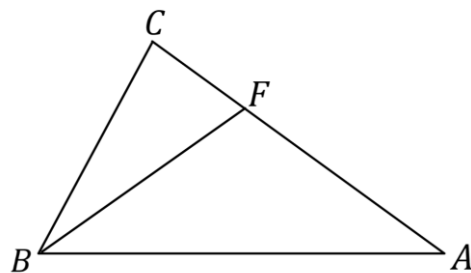
$$BC = 10 \text{ ס"מ}$$

א. חשב את AF .

ב. חשב את שטח המעגל החוסם את משולש BFC .

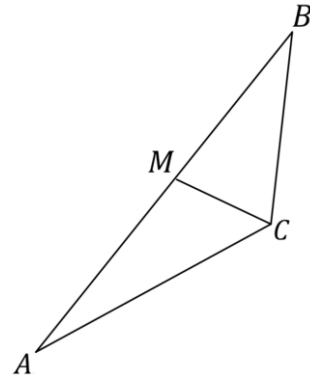
ג. חשב את שטח המעגל החוסם את משולש ABF .

ד. חשב את שטח המעגל החוסם את משולש ABC .



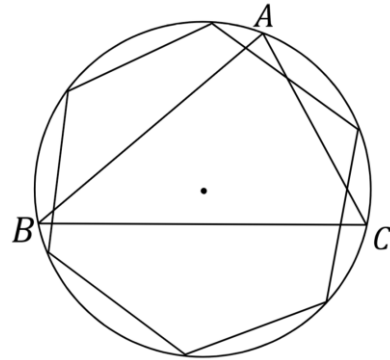
תשובה: א) 13.62 ס"מ (ב) 82.741 סמ"ר (ג) 291.402 סמ"ר (ד) 279.662 סמ"ר .

5. CM הוא חוצה זווית במשולש ABC . $\angle ACB = 120^\circ$, $\angle B = 38^\circ$, $AC = 30$ ס"מ.
 א. חשב את אורכו של BM .
 ב. חשב את שטחו של משולש BMC .



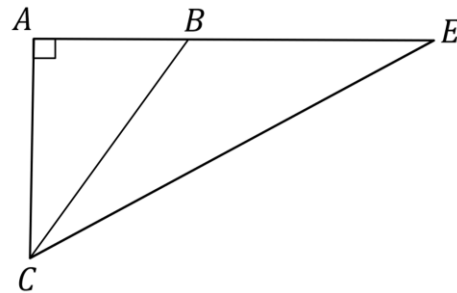
- א. 15.964 ס"מ.
 ב. 89.704 סמ"ר.

6. במשולש ABC נתון: $AC = 8$ ס"מ, $\angle B = 41^\circ$. חשב את שטחו של משושה משוכלל שחסום במעגל החוסם את משולש ABC .
 תזכורת: מצולע משוכלל הוא מצולע שכל צלעותיו וכל זוויותיו שוות.



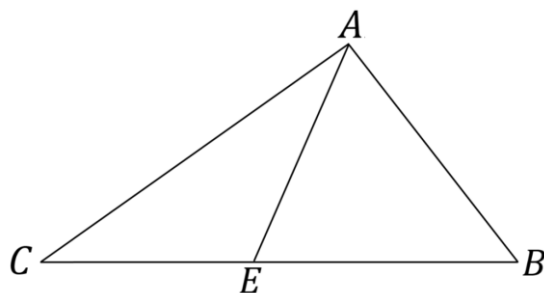
תשובה: 96.582 סמ"ר.

7. המשולש ACE הוא ישר זווית ($\angle CAE = 90^\circ$). CB הוא חוצה זווית C . $BE = 4$ ס"מ, $\angle E = 28^\circ$.
 חשב את אורכו של AB .



תשובה: 1.878 ס"מ

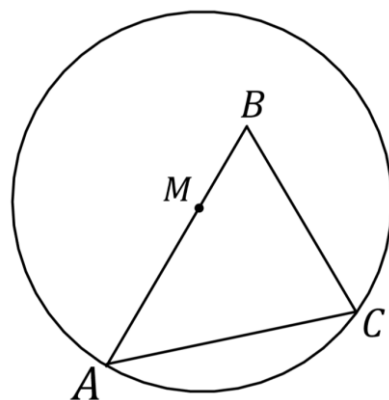
8. במשולש ABC נתון: $AC = 6.4$ ס"מ, $EC = 3.8$ ס"מ, $\angle CEA = 112^\circ$, $\angle BAE = 63^\circ$.
 א. חשב את זווית C .
 ב. חשב את אורכו של BE .



תשובה: א. $\angle C = 34.598^\circ$ ב. $BE = 4.627$ ס"מ.

