אנליזה וחקירה

יש סרטונים מלאים לכל התרגילים בקורס באתר:

Matematicourse.com

[לחץ כאן כדי להגיע ישירות לדף הקורס]

תוכן

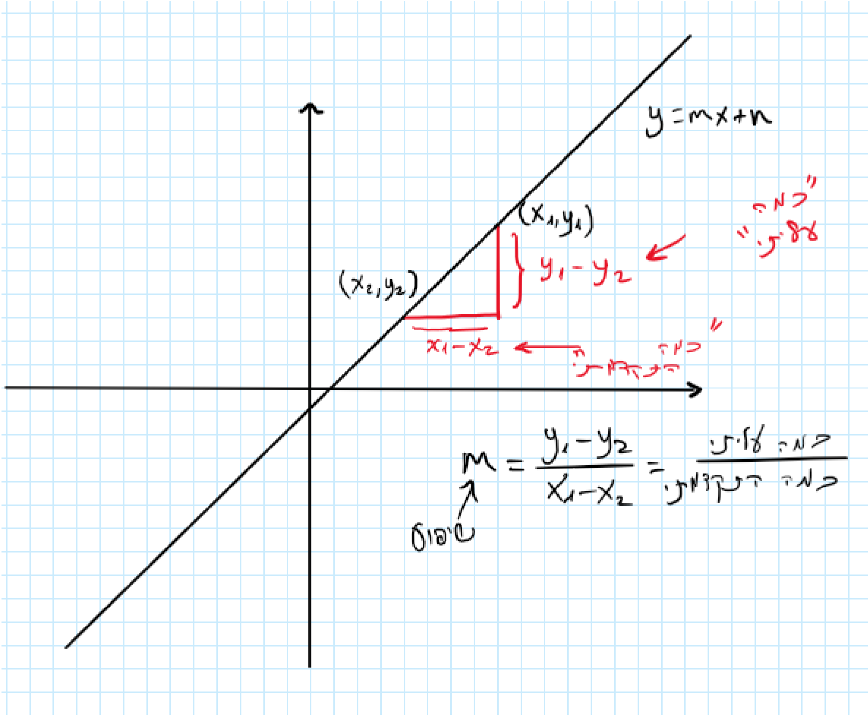
הקו הישר

פונקציית הקו הישר היא פונקציה קווית המקיימת את הנוסחה $y = mx + n$ כאשר m הוא השיפוע של הישר ו- n הוא שיעור ה-y של נקודת החיתוך עם ציר ה-y כלומר $(0, n)$.

$$\boxed{y = mx + n}$$

מהו שיפוע

תיאור מילולי של שיפוע הוא כמה יחידות הפונקציה עלתה\ירדה עבור כל התקדמות של יחידה אחת בציר ה-x.



נוסחת השיפוע היא:

$$\boxed{m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{\text{כמה ירדתי\textbackslash עליתי}}{\text{כמה התקדמתי}}}$$

<u>שאלות בנושא שיפוע</u>

<u>דוגמה 1:</u>

מצא את השיפוע של ישר שעובר בנקודות $(2,7)$ ו-$(4,-3)$

תשובה: השיפוע הוא -5.

<u>דוגמה 2</u>

מצא את השיפוע של הישר $-18x + 3y + 9 = 0$

תשובה: השיפוע הוא 6.

מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.

כדי למצוא את נקודות החיתוך של ישר עם ציר ה-x נשים לב לעובדה ששיעור ה-y של כל נקודה הנמצאת על ציר ה-x הוא 0, ועל כן נציב ב-y אפס ונבודד את x.

כדי למצוא את נקודות החיתוך של ישר עם ציר ה-y נשים לב לעובדה ששיעור ה-x של כל נקודה הנמצאת על ציר ה-y הוא 0, ועל כן נציב ב-x אפס ונבודד את y. או שפשוט נזכור שנקודת החיתוך עם ציר ה-y היא $(0,n)$.

<u>דוגמה 1:</u>

מצא את נקודות החיתוך של הישר $y=-2x-3$. עם הצירים.

תשובה: $(-1.5,0)$, $(0,-3)$.

<u>דוגמה 2:</u>

מצא את נקודת החיתוך של הישר $4x-2y=-3$ עם הצירים.

תשובה: $(-\frac{3}{4},0)$, $(0,1.5)$.

<u>דוגמה 3:</u>

מצא את נקודת החיתוך של הישרים $\mathrm{y}=-6$ ו- $x=3$ עם הצירים ואחד עם השני.

תשובה: $(0,-6)$, $(3,0)$, $(3,-6)$.

מציאת נקודת חיתוך בין ישרים נחתכים.

כדי למצוא נקודת חיתוך בין הישרים $y=m_1x+n_1$, $y=m_2x+n_2$.

נפתור מערכת של 2 משוואות עם שני נעלמים בצורה שהכי נוחה **לכם**.

$$\begin{cases} y=m_1x+n_1 \\ y=m_2x+n_2 \end{cases}$$

אפשר למשל על ידי השוואה: $m_1x+n_1=m_2x+n_2$
או חיסור משוואות והשוואת מקדמים.

<u>דוגמה 1:</u>

מצא את נקודת החיתוך של הישרים הבאים.

$$\begin{cases} y-x=1 \\ 2x-y+2=0 \end{cases}$$

תשובה: $(-1,0)$

<u>דוגמה 2:</u>

בדוק האם הישרים הבאים מקבילים או מתלכדים. אם לא מצא את נקודת החיתוך שלהם.

$$\begin{cases} 2y-3x=6 \\ 4y-6x=2 \end{cases}$$

תשובה: הישרים מקבילים. אין חיתוך.

דוגמה 3:

בדוק האם הישרים הבאים מקבילים או מתלכדים. אם לא מצא את נקודת החיתוך שלהם.

$$\begin{cases}2y-3x=1\\4y-6x=2\end{cases}$$

תשובה: הישרים מתלכדים. אין חיתוך.

דוגמה 4:

בדוק האם הישרים הבאים מקבילים או מתלכדים.
אם לא מצא את נקודת החיתוך שלהם.

$$\begin{cases}2y-3x=1\\ y-6x=2\end{cases}$$

תשובה: $(-\frac{1}{3},0)$.

נוסחה למשוואת ישר

$$\boxed{y-y_1=m(x-x_1)}$$

דוגמה 1

מצא את משוואת הישר העובר בנקודה $(3,5)$ ושיפועו -2

תשובה: $y=\ -2x+11$.

דוגמה 2

מצא את משוואת הישר העובר בנקודה $(12,1)$ ושיפועו $\frac{1}{6}$

תשובה: $y=\ \frac{1}{6}x-1$.

דוגמה 3

מצא את משוואת הישר העובר בנקודה $(2,7)$ ומקביל לישר $y=\ x-1$

תשובה: $y=x+5$.

דוגמה 4

מצא את משוואת הישר העובר בנקודות $(11,1)$ ו- $(13,5)$

תשובה: $y=\ 2x-21$.

דוגמה 5

נתונות הנקודות $A(-1,12)$, $B(5,-6)$, $C(0,1)$ ו- $D(-3,-2)$. מצא את נקודת החיתוך של הישר העובר דרך נקודות A ו-B עם הישר העובר דרך הנקודות C ו-D.

תשובה: $(2,3)$.

דוגמא 6

נתון ישר (I) $y = -2x + 7$ החותך את ציר ה-x בנקודה A.
נתון ישר (II) $y = x + 1$ החותך את ציר ה-x בנקודה B.
שני הישרים נחתכים בנקודה C. מצא את שטח המשולש ABC.

תשובה: 6.75 יח"ר.

הקשר בין שיפוע של ישר לזווית שהוא יוצר עם הכיוון החיובי עם ציר האיקס

$$\boxed{m = tan(\alpha)}$$

הערה הנוגעת למקרה שבו אנחנו יודעים את השיפוע (m) ומחפשים את הזווית α :
אם השיפוע שלילי אז אחרי שנקיש במחשבון shift tan נקבל זווית שלילית **ונוסיף לה $180°$.**

דוגמה 1: מצא את הזווית שיוצר הישר $y = \sqrt{3}x + 21$ עם הכיוון החיובי של ציר ה-X.

תשובה: $\alpha = 60°$.

דוגמה 2: מצא את הזווית שיוצר הישר $y = -2x + 21$ עם הכיוון החיובי של ציר ה-X.

תשובה: $\alpha = 116.565°$

דוגמה 3: מצא את שיפוע הישר היוצר זווית של $78.69°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.
(עגל את תשובתך)

תשובה: $m = 5$.

דוגמה 4: מצא את הישר העובר דרך הנקודה $B(5, -6)$ ויוצר זווית של $45°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.

תשובה: $y = x - 11$.

שיפועים של ישרים מאונכים

כאשר שני ישרים $\begin{cases} y = m_1x + n_1 \\ y = m_2x + n_2 \end{cases}$ מאונכים זה לזה אז מכפלת השיפועים שווה מינוס אחד:
$m_1 \cdot m_2 = -1$ או במילים אחרות השיפועים הופכיים ונגדיים: $m_1 = -\frac{1}{m_2}$.

דוגמה 1
מצא את שיפוע הישר שמאונך לישר $y = 2x - 1$.

תשובה: $m = -\frac{1}{2}$

דוגמה 2
מצא את שיפוע הישר שמאונך לישר $y = -\frac{2}{3}x + 4$.

תשובה: $m = \frac{3}{2}$

דוגמה 3
מצא את משוואת הישר שעובר בנקודה $B(5,1)$ ומאונך לישר $y = -x + 4$.

תשובה: $y = x - 4$

דוגמה 4
מצא את משוואת הישר שעובר בנקודה $B(1,-1)$ ומאונך לישר $y = x$.

תשובה : $y = -x$.