9. AC מיתר במעגל שמרכזו בנקודה M . המשיכו את הקטע AM עד נקודה B הנמצאת בתוך המעגל כך שמתקיים: $\angle B = 65^\circ$, $AC = 4$ ס"מ, $AB = 4.2$ ס"מ.
 א. מצא את רדיוס המעגל.

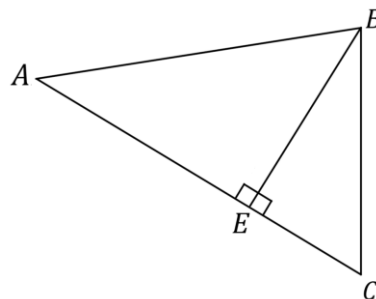
- ב. רון ניסה למצוא את רדיוס המעגל לפי משפט הסינוסים במשולש ABC באופן הבא: $\frac{AC}{\sin \angle B} = 2R$.
 הסבר מדוע קיבל תוצאה שגויה.



תשובה: א. 2.73 ס"מ ב. נקבל את הרדיוס של המעגל החוסם את משולש ABC וזה לא מה שביקשו (שימו לב ש- ABC לא חסום במעגל כי לא כל קודקודיו נוגעים בהיקף המעגל).

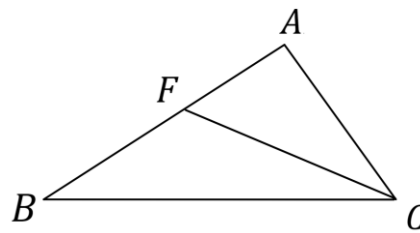
10. מצא את השוק במשולש שווה שוקיים אשר בסיסו שווה 6 ס"מ וזווית הראש שלו 40° .
תשובה: 8.771 ס"מ

11. BE הוא הגובה לצלע AC במשולש ABC . נתון: $\angle C = 55^\circ$, $\angle A = 41^\circ$, $AC = 9$ ס"מ.
 מצא את אורכו של BE .



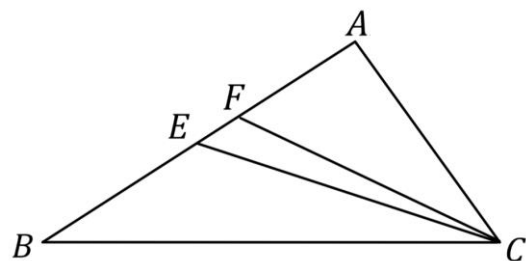
תשובה: 4.863 ס"מ.

12. CF הוא חוצה זווית C במשולש ABC . נתון: $\angle A = 92^\circ$, $\angle B = 31^\circ$, $AB = 14$ ס"מ. מצא את אורכו של CF .



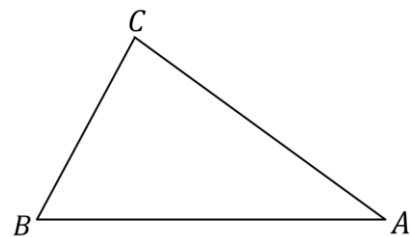
תשובה: 9.972 ס"מ.

13. CF הוא חוצה זווית C במשולש ABC ו- CE הוא תיכון במשולש זה. נתון: $\angle A = 92^\circ$, $\angle B = 31^\circ$, $CB = 8$ ס"מ. מצא את אורכו של EF .



תשובה: 1.073 ס"מ.

14. במשולש ABC נתון $\angle B = 60^\circ$, $AC = 1.4BC$. חשב את זווית C .



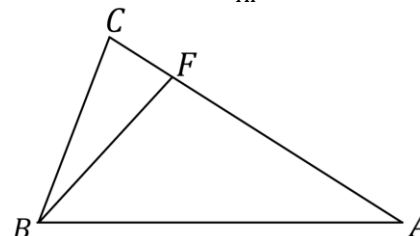
תשובה: $\angle C = 81.787^\circ$.

15. מצא את היקפו של משולש שצלעו הארוכה ביותר גדולה ב-3 ס"מ מהצלע הקצרה ביותר אם ידוע ששתיים מזוויותיו הן 27° ו- 74° .

תשובה: 13.627 ס"מ.

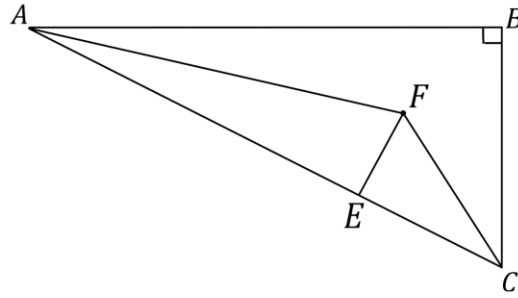
16. במשולש ABC זווית A שווה 35° . נקודה F נמצאת על הצלע AC כך ש: $\angle CFB = 82^\circ$.