נגזרות ומשיקים - פולינום

כללי גזירה

	הפונקציה	הנגזרת
1	$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
2	$f(x) = ax$	$f'(x) = a$
3	$f(x) = a$	$f'(x) = 0$

תרגול נגזרות - פולינום

גזור את הפונקציות הבאות

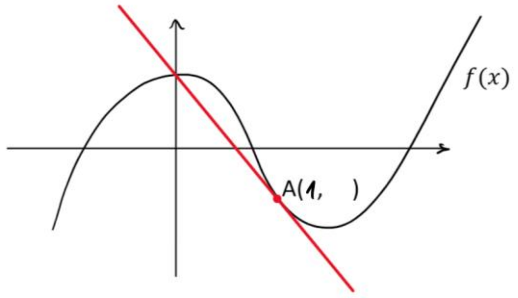
1. $f(x) = -x^2$
2. $f(x) = x^7 + 10$
3. $f(x) = x + 1$
4. $f(x) = 2 - x$
5. $f(x) = 3x^2 + x + 3$
6. $f(x) = -2x^5 - x$
7. $f(x) = x^3 - x^2 + 7x - 12$
8. $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^2 + x - \frac{12}{7}$
9. $f(x) = \frac{2x^2 - x^3 + 2x - 2}{3}$

פתרונות

1. $f'(x) = -2x$
2. $f'(x) = 7x^6$
3. $f'(x) = 1$
4. $f'(x) = -1$
5. $f'(x) = 6x + 1$
6. $f'(x) = -10x^4 - 1$
7. $f'(x) = 3x^2 - 2x + 7$
8. $f'(x) = 2x^3 - \frac{2}{3}x + 1$
9. $f'(x) = \frac{4x - 3x^2 + 2}{3}$

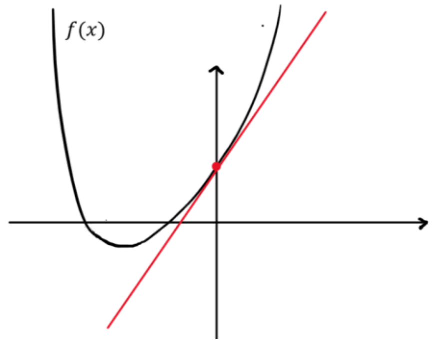
שאלות בנושא המשיק לפונקציית פולינום.

1. א. מצא את שיפועו של הישר המשיק לפונקציה $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 1$ בנקודה A (כמתואר בשרטוט) אם ידוע ששיעור ה-x של נקודת ההשקה הוא 1.
ב. מצא את משוואת המשיק.



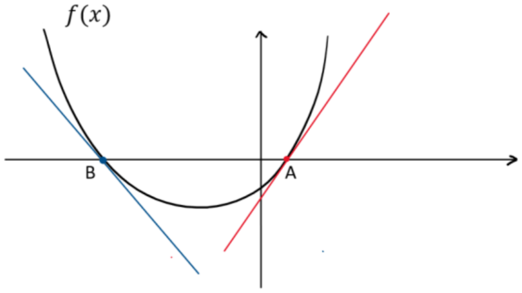
תשובה: א. -2 ב. $y = -2x + 1$.

2. א. מצא את שיפועו של הישר המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{3}{4}x^4 + 2x + 1$ בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-y.
ב. מצא את משוואת המשיק.



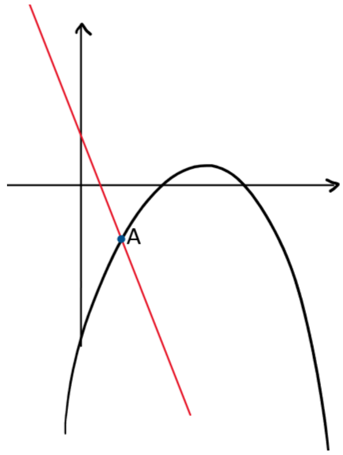
תשובה: א. 2 ב. $y = 2x + 1$.

3. הפונקציה $f(x) = x^2 + 2x - 3$ חותכת את ציר ה-x בנקודות A ו-B מצא את משוואות המשיקים לפונקציה בנקודות A ו-B.



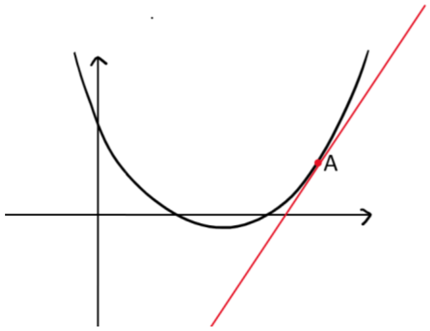
תשובה: $y = 4x - 4$, $y = -4x - 12$.

4. הישר $y=-3x+1$ והפרבולה $f(x)=-x^2+5x-6$ נחתכים בנקודות A ו-B (שיעור ה-x של הנקודה B גדול יותר). מצא את המשיק לפרבולה בנקודה A.



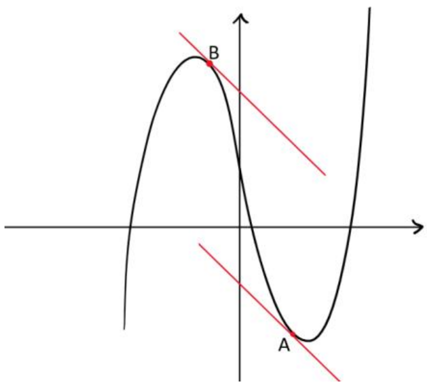
__תשובה__: $y=3x-5$.

5. הנקודה A נמצאת על הפונקציה: $f(x)=x^2-5x+6$. שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה A הוא 3. מצא את שיעורי הנקודה A.



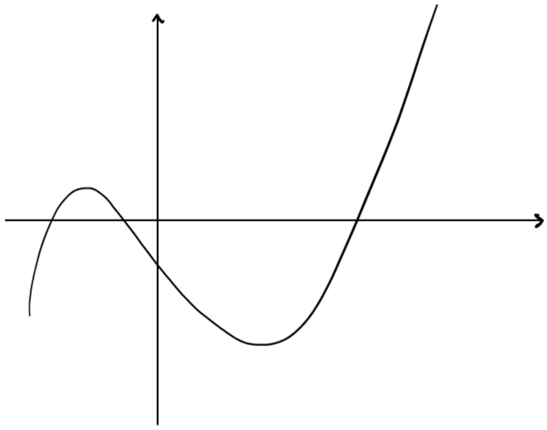
__תשובה__: $(4,2)$.

6. הנקודות A ו-B נמצאות על הפונקציה $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-14x+\sqrt{3}$. שיפועי המשיקים בנקודות אלו הם -2. מצא את שיעורי ה-x של נקודות אלו.



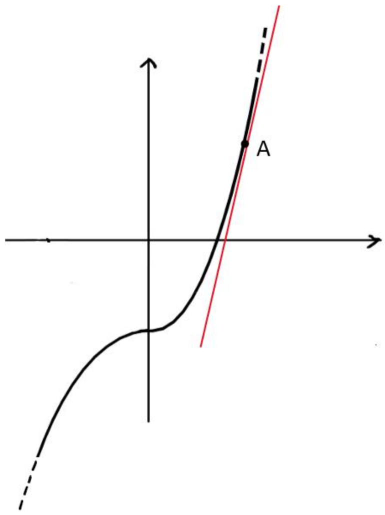
__תשובה__: $x_A=4\,, x_B=-3$

7. הנקודה A נמצאת על הפונקציה $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x - 20$.
שיעור ה-x של נקודה A הוא -2 .
א. מצא את השיפוע של המשיק לפונקציה בנקודה A.
ב. מצא את משוואת המשיק.
ג. מצא נקודה נוספת על הפונקציה שבה שיפוע המשיק זהה לשיפוע של המשיק לפונקציה בנקודה A.



<u>תשובה</u>: א. $m = 0$. ב. $y = 8$. ג.$(4, -100)$.

8. ישר משיק לפונקציה $y = 4x^3 - 28$ בנקודה A. מצא את משוואת המשיק אם ידוע שערך ה- y של הנקודה A הוא 4.

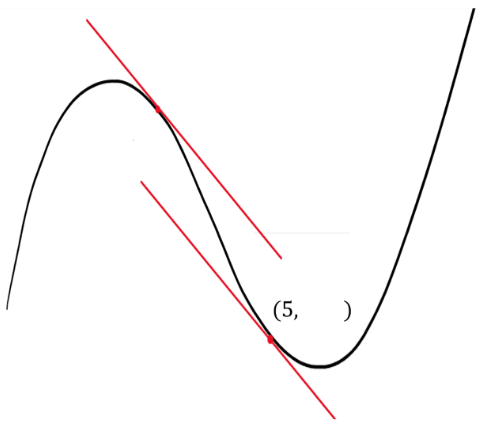


<u>תשובה</u>: $y = 48x - 92$.

9. נתונה הפונקציה $y = -x^2 + 8x - 9$
א. חשב את שיעור ה-x שעבורו ערך הנגזרת של הפונקציה הוא 6
ב. חשב את שיעורי ה-x שעבורם ערך הפונקציה הוא -2.
ג. שרטט את הפרבולה ואת המשיק לפונקציה ששיפועו 6 ומצא את משוואת המשיק.

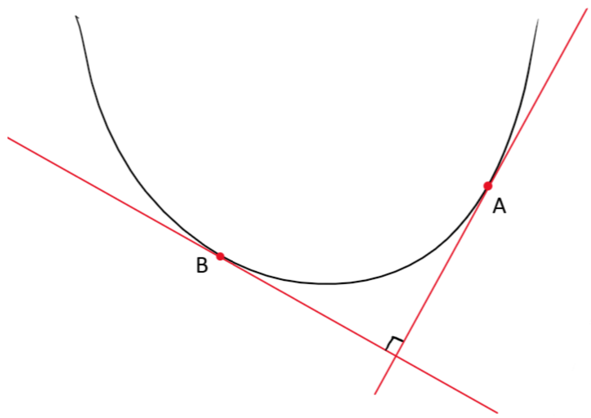
<u>תשובה</u>: א. $x = 1$. ב. $x = 7$, $x = 1$. ג. 8 $y = 6x - 8$.

10. נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 9x^2 + 11x + 6$.
א. מצא את משוואת המשיק לפונקציה בנקודה בה $x = 5$.
ב. מצא משיק נוסף לפונקציה המקביל למשיק מסעיף א'.



תשובה: א. $y = -4x - 19$. ב. $y = -4x + 13$.

11. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - x - \frac{4}{3}$. ישר משיק לגרף הפונקציה בנקודה A שבה $x = 6$.
א. מצא את שיפוע הישר המשיק לפונקציה בנקודה A.
ב. המשיק לפונקציה בנקודה B מאונך למשיק בנקודה A. מצא את שיעורי הנקודה B.



תשובה: א. $m = 3$. ב. $(1, -2)$.

12. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 - 6x + 3$ והישר $y = 8x - 9$.