מצא את היחס $\frac{AB}{AF}$.



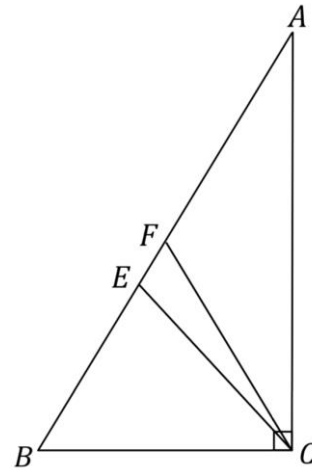
תשובה: $\frac{AB}{AF} = 1.354$.

17. נקודה F היא נקודת מפגש חוצי הזווית במשולש ישר זווית ABC ($\angle B = 90^\circ$). $EF \perp AC$. נסמן: $\angle A = \beta$, $AC = k$. הבע באמצעות הפרמטרים בשאלה את אורך הקטע EF .



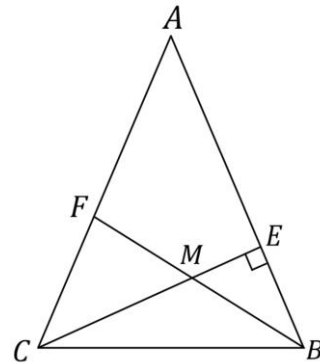
תשובה: $\sqrt{2}k \sin(45^\circ - \frac{1}{2}\beta) \sin \frac{1}{2}\beta$

18. CF הוא תיכון ליתר במשולש ישר זווית ABC ($\angle C = 90^\circ$). CE הוא חוצה זווית. נסמן: $AB = k$, $\angle B = \beta$ ($45^\circ < \beta < 90^\circ$). הבע באמצעות הפרמטרים בשאלה את אורך הקטע EF .



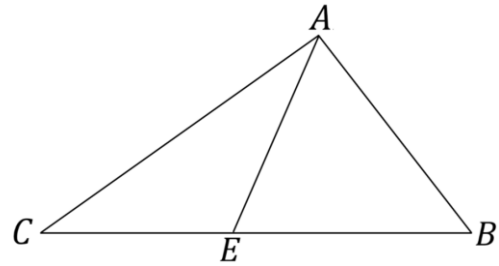
תשובה: $\frac{k(\sin(135^\circ - \beta) - \sqrt{2} \cos \beta)}{2 \sin(135^\circ - \beta)}$ או $\frac{k \sin(\beta - 45^\circ)}{2 \sin(\beta + 45^\circ)}$

19. משולש שווה שוקיים שאורך שוקו הוא k ($AB = AC$). CE גובה לשוק AB . BF הוא חוצה זווית B . CE ו- BF נחתכים בנקודה M . $\angle A = 180^\circ - 2\alpha$. הבע באמצעות k ו- α את שטח המשולש AEF ($45^\circ < \alpha < 90^\circ$).

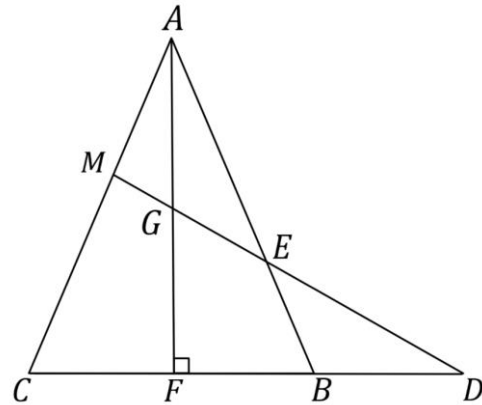


תשובה: $\frac{-k^2 \cos 2\alpha \sin 2\alpha \sin \frac{1}{2}\alpha}{2 \sin \frac{1}{2}\alpha}$

20. במשולש ABC נקודה E נמצאת על צלע BC כך ש- $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle AEB = \gamma$. הראה שהיחס בין שטח המשולש AEB לשטחו של ABC הוא $\frac{\sin(\beta+\gamma) \sin(\beta+\alpha)}{\sin \gamma \sin \alpha}$.



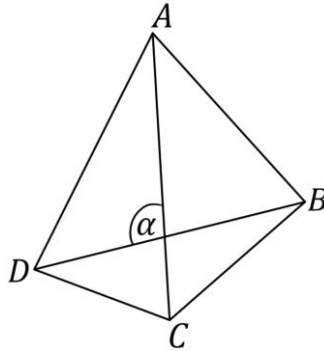
21. משולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$). AF הוא גובה לבסיס. נקודה G על הגובה כך ש- $AG = k$. המשיכו את CB עד נקודה D . הנקודה M נמצאת על AC כך ש- DM עובר דרך הנקודה G וחותר את AB בנקודה E . $\angle D = \beta$, $\angle A = \alpha$. הבע באמצעות הפרמטרים בשאלה את שטח משולש AME .



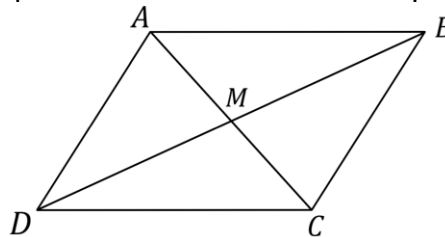
$$\frac{k^2 \cos \beta \sin \frac{\alpha}{2} (\cos(\frac{\alpha}{2} - \beta) + \cos(\frac{\alpha}{2} + \beta))}{2 \cos(\frac{\alpha}{2} - \beta) \cos(\frac{\alpha}{2} + \beta)} \quad \text{או} \quad \frac{k^2 \cos^2 \beta \sin \alpha}{2 \cos(\frac{\alpha}{2} - \beta) \cos(\frac{\alpha}{2} + \beta)} \quad \text{תשובה:}$$

שטח מרובע לפי מכפלת האלכסונים בסינוס הזווית שביניהם

$$S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD \cdot \sin \alpha}{2}$$

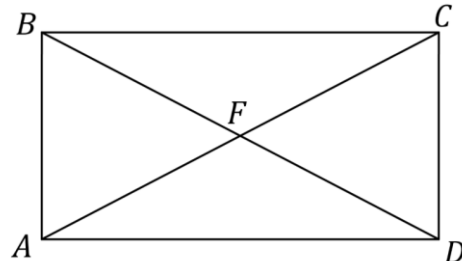


1. במקבילית ABCD האלכסונים נחתכים בנקודה M
נתון ש- $AM = 4$ ס"מ, $DB = 14$ ס"מ ו- $\angle AMD = 78^\circ$.
א. מצא את שטחה של המקבילית
ב. נתון $DC = 11$ ס"מ מצא את גובה המקבילית לצלע DC.



תשובה: א) 54.776 סמ"ר ב) 4.98 ס"מ.

2. נתון מלבן ששטחו 60 סמ"ר. חשב את הזווית החדה שבין אלכסוני המלבן אם ידוע ש- $DB = 12$ ס"מ

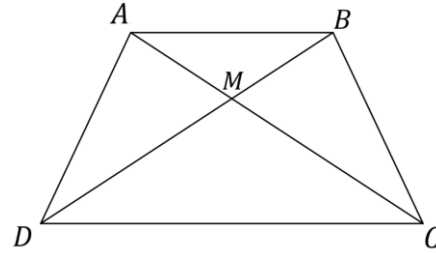


תשובה: 56.443° .

3. חשב את אורך האלכסון בטרפז שווה שוקיים אם ידוע ששטחו הוא 100 סמ"ר והזווית הקהה שבין האלכסונים היא 110° .

תשובה: 14.589 ס"מ.

4. בטרפז שווה שוקיים $ABCD$ ($AB \parallel CD$) האלכסונים נחתכים בנקודה M . נסמן את גובה הטרפז ב- h ואת זווית BMC ב- 2β . הבע באמצעות הפרמטרים בשאלה את שטח הטרפז.



תשובה: $\frac{h^2 \sin 2\beta}{2 \sin^2 \beta}$

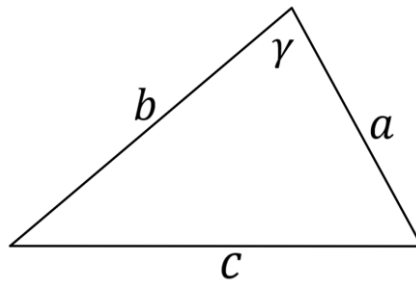
5. נסמן את שטחו של מלבן ב- S ואת הזווית החדה שבין האלכסונים ב- β .
 א. הבע באמצעות הפרמטרים בשאלה את אורך אלכסון המלבן.
 ב. הבע באמצעות הפרמטרים בשאלה את אורכי צלעות המלבן.

תשובה: א) $\sqrt{\frac{2S}{\sin \beta}}$ ב) $\sin \frac{\beta}{2} \cdot \sqrt{\frac{2S}{\sin \beta}}, \cos \frac{\beta}{2} \cdot \sqrt{\frac{2S}{\sin \beta}}$

6. נתון מלבן שאורכו a ורוחבו b .
 א. הבע את שטח המלבן ואלכסונו באמצעות a ו- b .
 ב. נסמן את הזווית שבין האלכסונים ב- β . הראה ש: $\sin \beta = \frac{2ab}{a^2+b^2}$.