א. מצא נקודה על גרף הפונקציה שבה השיפוע של המשיק שווה לשיפוע של הישר הנתון.
ב. האם הישר הנתון משיק לפונקציה בנקודה שמצאת בסעיף א?

תשובה: א.$(7,10)$ ב. לא.

13. הישר $y = -3x - 11$ משיק לפונקציה $f(x) = x^4 - 8x^2 - 3x + 5$ בשתי נקודות.
א. מצא את שתי הנקודות.
ב. מצא משוואת משיק נוסף לגרף הפונקציה המקביל לישר הנתון.

תשובה: א.$(2,-17)$, $(-2,-5)$ ב. $y=-3x+5$.

14. מצא נקודה על גרף הפונקציה $f(x)=-x^4+18x^2+4x+1$ שהמשיק בה מתלכד עם המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x=3$.

תשובה: $(-3,70)$.

15. נתונה הפונקציה $f(x)=x^3-5x^2+8x-4$. הוכח כי ציר ה-x משיק לפונקציה.

16. נתונה הפונקציה $f(x)=2x^3-15x^2+36x-31$.
הוכח כי הישר $y=-4$ משיק לפונקציה.

17. נתונה הפונקציה $f(x)=x^3-6x^2$.
א. הוכח כי ציר ה-x משיק לפונקציה.
ב. הפונקציה חותכת את ציר ה-x בנקודה נוספת פרט לראשית הצירים. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה הנוספת.

תשובה: ב. $y=36x-216$.

18. נתונה הפונקציה $f(x)=x^3-2x^2-4$.
א. מצא את משוואת המשיק לפונקציה בנקודה בה $x=-1$.
ב. הראה שהישר שמצאת בסעיף א' משיק לפונקציה $y=x^2+x+9$ בנקודה $x=3$.

תשובה: א. $y=7x$.

19. הגרפים של הפונקציות $f(x)=2x^3-2x^2+x-1$, $g(x)=2x^2-x-1$ משיקים זה לזה.
מצא את נקודת ההשקה ואת משוואת המשיק המשותף.

תשובה: $y=3x-3$, $(1,0)$.

20. הגרפים של הפונקציות $f(x)=x^3-6$, $g(x)=-3x^2+24x-34$ משיקים זה לזה. מצא את נקודת ההשקה ואת משוואת המשיק המשותף.

תשובה: $y=12x-22$, $(2,2)$.

21. נתונה הפונקציה $y=x^2-3x$.
א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x.
ב. שרטט את הפונקציה ומצא את משוואת המשיק לפונקציה בנקודת החיתוך הימנית שלה עם ציר ה-x.
ג. חשב את השטח המשולש שיוצר המשיק עם הצירים.

תשובה: א. $(3,0),(0,0)$ ב. $y = 3x - 9$ ג. 13.5 יח"ר.

22. נתונה הפונקציה $y = -x^2 + 4x + 12$.
א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x.
ב. בנקודה A שבה $x = 4$ מעבירים משיק לפונקציה החותך את ציר ה-y בנקודה B. בנוסף מורידים מנקודה A אנך לציר ה-x החותך אותו בנקודה C. נסמן את ראשית הצירים ב-O. מצא את משוואת המשיק ושרטט במערכת צירים את נקודות A, B, C ו-O.
ג. חשב את השטח הטרפז $OBAC$.

תשובה: א. $(-2,0),(6,0)$ ב. $y = -4x + 28$ ג. 80 יח"ר.

משיק עם פרמטרים -פולינום

1. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = mx^3$

ב. $f(x) = ax$

ג. $f(x) = b$

ד. $f(x) = x^4 + b^4$

ה. $f(x) = bx^2 + b^4x$

ו. $f(x) = \frac{2x^2}{4m}$

תשובה:

א. $f'(x) = 3mx^2$

ב. $f'(x) = a$

ג. $f'(x) = 0$

ד. $f'(x) = 4x^3$

ה. $f'(x) = 2bx + b^4$

ו. $f'(x) = \frac{x}{m}$

2. נתונה הפונקציה $y = -ax^3 + 2x^2 + 4$. שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה בה $x = 2$ הוא -4. מצא את ערך הפרמטר a ואת משוואת המשיק.

תשובה: $a = 1$, $y = -4x + 12$.

3. נתונה הפונקציה $f(x) = mx^2 + 4x - m^2$ מצא את הפונקציה אם ידוע ש- $f'(2) = 16$.

תשובה: $f(x) = 3x^2 + 4x - 9$

4. נתונה הפונקציה $f(x) = mx^2 + 4x - m^2$ מצא את שיפוע המשיק לפונקציה כאשר $x = 2$ אם ידוע ש- $f(-2) = -4$.

תשובה: 12.

5. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^4}{4} + 3ax^2 - m^2$. מצא את a ואת שני הערכים האפשריים של m אם ידוע ש: $f'(2) = f'(-1)$ ו- $f(-1) = -5.25$

תשובה: $a = -0.5$, $m = 2$ או $m = -2$.

6. נתונה הפונקציה $f(x) = bx^3 - 2b^2x^2 - 3x$ $(b > 0)$. מצא את b אם ידוע שהמשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 2$ מקביל לישר $y = -11x + 9$.

תשובה: $b = 2$.

7. נתונה הפונקציה $f(x) = -ax^2 - 12x + 1.5$ $(a \neq 0)$. המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$ מקביל לישר $y = -5$. מצא את ערכו של הפרמטר a.

תשובה: $a = -6$.

8. נתונה הפונקציה $f(x) = -2ax^2 + 4ax + x^3$. המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = -2$ מקביל לציר ה-x. מצא את ערכו של הפרמטר a.

תשובה: $a = -1$.

9. נתונה הפונקציה $f(x) = -2x^3 + 4x^2 + \frac{kx}{4\sqrt{3}}$. המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 0$ יוצר זווית של $150°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה-x. מצא את ערכו של הפרמטר k.

תשובה: $k = -4$.

10. נתונה הפונקציה $f(x) = bx^3 + 2x^2 + 16x - 1$. המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 3$ יוצר זווית של $45°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה-x. מצא את ערכו של הפרמטר b.

תשובה: $b = -1$.

11. הפונקציה $f(x) = 4x^2 + \frac{x}{m}$ עוברת בנקודה $A(-2,8)$ מצא את ערכו של הפרמטר m ואת משוואת המשיק בנקודה A.

תשובה: $m = \frac{1}{4}$, $y = -12x - 16$.

12. נתונה הפונקציה $y = -bx^2 - ax - 7$. ערך הפונקציה בנקודה שבה $x = 4$ הוא 1. שיפוע המשיק לפונקציה באותה נקודה הוא -2. מצא את הפרמטרים a ו-b.

תשובה: $b = 1$, $a = -6$.

13. נתונה הפרבולה $y=-x^2+2x+b$ והישר $y=4x+5$.
א. עבור איזה ערך של x יש לפרבולה ולישר אותו שיפוע?
ב. נתון גם שהישר משיק לפרבולה. מצא את ערכו של b.
<u>**תשובה**</u>: א. $x=-1$ ב. $b=4$.

14. הישר $y=3x+a$ משיק לגרף הפונקציה $y=4x^2-x$.
א. מצא את נקודה ההשקה.
ב. מצא את ערכו של a.

<u>**תשובה**</u>: א. $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ ב. $a=-1$.

15. הישר $y=-x+3$ משיק לגרף הפונקציה $y=-x^2+x+a$.
מצא את ערכו של a.

<u>**תשובה**</u>: $a=2$.

16. הישר $y=x+1$ משיק לגרף הפונקציה $y=-\frac{ax^2}{3}+5x-b$ בנקודה $x=2$.
מצא את ערכם של a ושל b.

<u>**תשובה**</u>: $a=3$, $b=3$.

17. הישר $y=-4x-11$ משיק לפונקציה $y=-ax^2+3bx-3$ בנקודה בה $y=-3$. מצא את a ואת b.

<u>**תשובה**</u>: $a=-2$, $b=\frac{4}{3}$.

18. הפונקציה $f(x)=nx^4+2mx^2-1$ משיקה לציר ה-x בנקודה שבה $x=-1$.
מצא את m ו-n.

<u>**תשובה**</u>: $m=1$, $n=-1$.

19. שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=x^n+3x^{n-1}-4x+1$ כאשר $x=-1$ הוא -11. מצא את הפרמטר n אם ידוע שהוא מספר אי זוגי גדול מ-3.

<u>**תשובה**</u>: $n=5$.

20. הפונקציות $f(x)=2x^3-\frac{1}{2}bx^2+4x+6$ ו- $g(x)=3x^2+bx+6$ בעלות אותו שיפוע עבור $x=1$.
א. מצא את b וחשב את השיפוע הנ"ל.
ב. האם הפונקציות משיקות זו לזו בנקודה $x=1$.

<u>**תשובה**</u>: א. $b=2$. ב. כן.

21. הפונקציות $f(x)=-x^2+4x-8$ ו- $g(x)=x^2-8x+b$ משיקות זו לזו. מצא את b.

תשובה: $b=10$.

הבעת משיק עם פרמטרים -פולינום

22. נתונה הפונקציה $y=x^2+x$ הבע באמצעות t את משוואת המשיק לפונקציה בנקודה בה $x=t$.

תשובה: $y=(2t+1)x-t^2$.

23. נתונה הפרבולה $y=ax^2+4$.
א. הבע באמצעות a את משוואת המשיק לפונקציה בנקודה בה $x=3$.
ב. המשיק חותך את ציר הy בנקודה שבה $y=-5$. מצא את a.

תשובה: א. $y=6ax-9a+4$. ב. $a=1$.

24. לפונקציה $y=x^3+4$ מעבירים משיק בנקודה שבה $x=t$.
א. הבע באמצעות t את משוואת המשיק.
ב. מצא את t אם ידוע שהמשיק חותך את ציר ה-y בנקודה בה $y=20$.

תשובה: א. $y=3t^2x-2t^3+4$. ב. $t=-2$.

25. נתונה הפרבולה $y=-2bx^2-1$.
א. הבע באמצעות b את משוואת המשיק לפונקציה בנקודה בה $x=1$.
ב. המשיק חותך את ציר ה– x בנקודה שבה $x=\frac{1}{4}$. מצא את b.

תשובה: א. $y=-4bx+2b-1$. ב. $b=1$.

26. הישר $y=x-4$ משיק לפונקציה $f(x)=x^3-6x^2+10x+a$ מצא את a ואת נקודת ההשקה (הבחן בין שני מקרים).

תשובה: אפשרות 1 $(1,-3)$ ו- $a=-8$.
אפשרות 2 $(3,-1)$ ו- $a=-4$.

27. לגרף הפונקציה $y=x^3-4x$ העבירו משיק בנקודה בה $x=-a$. לגרף הפונקציה $y=x^2+20x+4$ העבירו משיק בנקודה בה $x=3a$. ידוע ששני המשיקים הנ"ל מקבילים. מצא את שני הערכים האפשריים של a.

תשובה: $a=-2$, $a=4$.

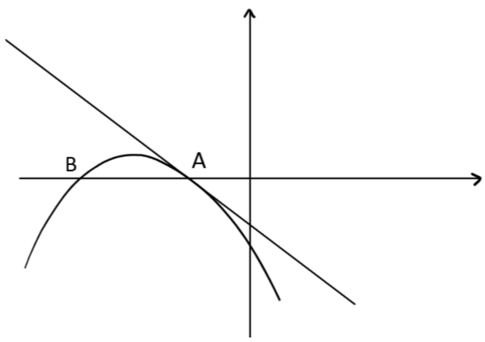
28. לפונקציה $y=-tx^2+(k-1)x+n$ $(t\neq 0)$ מעבירים משיק בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-y. הבע את משוואת המשיק באמצעות n ו-k.

תשובה: $y = (k-1)x + n$.

29. נתונה הפרבולה $g(x) = 2ax^2 + bx + 6$. נתון שערך הפונקציה שווה לערך הנגזרת בנקודה בה $x = -1$
א. הבע את הפרבולה באמצעות a בלבד.
ב. מצא את $g(-1\frac{1}{2})$ (ע רך מספרי – לא להביע באמצעות a או b).

תשובה: א. $g(x) = 2ax^2 + (3a+3)x + 6$ ב. $g(-1\frac{1}{2}) = 1\frac{1}{2}$.

30. נתונה הפרבולה $y = -x^2 - 5x + b$.
הפרבולה חותכת את ציר ה-x בנקודות A ו-B כך ש-A קרובה יותר לראשית.
הישר $y = -x - 2$ משיק לפונקציה בנקודה A.



א. מצא את ערכו של הפרמטר b.
ב. מצא את משוואת המשיק לפרבולה בנקודה B.

תשובה: א. $b = -6$ ב. $y = x + 3$.

31. הישר $y = -35$ משיק לפונקציה $f(x) = 2x^3 - 2ax^2 - 3bx + 1$ בנקודה שבה $x = 3$. מצא את a ואת b.

תשובה: $a = 4$, $b = 2$.

32. לפונקציה $y = -x^2 - 2ax - 5$ מעבירים משיק ששיפועו -2 בנקודה בה $y = 3$. מצא את נקודת ההשקה ואת משוואת המשיק (מצא את שתי האפשרויות).

תשובה: $(4,3)$ ו- $y = -2x + 11$ **או** $(-2,3)$ ו- $y = -2x - 1$.

33. הישר $y = ax - 14$ משיק לפונקציה $y = x^2 - 2x - 5$. מצא את ערכו של הפרמטר a אם ידוע שהוא **שלילי**.

תשובה: $a = -8$.

34. לפונקציות $f(x) = x^3 + bx^2 - 2x$ ו- $g(x) = -0.25x^2 + 3ax - 9$ יש משיק משותף בנקודה שבה $x = 2$ מצא את a ואת b.

תשובה: $b = -2$, $a = 1$.

35. הפרבולה $f(x) = x^2 - 2bx$ חותכת את ציר ה-x בשתי נקודות C ו-D.
א. מצא את הנקודות C ו-D (הבע באמצעות במידת b הצורך) ושרטט את הפרבולה אם ידוע שהנקודה C היא בעלת שיעור x **שלילי**.
ב. הבע באמצעות b את משוואת המשיק לפרבולה בנקודה C.
ג. מצא את b אם ידוע שהמשיק שמצאת בסעיף ב' יוצר עם הצירים משולש ששטחו 4 יח"ר.

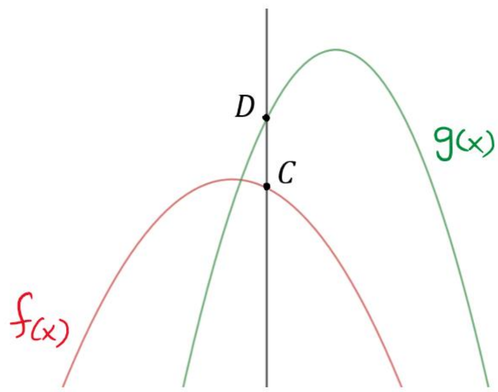
36. נתונה הפרבולה $f(x) = -1\frac{1}{4}x^2 - 2ax - 6$. המשיק לפרבולה בנקודה בה $x = 0$ מאונך לישר המשיק לפרבולה בנקודה בה $x = 1$. מצא את a $(a < -0.5)$.

תשובה: $a = -1$.

37. נתונה הפונקציה $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 22x - 54$. ישר המשיק לפונקציה בנקודה C מקביל לישר נוסף המשיק לפונקציה בנקודה D. מצא את שיעורי הנקודה D אם ידוע ששיעור ה-x שלה גדול ב-6 משיעור ה-x של הנקודה C.

תשובה: $D(4,18)$.

38. ישר המאונך לציר ה-x חותך את הפונקציות $f(x) = -0.5x^2 - 6x + 0.125$ ו- $g(x) = -x^2 - 9x - 0.25$ בנקודות C ו-D בהתאמה (כמתואר בשרטוט). מעבירים שני משיקים : האחד משיק לפונקציה f בנקודה C והשני משיק לפונקציה g בנקודה D. מצא את אורך הקטע CD אם ידוע ששני המשיקים מאונכים זה לזה.
(שיעור ה-x של הנקודות C ו-D קטן מ- -5).



תשובה: 1 (יחידת אורך 1).

39. נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 7.5x^2 + 18x - 3$. עבור אילו ערכי x יוצר הישר המשיק לפונקציה זווית קהה עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.

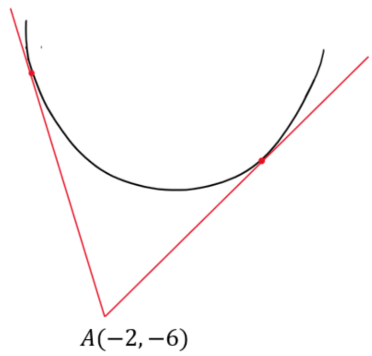
תשובה: $2 < x < 3$.

מציאת משיק לפונקציה אם נתונה נקודה על המשיק שאינה נקודת ההשקה.

שלבי עבודה:

- מסמנים את שיעור ה-x של אחת מנקודת ההשקה ב-t.
- מביעים את שיעור ה-y של הנקודה באמצעות t (על ידי הצבת t במקום x בפונקציה).
- מביעים את השיפוע של המשיק ב-2 דרכים:
  - על ידי הצבת t בנגזרת הפונקציה.
  - באמצעות הנוסחה $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ שבה נציב את נקודת ההשקה שהבענו עם t ואת והנקודה שהמשיק עובר דרכה (ואינה על הפונקציה)
- משווים את שני השיפועים שקיבלנו מסעיף קודם ומוצאים את t
- לרוב מתקבלים שני ערכי t שונים וכך יתקבלו 2 נקודות השקה- עבור כל t שמצאנו יש למצוא את נקודת ההשקה ואם צריך אז גם את המשיק

1. מצא את משוואת המשיקים לפונקציה $f(x) = x^2 + 3x$ אם ידוע שהם עוברים בנקודה $A(-2,-6)$ (הנקודה A **אינה** על הפונקציה) .



<u>תשובה</u>: $y = 3x$, $y = -5x - 16$.

2. מצא את משוואת המשיקים לפונקציה $f(x) = 2x^2$ אם ידוע שהם עוברים בנקודה $A(1,-6)$ (הנקודה A **אינה** על הפונקציה) .

<u>תשובה</u>: $y = 12x - 18$, $y = -4x - 2$.

3. מצא את משוואת המשיקים לפונקציה $f(x) = x^2 - 6x - 4$ אם ידוע שהם עוברים בנקודה $A(2.5,-13)$ (הנקודה A **אינה** על הפונקציה) .

<u>תשובה</u>: $y = -2x - 8$, $y = -13$.

4. מצא את משוואת המשיקים לפונקציה $f(x) = -x^2$ אם ידוע שהם עוברים בנקודה $A(-1,0)$ (הנקודה A **אינה** על הפונקציה) .

<u>תשובה</u>: $y = 4x + 4$, $y = 0$.

5. מצא את משוואת המשיקים לפונקציה $f(x)=x^2+1$ אם ידוע שהם עוברים בנקודה $A(-1,1)$ (הנקודה A **אינה** על הפונקציה) .

__תשובה__: $y=1$, $y=-4x-3$.

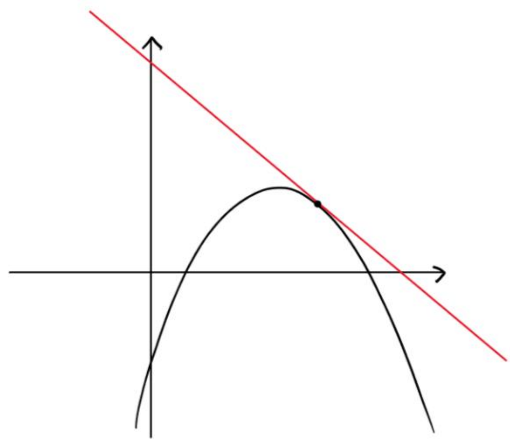
6. מצא את משוואת המשיקים לפונקציה $f(x)=x^2+3x-1$ אם ידוע שהם עוברים בנקודה $A(0,-2)$ (הנקודה A **אינה** על הפונקציה) .

__תשובה__: $y=5x-2$, $y=x-2$.

7. מצא את משוואת המשיקים לפונקציה $f(x)=5x-x^2$ אם ידוע שהם עוברים בנקודה $A(3,7)$ (הנקודה A **אינה** על הפונקציה) .

__תשובה__: $y=-3x+16$, $y=x+4$.

8. מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=-x^2+4x-2$ אם ידוע שהוא חותך את ציר ה- y בנקודה $(0,7)$. (נקודת ההשקה נמצאת ברביע הראשון).