משפט הקוסינוסים

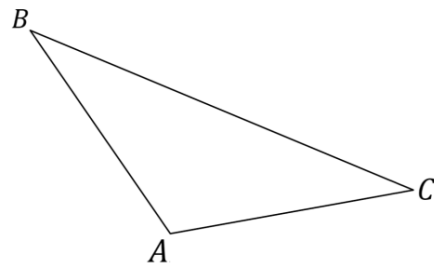
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



שימושים נפוצים למשפט הקוסינוסים

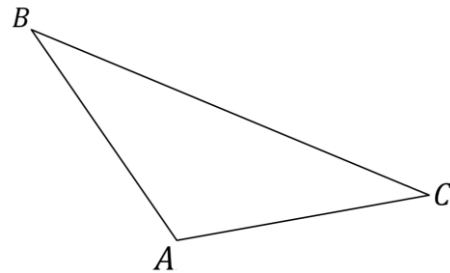
1. שיש לנו 2 צלעות ואת הזווית שביניהן ונרצה למצוא את הצלע השלישית
2. שיש לנו 3 צלעות ונרצה למצוא זווית.

1. במשולש ABC נתון $AB = 8$ ס"מ, $BC = 15$ ס"מ, $\angle B = 40^\circ$. חשב את אורכו של AC.



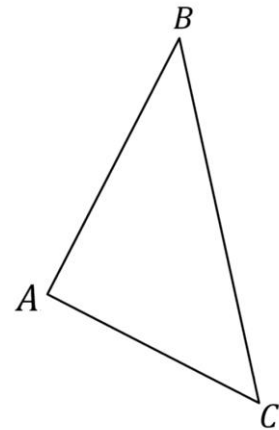
תשובה: 10.254 ס"מ.

2. במשולש ABC נתון $AB = 7.6$ ס"מ, $AC = 7$ ס"מ, $\angle A = 110^\circ$. חשב את אורכו של BC.



תשובה: 11.964 ס"מ.

3. במשולש ABC נתון $AB = 20$ ס"מ, $AC = 13$ ס"מ, $BC = 24$ ס"מ. מצא את זווית C .

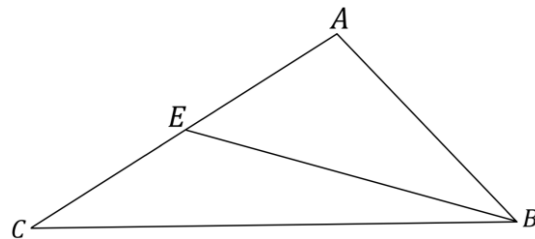


תשובה: $\angle C = 56.435^\circ$.

4. במשולש ABC נתון $AC = a$, $AB = 0.7a$, $BC = 1.2a$ (פרמטר חיובי). מצא את זוויות המשולש.

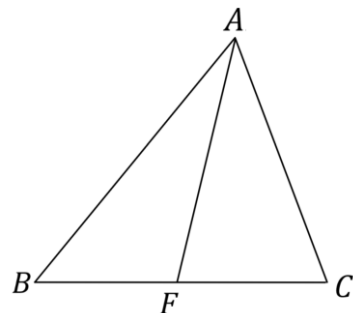
תשובה: $\angle C = 35.659^\circ$, $\angle A = 87.953^\circ$, $\angle B = 55.388^\circ$.

5. EB הוא תיכון לצלע AC במשולש ABC . $AB = 12$ ס"מ, $AC = 20$ ס"מ, $\angle A = 114^\circ$.
א. חשב את EB .
ב. חשב את זווית BEC .

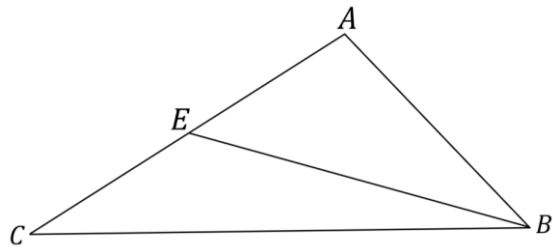


תשובה: א) $EB = 18.483$ ס"מ. ב) $\angle BEC = 143.622^\circ$.

6. AF הוא תיכון לצלע BC במשולש ABC . $BC = 8$ ס"מ, $AB = 9$ ס"מ, $AC = 6.8$ ס"מ. חשב את אורכו של AC .

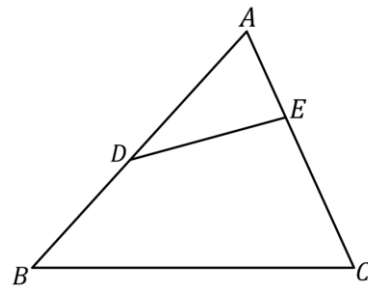


7. במשולש ABC נתון $AB = 17$ ס"מ, $BC = 30$ ס"מ, $AC = 24$ ס"מ. חשב את אורך התיכון BE .