__תשובה__: $y=-2x+7$.

9. הבע באמצעות b $(b\neq 0)$ את משוואת המשיקים לפונקציה $f(x)=bx^2-b$ אם ידוע שהם עוברים בנקודה $A(1.25,0)$ (הנקודה A **אינה** על הפונקציה) .

__תשובה__: $y=bx-1.25b$, $y=4bx-5b$.

10. הבע באמצעות b $(b<0)$ את משוואת המשיקים לפונקציה $f(x)=-2bx^2$ אם ידוע שהם עוברים בנקודה $A(0,-1)$ (הנקודה A **אינה** על הפונקציה) .

__תשובה__: __משיק 1__: $y=-4b\sqrt{\frac{1}{-2b}}x-1$

__משיק 2__: $y=4b\sqrt{\frac{1}{-2b}}x-1$

תרגילי סיכום

1. הישר $y = 15x + n$ משיק לפונקציה $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x$ בנקודה שבה $y = -10$.
מצא את ערכו של הפרמטר n.

__תשובה__: $n = 5$.

2. נתונה הפרבולה $f(x) = -16x^2 - 4bx - 1$ מצא את b אם ידוע שלפרבולה ולציר ה-x יש נקודה משותפת אחת בלבד ($b < 0$).

__תשובה__: $b = -2$.

3. נתונה הפרבולה $f(x) = -x^2 + tx + 3$. העבירו משיק לפונקציה בנקודה שבה $x = 4$.
הראה שנקודת החיתוך עם ציר ה-y של המשיק אינה תלויה בערך של t ומצא אותה.

__תשובה__: $(0,19)$

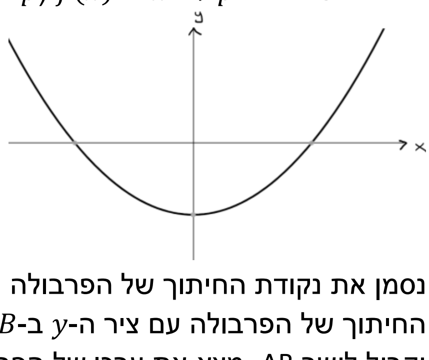
4. נתונה הפרבולה $f(x) = px^2 + 5tx + 3k$. העבירו שני משיקים לפונקציה בנקודות החיתוך שלה עם ציר ה-x ומשוואותיהן של המשיקים הן: $y = 7x - 3.5$
ו- $y = -7x - 21$. מצא את הפרמטרים p, t ו-k .

__תשובה__: $t = 1$, $p = 2$, $k = -1$.

5. נתונה הפרבולה $f(x) = x^2 + px - 6p^2$ (p הוא פרמטר **שלילי**).
א. הבע באמצעות p את נקודת החיתוך של הפרבולה עם הקרן החיובית של ציר ה-x.
ב. נסמן את הנקודה מסעיף א ב-A ואת נקודת החיתוך של הפרבולה עם ציר ה-y ב-B.
אם נעביר משיק לפרבולה בנקודה שבה $x = 1.5$ הוא יקביל לישר AB. מצא את ערכו של הפרמטר p .

__תשובה__: **א.** $(-3p, 0)$ **ב.** $p = -1$

6. נתונה הפרבולה $f(x) = x^2 + p$ (p הוא פרמטר **שלילי**).



נסמן את נקודת החיתוך של הפרבולה עם ציר הקרן החיובית של ציר ה-x ב-A ואת נקודת החיתוך של הפרבולה עם ציר ה-y ב-B.אם נעביר משיק לפרבולה בנקודה שבה $x = 1$ הוא יקביל לישר AB. מצא את ערכו של הפרמטר p .

__תשובה__: $p = -4$.

7. הפונקציות $f(x) = -x^2 + 18x - 13$ ו-$g(x) = px^3 - 2x$ משיקות זו לזו. מצא את נקודת ההשקה. ואת ערכו של הפרמטר p. (יש 2 אפשרויות. אחת האפשרויות היא מספר לא שלם).

<u>תשובה</u>: <u>אפשרות 1</u>: $(1,4), p = 6$
<u>אפשרות 2</u>: $(39, -832)\,, p = -\frac{58}{4563}$.

8. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 + 2x$ בנקודה A הנמצאת על הפונקציה עובר ישר: l_1 המשיק לפונקציה. נתון ישר נוסף: l_2 העובר גם הוא בנקודה A ומאונך למשיק הנ"ל. מצא את משוואת הישר l_2 אם ידוע שהוא עובר בנקודה $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$.

<u>תשובה</u>: $y = -0.5x$

9. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{k-1}{n}x^n$ k ו-n הם פרמטרים. n מספר טבעי ו- $k \neq 1$. המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x = 3$ חותך את הקרן החיובית של ציר ה-x במרחק של $2\frac{2}{3}$ יחידות מהראשית. מצא את ערכו של הפרמטר n.

<u>תשובה</u>: $n = 9$

10. נתונות הפונקציות $f(x) = -x - 3x^3$ ו-$g(x) = 2x - x^2 + x^3$. הסבר מדוע כל המשיקים לגרף הפונקציה $f(x)$ יוצרים זווית קהה עם הכיוון החיובי של ציר ה-x ומדוע כל המשיקים לפונקציה $g(x)$ יוצרים זווית חדה עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.

11. נתונה הפונקציה $f(x) = -x^2 - 9$. מצא את ערכי ה-x של נקודת ההשקה עבורם המשיק לפונקציה חותך את הקרן השלילית של ציר ה- y.

<u>תשובה</u>: $-3 < x < 3$

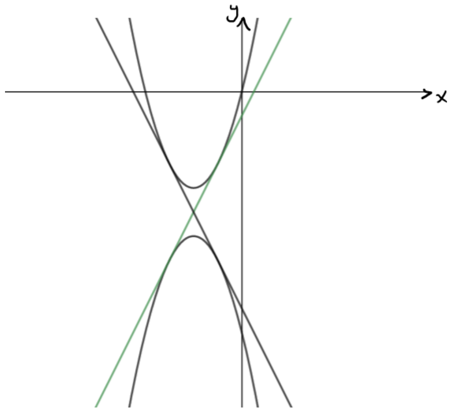
12. נתונה הפרבולה $f(x) = px^2 + x$ ונתון ישר $y = px + 1$. הישר חותך את הפרבולה ב-2 נקודות A ו-B. שיעור ה-x של הנקודה A אינו 1. הראה ששיפוע המשיק לפרבולה בנקודה A אינו תלוי ב-p ומצא אותו. $(p \neq -1)$

<u>תשובה</u>: שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה A הוא -1 (לא תלוי ב-p)

13. נתונה הפרבולה $f(x) = -px^2$ ונתון ישר $y = m^2x$ $(m \neq 0)$. הישר חותך את הפרבולה ב-2 נקודות A ו-B. שיעור ה-x של הנקודה A אינו 0. הוכח ששיפוע המשיק לפרבולה בנקודה A כפול משיפועו של הישר.

14. הישר $y = bx$ $(b \neq 0)$ חותך את הפרבולה $f(x) = -px^2$ בנקודות A ו-B ואת הפרבולה $g(x) = -tx^2$ בנקודות A ו-C הראה שהמשיקים לפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ בנקודות B ו-C לעולם לא יפגשו. הפרמטרים t ו-p שונים בערכם. ידוע שהמשיקים הנ"ל אינם מתלכדים.

15. נתונות הפונקציות $f(x) = x^2 + 4x$ ו-$g(x) = -x^2 - 4x - 10$ כמתואר בשרטוט.



העבירו שני משיקים אשר שניהם משיקים לשתי הפונקציות כמתואר בשרטוט. מצא את משוואות 2 המשיקים הנ"ל.

תשובה: $y = 2x - 1$, $y = -2x - 9$

16. מהנקודה $(0, \frac{p^2}{9})$ מעבירים ישר המשיק לפרבולה $f(x) = \frac{-9x^2}{p^2}$ $(p \neq 0)$. נקודת ההשקה נמצאת ברביע הרביעי. הראה ששיפוע המשיק אינו תלוי ב-p ומצא אותו.

תשובה: שיפוע המשיק הוא -2 .

17. נתונה הפרבולה $f(x) = px^2 + 2x$ הראה שהמשיק לפרבולה בנקודה שבה $x = -2$ עובר בנקודה $(-1, -2)$ עבור כל ערך של p.

18. נתונה הפרבולה $f(x) = x^2 + px$ ונתון המשיק לפרבולה בנקודה שבה $x = 3$. הראה שנקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה-y אינה תלויה ב-p ומצא אותה.

תשובה: $(0, -9)$

19. בנקודות A ו-B שעל הפרבולה $f(x) = x^2 - 2x$ מעבירים שני משיקים לפרבולה המאונכים זה לזה. מצא את הנקודות A ו-B אם ידוע ששיעור ה-x של הנקודה B גדול ב-1.25 משיעור ה-x של הנקודה A. שיעור ה-x של הנקודה A קטן מ-$\frac{3}{4}$.

תשובה: $(0,0)$, $(1.25, -\frac{15}{16})$

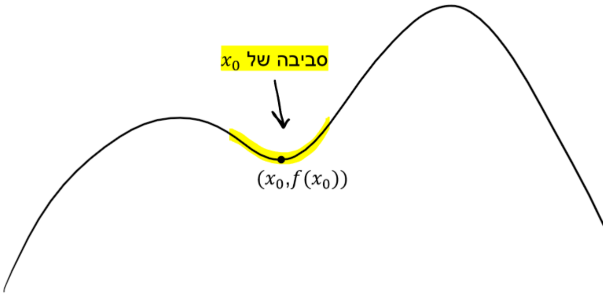
20. מעבירים שני משיקים לפרבולה $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ בנקודות A ו-B הנמצאות ברביע השלישי והרביעי בהתאמה (הנקודות A ו-B נמצאות על הפרבולה).שני המשיקים נחתכים באותה נקודה על ציר ה-y. מצא את הנקודות A ו-B אם ידוע שהמשיקים מאונכים זה לזה.
(הערה: אין להשתמש בתכונות הסימטריה של הפרבולה).

חקירת פונקציית פולינום.

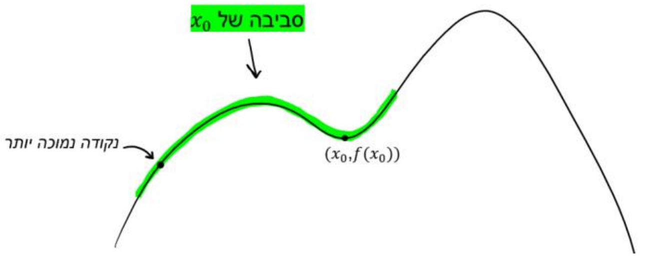
הסבר כללי על נקודות קיצון

<u>נקודת מינימום מקומית</u>

- נאמר שלפונקציה $f(x)$ יש נקודת מינימום מקומית ב-x_0 אם קיימת סביבה של x_0 שבעבור כל x **בסביבה זו** (מלבד x_0 עצמו) מתקיים $f(x) > f(x_0)$.
או במילים פשוטות הנקודה $(x_0, f(x_0))$, היא הנקודה ה"נמוכה" ביותר בסביבה זו.
חשוב לציין שזה לא אומר שזאת הנקודה ה"נמוכה" ביותר בכל הפונקציה.



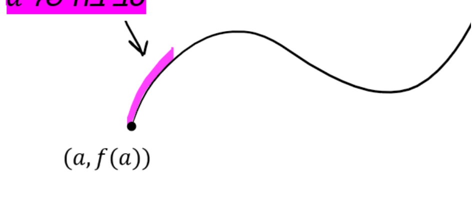
- הסיבה שאני רושם "קיימת" סביבה היא כי לא כל סביבה של x_0 שנתבונן בה תקיים:
הנקודה $(x_0, f(x_0))$, היא הנקודה ה"נמוכה" ביותר בסביבה זו. למשל נתבונן בסביבה רחבה יותר מהקודמת. הסביבה הירוקה באיור:



ניתן לראות כאן בצורה מובהקת שבסביבה הירוקה קיימות נקודות "נמוכות יותר" מנקודת המינימום המקומית $(x_0, f(x_0))$.

- *חשוב לציין שאם לפונקציה יש "התחלה" ו\או "סוף" (הפונקציה מוגדרת בתחום הגדרה שתואם לאחת הצורות הבאות:*
  - $a \le x \le b$
  - $x \le b$
  - $a \le x$

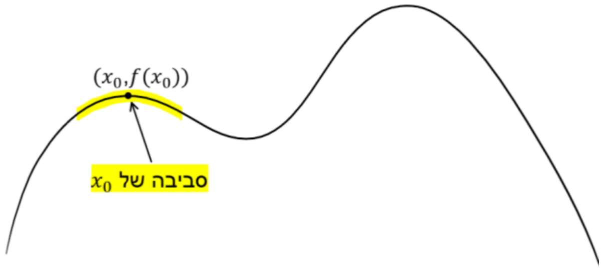
אז תהיינה לפונקציה נקודות קיצון מקומיות בקצוות שנקראות גם נקודות ***<u>קיצון קצה</u>***.



למשל כאן בציור, עבור הפונקציה המוגדרת בתחום $a \le x$ הנקודה. $(a, f(a))$ היא נקודת מינימום מקומית (הנקראת גם מינימום קצה) כי קיימת סביבה של a שבה כל x בסביבה זו מקיים $f(x) > f(a)$. נקודות קיצון שאינן נקודות קיצון קצה נקראות <u>נקודות קיצון פנימיות</u>.

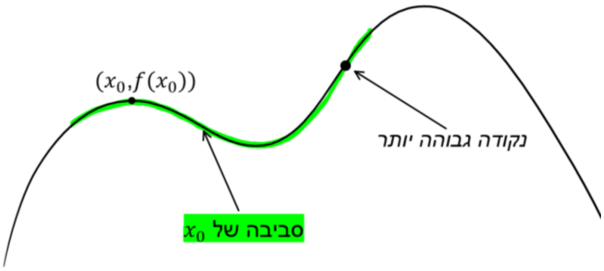
נקודת מקסימום מקומית

- נאמר שלפונקציה $f(x)$ יש נקודת מקסימום מקומית ב-x_0 אם קיימת סביבה של x_0 שבעבור כל x **בסביבה זו** (מלבד x_0 עצמו) מתקיים $f(x) < f(x_0)$.
או במילים פשוטות הנקודה $(x_0, f(x_0))$, היא הנקודה ה"גבוהה" ביותר בסביבה זו.
חשוב לציין שזה לא אומר שזאת הנקודה ה"גבוהה" ביותר בכל הפונקציה.



- הסיבה שאני רושם "קיימת" סביבה היא כי לא כל סביבה של x_0 שנתבונן בה תקיים: *הנקודה $(x_0, f(x_0))$, היא הנקודה ה"גבוהה" ביותר בסביבה זו.* למשל נתבונן בסביבה רחבה יותר מהקודמת. הסביבה הירוקה באיור:

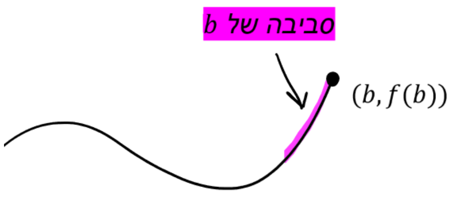
ניתן לראות כאן בצורה מובהקת שבסביבה הירוקה קיימות נקודות "גבוהות יותר" מנקודת המקסימום המקומית $(x_0, f(x_0))$.



- *חשוב לציין שאם לפונקציה יש "התחלה" ו\או "סוף" (הפונקציה מוגדרת בתחום הגדרה שתואם לאחת הצורות הבאות:*
    - $a \leq x \leq b$
    - $x \leq b$
    - $a \leq x$

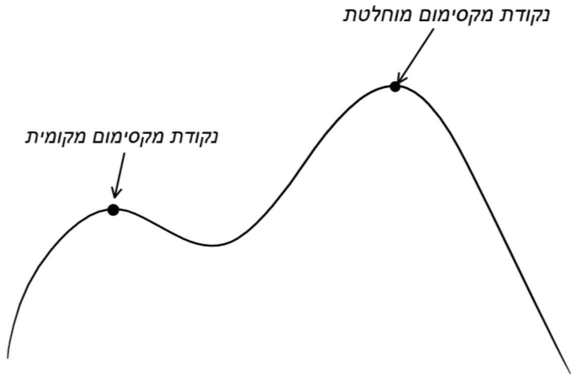
*אז תהיינה לפונקציה נקודות קיצון מקומיות בקצוות שנקראות גם נקודות **קיצון קצה**.*

למשל כאן בציור, עבור הפונקציה המוגדרת בתחום $x \leq b$ הנקודה. $(b, f(b))$ היא נקודת מקסימום מקומית (הנקראת גם מקסימום קצה) כי קיימת סביבה של b שבה כל x בסביבה זו מקיים $f(x) < f(b)$ . . נקודות קיצון שאינן נקודות קיצון קצה נקראות נקודות קיצון פנימיות.

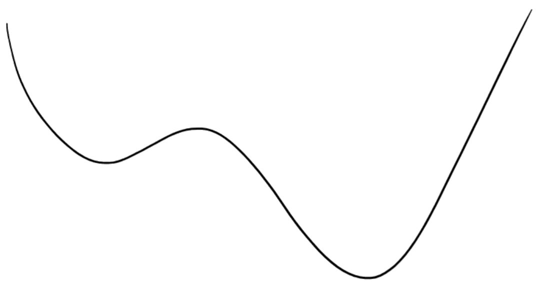


נקודת מקסימום מוחלטת

הנקודה "הגבוהה" ביותר בפונקציה. כלומר אם הנקודה $(x_0,f(x_0))$ מקיימת עבור כל x בתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x_0)>f(x)$ אז הנקודה $(x_0,f(x_0))$ היא נקודת מקסימום מוחלטת.

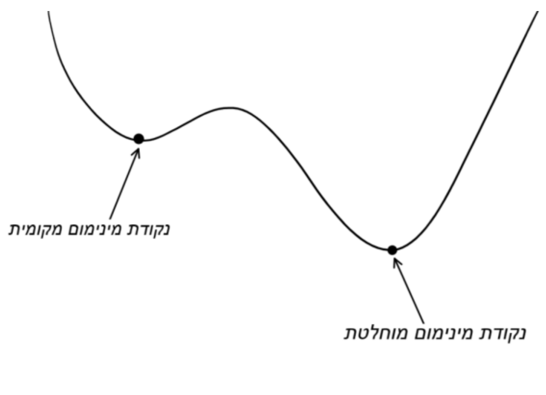


**לא לכל פונקציה יש נקודת מקסימום מוחלטת. למשל לפונקציה הבאה נאמר שאין נקודת מקסימום מוחלטת כי אין נקודה בפונקציה שניתן להגיד ש"היא הנקודה הגבוהה ביותר":*



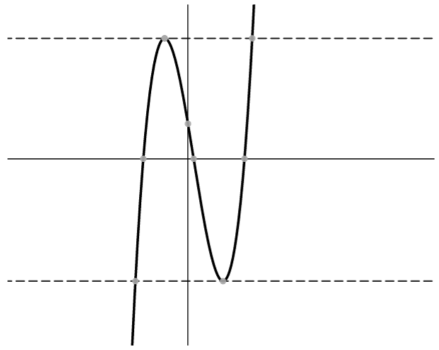
נקודת מינימום מוחלטת

הנקודה ה"נמוכה" ביותר בפונקציה. כלומר אם הנקודה $(x_0,f(x_0))$ מקיימית עבור כל x בתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x_0)<f(x)$ אז הנקודה $(x_0,f(x_0))$ היא נקודת מינימום מוחלטת.

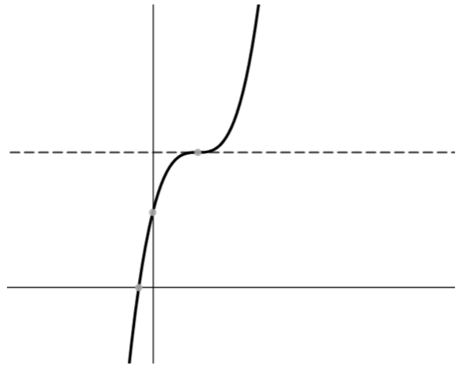


הסבר על נקודות קיצון - בפונקציית פולינום

בפונקציית פולינום שיפוע המשיק בנקודת הקיצון הוא אפס



אולם, אם בנקודה מסוימת שיפוע המשיק לפונקציה הוא אפס זה לא מבטיח שתהיה נקודת קיצון :



למשל בתמונה הנ"ל ניתן לראות שאף על פי שהשיפוע בנקודה מסוימת הוא אפס , הנקודה אינה נקודת קיצון.