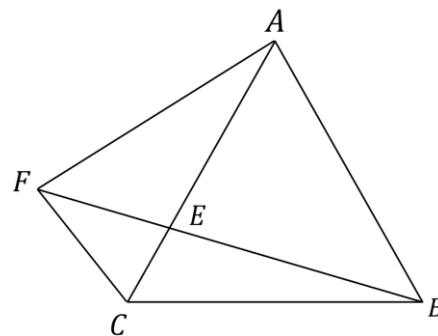
תשובה: 21.225 ס"מ.

8. במשולש ABC נקודות D ו- E נמצאות על צלעות AB ו- AC כך שמתקיים: $AD = 9$ ס"מ, $BD = 8$ ס"מ, $AE = 4$ ס"מ, $EC = 9$ ס"מ, $BC = 18.5$ ס"מ. חשב את אורכו של DE .



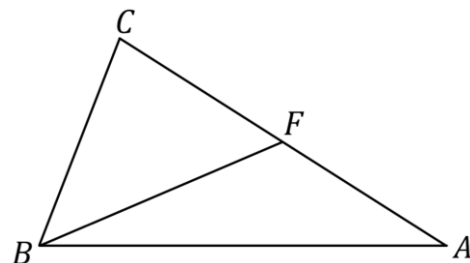
תשובה: 8.84 ס"מ

9. ABC הוא משולש שווה צלעות שאורך צלעו היא 10 ס"מ. $AF = 9$ ס"מ, $FC = 4$ ס"מ. חשב את אורכו של BF .



תשובה: 12.681 ס"מ

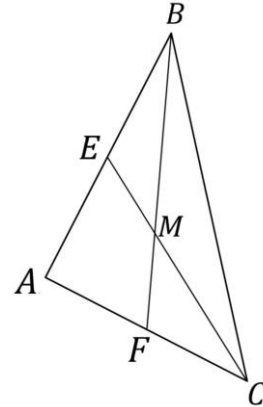
10. BF הוא תיכון לצלע AB במשולש ABC . $AB = 10$ ס"מ, $BC = 5.4$ ס"מ, $AC = 7$ ס"מ. חשב את זווית ABF .



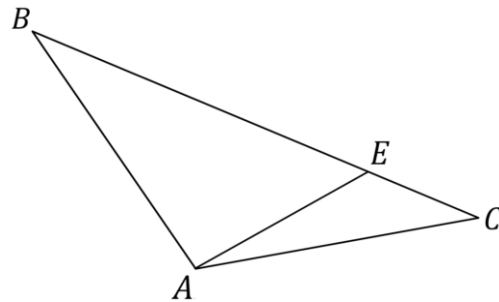
תשובה: $\angle ABF = 14.485^\circ$

11. $\angle BME = 30^\circ$. M הנקודה בנקודה ABC המשולש הנחתכים בנקודה M . $\angle BME = 30^\circ$.

נסמן: $CE = 3\sqrt{3}b$, $BF = 3a$. הראה שהיקף המשולש ABC הוא:
 $2\sqrt{3b^2 + 4a^2 - 6ab} + 2\sqrt{12b^2 + a^2 - 6ab} + 2\sqrt{3b^2 + a^2 + 3ab}$



12. במשולש ABC נקודה E נמצאת על BC כך ש- $\angle C = 26^\circ$, $\angle CAE = 14^\circ$, $AC = 8$ ס"מ, $EB = 10$ ס"מ. חשב את אורכו של AB .



13. במשולש ABC הצלע AC ארוכה ב-3 ס"מ מהצלע AB . אורך הצלע BC הוא 5 ס"מ וזווית B שווה 120° . מצא את היקף המשולש.

תשובה: 40 ס"מ.

14. במשולש ABC גודל הזווית A הוא 60° . נתון כי אורך הצלע BC הוא 7 ס"מ והצלע AC ארוכה ב-3 ס"מ מהצלע AB . מצא את שטח המשולש ABC .

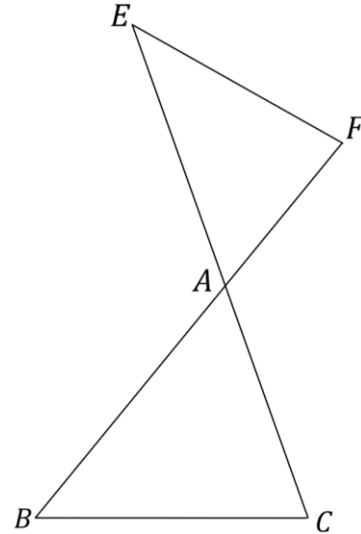
תשובה: סמ"ר $10\sqrt{3} \approx 17.32$

15. במשולש ABC נתון $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{5}$, $\angle A = 120^\circ$. מצא את זווית B .