כדי לוודא שבנקודה מסוימת $(x_0,f(x_0))$ בפונקצית פולינום יש אכן נקודת קיצון נצטרך לוודא את שני הדברים הבאים:

1. $f'(x_0)=0$ (*שהנגזרת מתאפסת עבור* x_0)
2. שהפונקציה עוברת מעלייה לירידה או מירידה לעלייה.
3. אם מתקיים התנאי הראשון ולא השני נאמר שהנקודה היא נקודת פיתול

שלבים למציאת נקודות קיצון בפונקצית פולינום

1. גוזרים את הפונקציה
2. משווים את הנגזרת ל-0 ומוצאים את ערכי ה-x שמאפסים את הנגזרת.
3. מכניסים לטבלה את הנקודות ערכי ה-x שמאפסים את הנגזרת. (**כדוגמה** לערכי x המאפסים את הנגזרת בחרתי $x = 1$ ו-$x = 5$)

x		1		5	
$f'(x)$		0		0	
$f(x)$					

4. מציבים <u>בנגזרת</u> את ערכי x הנמצאים בכל אחד מהתחומים בטבלה. אם הנגזרת חיובית מסמנים "+" ומציירים חץ עלייה ואם היא שלילית מסמנים "–" ומציירים חץ ירידה.

x		1		5	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	**מקסימום**	↘	**מינימום**	↗

5. שלב המסקנות:
   - אם בנקודה מסוימת קיים מעבר מעלייה לירידה נקרא לנקודת זו **מקסימום**.
   - אם בנקודה מסוימת קיים מעבר מירידה לעליה נקרא לנקודת זו **מינימום**.
   - אם בנקודה מסוימת שבה גילינו שהשיפוע אפס הפונקציה אינה עוברת מעליה לירידה נאמר שנקודה זו היא נקודת **פיתול** ולא נגיש אותה בתשובה לנקודות הקיצון.

x		1		5	
$f'(x)$	+	0	−	0	−
$f(x)$	↗	**מקסימום**	↘	**פיתול**	↘

x		1		5	
$f'(x)$	+	0	+	0	−
$f(x)$	↗	**פיתול**	↗	**מקסימום**	↘

6. מציבים את ערכי ה-x של נקודות הקיצון על מנת למצוא את ערכי ה-y של הנקודות

שאלות - חקירת פונקציית פולינום.

1. נתונה הפונקציה $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 12$.
   א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה .
   ב. רשום מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
   ג. שרטט את הפונקציה.

2. נתונה הפונקציה $f(x) = -x^4 + 8x^2 + 9$.
   א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה .
   ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים .
   ג. רשום מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
   ד. שרטט את הפונקציה.

3. נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 16$.
   א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה (אם יש כאלה).
   ב. מצא את נקודת החיתוך עם ציר ה-y **בלבד**.
   ג. רשום מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).
   ד. שרטט את הפונקציה.

<u>הערה לפני התרגילים הבאים (ראה סרטון הסבר)</u>

- ערכי ה-y של פונקציית פולינום תמיד ישאפו לאינסוף או מינוס אינסוף כאשר איקס שואף לאינסוף.
  או בכתיב מתמטי : אם נתונה פונקציית פולינום $f(x)$ אז $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$
- ערכי ה-y של פונקציית פולינום תמיד ישאפו לאינסוף או מינוס אינסוף כאשר איקס שואף למינוס אינסוף.
  או בכתיב מתמטי : אם נתונה פונקציית פולינום $f(x)$ אז $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$

4. נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 27x$.
   א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
   ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (תוכל להשאיר שורש בתשובתך).
   ג. רשום מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה .
   ד. שרטט את הפונקציה.
   ה. כמה פתרונות יש למשוואה $f(x) = 60$?
   ו. כמה פתרונות יש למשוואה $f(x) = -2$?
   ז. כמה פתרונות יש למשוואה $f(x) = -54$?

5. נתונה הפונקציה $f(x) = x^5 + 5x$.
א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה (אם יש כאלה).
ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
ג. רשום מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה) .
ד. שרטט את הפונקציה.
ה. כמה פתרונות יש למשוואה $f(x) = 1$?
ו. כמה פתרונות יש למשוואה $f(x) = -1$?
ז. כמה פתרונות יש למשוואה $f(x) = k$?

<u>לפני התרגילים הבאים צפה בסרטונים בנושא של הזזות של פונקציות.</u>

6. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2(x^2-8)}{4}$.
א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים. (תוכל להשאיר שורש בתשובתך).
ג. רשום מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. שרטט את הפונקציה.
ה. מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה (אם יש כאלה).
ו. נתונה הפונקציה : $g(x) = \frac{(x-5)^2((x-5)^2-8)}{4}$ מצא את נקודות הקיצון שלה (אין צורך לגזור את הפונקציה $g(x)$).
ז. נתונה הפונקציה : $h(x) = \frac{(x-5)^2((x-5)^2-8)}{4} + 3$ מצא את נקודות הקיצון שלה (אין צורך לגזור את הפונקציה $h(x)$).

7. נתונה הפונקציה $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 24x + 19$.
א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
ב. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-y.
ג. רשום מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. שרטט את הפונקציה.
ה. מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה (אם יש כאלה).
ו. נתונה הפונקציה : $g(x) = 4 \cdot (-x^3 + 9x^2 - 24x + 19)$ מצא את נקודות הקיצון שלה (אין צורך לגזור את הפונקציה $g(x)$).
ז. נתונה הפונקציה : $h(x) = 2f(x) + 3$ מצא את נקודות הקיצון שלה (אין צורך לגזור את הפונקציה $h(x)$).

8. נתונה הפונקציה $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 3$.
א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
ב. רשום מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ג. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-y.
ד. שרטט את הפונקציה.
ה. כמה משיקים לפונקציה קיימים אשר שיפועם אפס.
ו. מצא כמה פתרונות יש למשוואה $3x^5 = 5x^3 - 3$.
ז. נתונה הפונקציה : $g(x) = 3(x+1)^5 - 5(x+1)^3 + 3$ מצא את נקודות הקיצון שלה (אין צורך לגזור את הפונקציה $g(x)$).
ח. נתונה הפונקציה: $h(x) = 3(x+1)^5 - 5(x+1)^3$ מצא את נקודות הקיצון שלה (אין צורך לגזור את הפונקציה $h(x)$).

9. נתונה הפונקציה $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x - 2$.

א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ב. רשום מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ג. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-y.

ד. שרטט את הפונקציה.

ה. מצא כמה פתרונות יש למשוואה $2x^3 - 12x^2 + 18x = 2$.

ו. נתונה הפונקציה : $g(x) = 2(x+a)^3 - 12(x+a)^2 + 18(x+a) - 2 + b$ מצא עבור אילו ערכים של a ו- b לפונקציה יש נקודת קיצון בראשית הצירים. מצא את שני הצמדים האפשריים של a ו- b (אין צורך לגזור את הפונקציה $g(x)$).

10. נתונה הפונקציה $f(x) = 2x^3 - 6x + 2$.

א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ב. רשום מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ג. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-y.

ד. שרטט את הפונקציה.

ה. נתונה הפונקציה : $g(x) = -(2x^3 - 6x + 2)$. שרטט את הפונקציה $g(x)$ (רשום על גבי הגרף את נקודות הקיצון).

ו. נתונה הפונקציה : $h(x) = 2(-x)^3 - 6(-x) + 2$. שרטט את הפונקציה $h(x)$ (רשום על גבי הגרף את נקודות הקיצון).

11. נתונה הפונקציה $f(x) = 6x^4 + 8x^3 + 8$.

א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ב. רשום מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ג. שרטט את הפונקציה (רשום על גבי השרטוט את נקודת החיתוך עם ציר ה-y).

ד. נתונה הפונקציה : $g(x) = \frac{1}{2}f(x)$. שרטט את הפונקציה $g(x)$ (רשום על גבי הגרף את נקודות הקיצון ונקודת החיתוך).

ה. נתונה הפונקציה : $h(x) = -f(x)$. שרטט את הפונקציה $h(x)$ (רשום על גבי הגרף את נקודות הקיצון ונקודות החיתוך).

ו. נתונה הפונקציה : $j(x) = -\frac{1}{2}f(x)$. שרטט את הפונקציה $j(x)$ (רשום על גבי הגרף את נקודות הקיצון ונקודות החיתוך).

12. נתונה הפונקציה $f(x) = -x^3 - 4.5x^2 + 10$.

א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ב. רשום מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ג. שרטט את הפונקציה.

ד. נתונה הפונקציה : $g(x) = -f(x) + a$. מצא את ערכו של הפרמטר a עבורו $g(x)$ משיקה לציר ה- x.

ה. נתונה הפונקציה : $h(x) = f(-x)$. מצא את נקודות הקיצון שלה (אין צורך לגזור את הפונקציה $h(x)$).

13. נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.

א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.(השאר שורש בתשובתך).
ב. רשום מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
ד. שרטט את הפונקציה.
ה. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x) = (2x)^4 - 5(2x)^2 + 4$. (אין צורך לגזור את הפונקציה $g(x)$).
ו. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x) = (\frac{1}{2}x)^4 - 5(\frac{1}{2}x)^2 + 4$. (אין צורך לגזור את הפונקציה $h(x)$).

14. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{27}x^3 - x^2 + 8x$.

א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
ב. רשום מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
ד. שרטט את הפונקציה.
ה. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{27}(3x)^3 - (3x)^2 + 8(3x)$. (אין צורך לגזור את הפונקציה).
ו. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x) = \frac{1}{27}(\frac{x}{2})^3 - (\frac{x}{2})^2 + 8(\frac{x}{2})$. (אין צורך לגזור את הפונקציה).
ז. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה: $j(x) = -\frac{1}{27}x^3 - x^2 - 8x$. (אין צורך לגזור את הפונקציה).

15. נתונה הפונקציה $f(x) = x^3$.