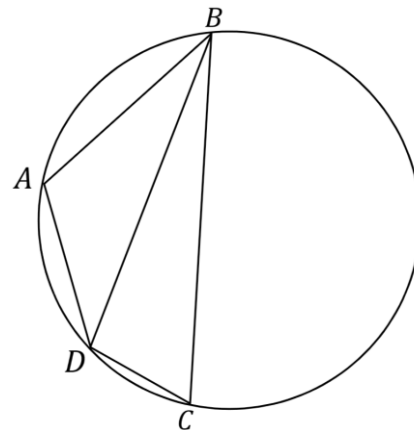
תשובה: $\angle B = 38.213^\circ$

16. במשולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$) אורך השוק הוא k וזוויות הבסיס הן α . BE הוא התיכון לשוק AC . הראה ש- $BE = \frac{1}{2}k\sqrt{5 + 4\cos 2\alpha}$.

17. הקטעים EC ו- BF נחתכים בנקודה A . $AC = AE = 7$ ס"מ, $AB = 8$ ס"מ, $AF = 5$ ס"מ. BC אורך פי 1.2 מ- EF . מצא את $\angle EAF$.



18. מרובע $ABCD$ חסום במעגל. $AB = 11$ ס"מ, $AD = 7$ ס"מ, $DC = 3$ ס"מ, $CB = 18$ ס"מ. מצא את אורכו של BD ואת זווית C .



תשובה: $BD = 16.304$ ס"מ, $\angle C = 51.528^\circ$.

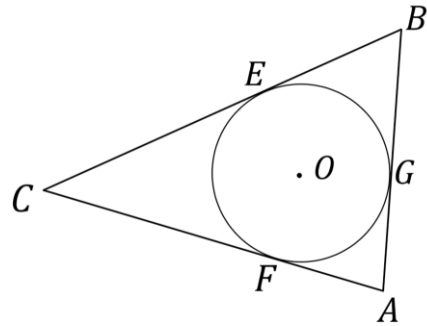
19. במשולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$) הנקודה D נמצאת על צלע BC כך ש- $BD = 10.2$ ס"מ, $DC = 3.4$ ס"מ ו- $AD = 11.9$ ס"מ. חשב את זווית ADC ואת שוק המשולש ABC ללא בניית עזר.

תשובה: $AB = AC = 13.277$ ס"מ, $\angle ADC = 106.608^\circ$.

20. במשולש ABC $AB = m$, $AC = k$, $BC = n$. נקודה E נמצאת על הצלע AC כך שמתקיים $\frac{AE}{EC} = \frac{3}{2}$. נקודה F נמצאת על הצלע AB כך שמתקיים $\frac{AF}{FB} = \frac{1}{3}$. הבע באמצעות m, k ו- n את אורך הקטע EF .

תשובה: $\frac{\sqrt{84k^2 + 60n^2 - 35m^2}}{20}$

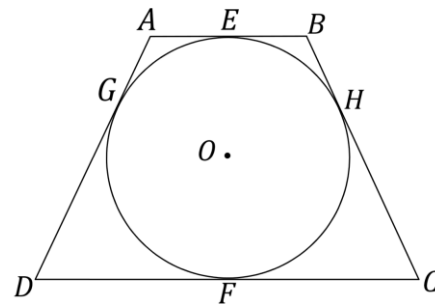
21. מעגל שמרכזו O חסום במשולש ABC . צלעות המשולש משיקות למעגל בנקודות F, E ו- G כמתואר בשרטוט. $BC = 10$ ס"מ, $AC = 8.8$ ס"מ, $BA = 6$ ס"מ.



- א. חשב את זוויות המשולש.
 ב. חשב את רדיוס המעגל החוסם במשולש ABC.
 ג. חשב את רדיוס המעגל החוסם את משולש ABC.

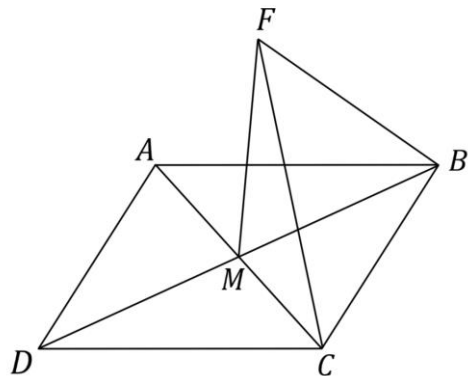
תשובה: א) $\angle A = 82.688^\circ$, $\angle B = 60.791^\circ$, $\angle C = 36.521^\circ$. ב) 2.112 ס"מ ג) 5.041 ס"מ.

22. בטרפז שווה שוקיים ABCD ($AB \parallel CD$) חסום מעגל שמרכזו בנקודה O. צלעות הטרפז משיקות למעגל בנקודות E, F, G, H. הבסיס DC ארוך פי 2.5 מהבסיס AB. נסמן $AB = 4k$. הבע באמצעות k את אלכסון הטרפז.



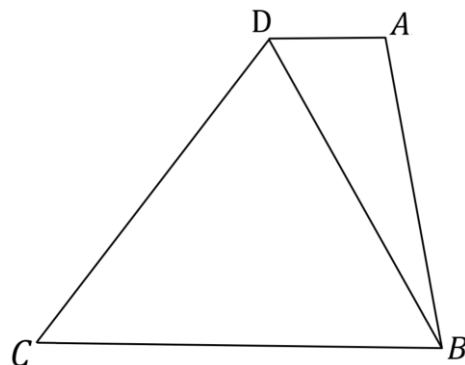
תשובה: $\sqrt{89}k$

23. מרובע ABCD הוא מקבילית אשר אלכסוניה נחתכים בנקודה M כך שזווית BMC היא חדה. על הקטע MB בנו משולש שווה צלעות MBF. נתון $AC = 8$ ס"מ, $BD = 15$ ס"מ. שטח המקבילית הוא 56 סמ"ר. חשב את זווית BFC.



תשובה: $\angle BFC = 42.747^\circ$.

24. מרובע $ABCD$ הוא טרפז ($AD \parallel CB$). $AD = 3$ ס"מ, $BC = 14$ ס"מ, $BD = 11$ ס"מ. מצא את אורכי השוקיים. $\frac{CD}{AB} = \frac{7}{5}$



תשובה: $CD = 14.483$ ס"מ, $AB = 10.345$ ס"מ.

זהויות של סכום והפרש זוויות בסינוס ובקוסינוס

$$\begin{aligned}\cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha\end{aligned}$$

תרגילים-הוכח את הזהויות הבאות:

$$\begin{aligned}1. \quad & \frac{2 \cos(\alpha - 45^\circ)}{\sin \alpha} = \sqrt{2}(\cot \alpha + 1) \\ 2. \quad & \frac{\cos(135^\circ + \alpha)}{\cos \alpha} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \tan \alpha) \\ 3. \quad & \frac{4 \sin(\beta + 30^\circ)}{\cos \beta} = 2(\sqrt{3} \tan \beta + 1) \\ 4. \quad & \frac{\sin(\alpha - \beta - \gamma)}{\sin \gamma \cos \gamma} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \gamma} - \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \gamma} \\ 5. \quad & \frac{\sin(\alpha - \beta - \gamma)}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\cos(\beta + \gamma)}{\cos \alpha} - \frac{\sin(\beta + \gamma)}{\sin \alpha} \\ 6. \quad & \cos 110^\circ \cos 20^\circ + \sin 110^\circ \sin 20^\circ : \text{ חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי:} \\ 7. \quad & \sin 20^\circ \cos 70^\circ + \sin 70^\circ \cos 20^\circ : \text{ חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי:} \\ 8. \quad & \cos 34^\circ \cos 56^\circ - \sin 56^\circ \sin 34^\circ : \text{ חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי:} \\ 9. \quad & \sin 200^\circ \cos 20^\circ - \sin 20^\circ \cos 200^\circ : \text{ חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי:}\end{aligned}$$

תשובות: 0.9 0.8 1.7 0.6

זהויות של זווית כפולה בסינוס ובקוסינוס

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \cos 2\alpha &= 2\cos^2 \alpha - 1 \\ \cos 2\alpha &= 1 - 2\sin^2 \alpha\end{aligned}$$

הוכח את הזהויות הבאות:

$$\begin{aligned}1. \quad & \frac{\sin 2\alpha}{2\cos^2 \alpha} = \tan \alpha \\ 2. \quad & \frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} = \cos \alpha - \sin \alpha \\ 3. \quad & \frac{\sin 2\alpha + \sin^2 \alpha}{2\cos \alpha + \sin \alpha} = \sin \alpha \\ 4. \quad & \cos 2\alpha - \sin^2 \alpha + 2 = 3\cos^2 \alpha \\ 5. \quad & \frac{2\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{2\cos 2\alpha} \\ 6. \quad & \frac{\cos(90^\circ + \alpha)\cos 6\alpha}{1 - 2\cos^2 3\alpha} = \sin \alpha \\ 7. \quad & 2\sin 5\alpha \cos 5\alpha \cos 10\alpha = \frac{1}{2}\sin 20\alpha \\ 8. \quad & (\cos \frac{1}{2}\alpha - \sin \frac{1}{2}\alpha)^2 = 1 - \sin \alpha \\ 9. \quad & \sin^4 2\alpha - \cos^4 2\alpha = -\cos 4\alpha \\ 10. \quad & \cot \alpha - \tan \alpha = 2\cot 2\alpha\end{aligned}$$