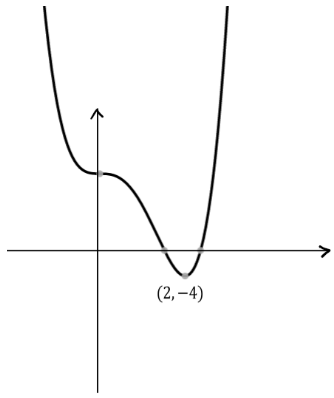
א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה (אם יש כאלה).
ב. רשום מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).
ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
ד. שרטט את הפונקציה.
ה. נתונה פונקציה חדשה $g(x)$ המתקבלת על ידי הזזה של הפונקציה $f(x)$ 3 יחידות שמאלה ו-8 יחידות למטה. כתוב ביטוי המייצג את הפונקציה $g(x)$ (או במילים אחרות מצא את הפונקציה $g(x)$).
ו. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה-x ושרטט אותה במערכת צירים.

16. נתונה הפרבולה $f(x) = x^2$.

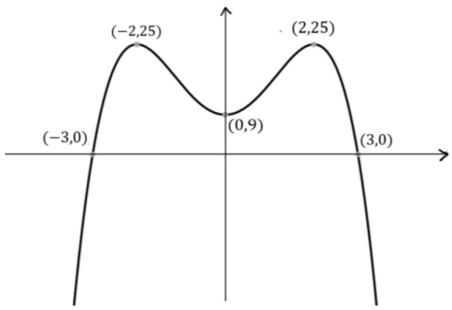
א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה .
ב. רשום מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה .
ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
ד. שרטט את הפונקציה.
ה. מצא פונקציה אשר מייצגת פרבולה "עצובה" שיש לה נקודת קיצון בנקודה $(-4,1)$.

תשובות

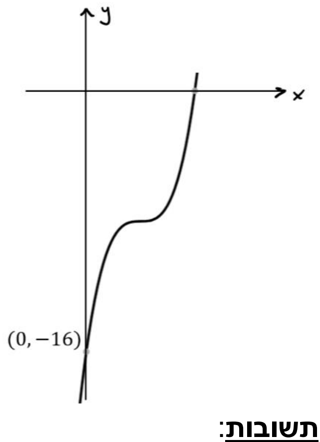
1. נקודת מינימום: $(2,-4)$, תחום עלייה: $x>2$ תחום ירידה: $x<2$.



2. נקודת מינימום: $(0,9)$, נקודות מקסימום: $(2,25),(-2,25)$,
תחום עלייה: $0<x<2$ **או** $x<-2$, תחום ירידה: $x>2$ **או** $-2<x<0$.
חיתוך עם הצירים: $(0,9),(3,0),(-3,0)$.

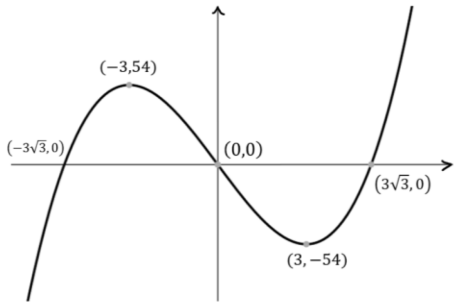


3. נקודות קיצון: אין
תחום עלייה: כל x, תחום ירידה: אין.
חיתוך עם ציר ה-y: $(0,-16)$.



4. **תשובות**:
   א. נקודת מינימום: $(3,-54)$, נקודת מקסימום: $(-3,54)$.
   ב. חיתוך עם הצירים: $(0,0),(3\sqrt{3},0),(-3\sqrt{3},0)$
   ג. תחום עלייה: $x<-3$ **או** $x>3$, תחום ירידה: $-3<x<3$.

ד. שרטוט:



ה. פתרון אחד.

ו. שלושה פתרונות.

ז. שני פתרונות.

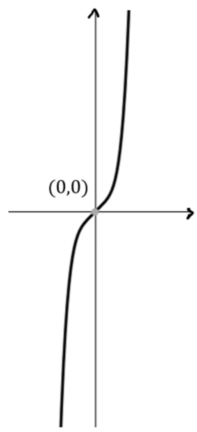
5. **<u>תשובות</u>**:

א. אין נקודות קיצון.

ב. $(0,0)$.

ג. <u>תחום עלייה</u>: עולה לכל x , <u>תחום ירידה</u>: אין.

ד. שרטוט:



ה. פתרון אחד.

ו. פתרון אחד.

ז. פתרון אחד.

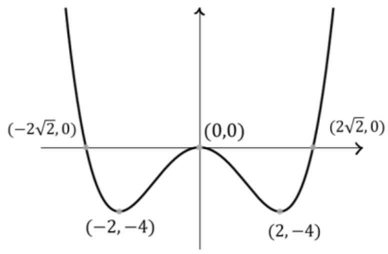
6. **<u>תשובות</u>**:

א. $(0,0)$ מקסימום, $(2,-4)$ מינימום, $(-2,-4)$ מינימום.

ב. $(2\sqrt{2},0)$, $(0,0)$, $(-2\sqrt{2},0)$.

ג. <u>תחום עלייה</u>: $-2<x<0$ **או** $x>2$, <u>תחום ירידה</u>: $x<-2$ **או** $0<x<2$.

ד. שרטוט:



ה. $(2,-4)$ נקודת מינימום מוחלטת, $(-2,-4)$ נקודת מינימום מוחלטת. <u>אין</u> נקודת מקסימום מוחלטת.

ו. $(5,0)$ מקסימום, $(7,-4)$ מינימום, $(3,-4)$ מינימום.

ז. $(5,3)$ מקסימום,$(7,-1)$ מינימום, $(3,-1)$ מינימום.

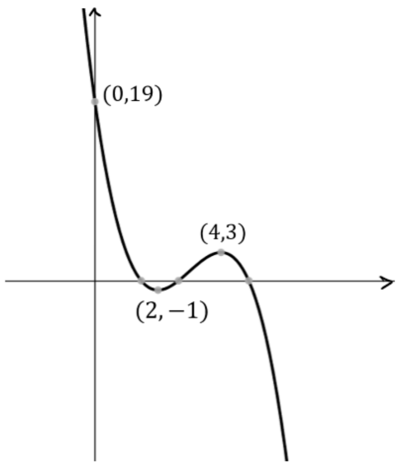
7. **<u>תשובות</u>**:

א. $(4,3)$ מקסימום,$(2,-1)$ מינימום.

ב. $(0,19)$

ג. <u>תחום עלייה</u>: $2 < x < 4$, <u>תחום ירידה</u>: $x > 4$ **או** $x < 2$.

ד. שרטוט:



ה. אין לפונקציה נקודות קיצון מוחלטות.

ו. הפונקציה $g(x)$: $(4,12)$ מקסימום,$(2,-4)$ מינימום.

ז. הפונקציה $h(x)$: $(4,9)$ מקסימום,$(2,1)$ מינימום.

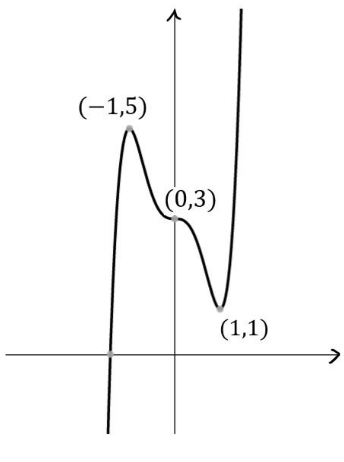
8. **<u>תשובות</u>**:

א. $(1,1)$ מינימום,$(-1,5)$ מקסימום.

ב. <u>תחום ירידה</u>: $-1 < x < 1$, <u>תחום עלייה</u>: $x > 1$ **או** $x < -1$.

ג. $(0,3)$

ד. שרטוט:



ה. שלושה.

ו. פתרון אחד.

ז. הפונקציה $g(x)$: $(0,1)$ מינימום,$(-2,5)$ מקסימום.

ח. הפונקציה $h(x)$: $(0,-2)$ מינימום,$(-2,2)$ מקסימום.

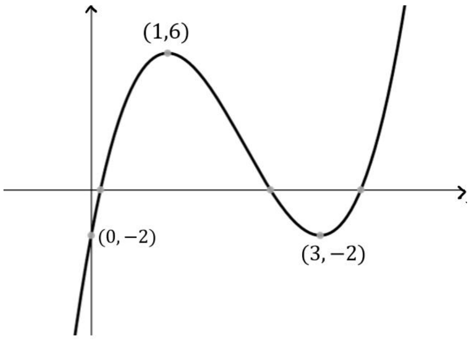
9. **<u>תשובות</u>**:

א. $(3,-2)$ מינימום,$(1,6)$ מקסימום.

ב. <u>תחום ירידה</u>: $1 < x < 3$, <u>תחום עלייה</u>: $x > 3$ **או** $x < 1$.

ג. $(0,-2)$.

ד. שרטוט:



ה. שלושה.

ו. $a = 1, b = -6$ **<u>או</u>** $a = 3, b = 2$.

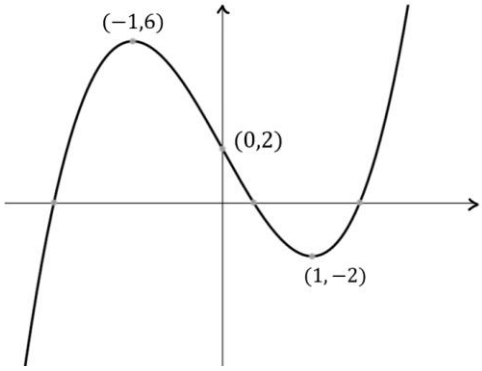
10. **<u>תשובות</u>**:

א. $(1,-2)$ מינימום, $(-1,6)$ מקסימום.

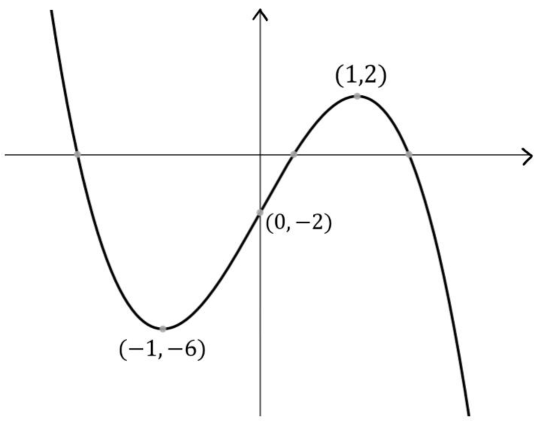
ב. <u>תחום ירידה</u>: $-1 < x < 1$, <u>תחום עלייה</u>: $1 < x$ **או** $x < -1$.

ג. $(0,2)$.

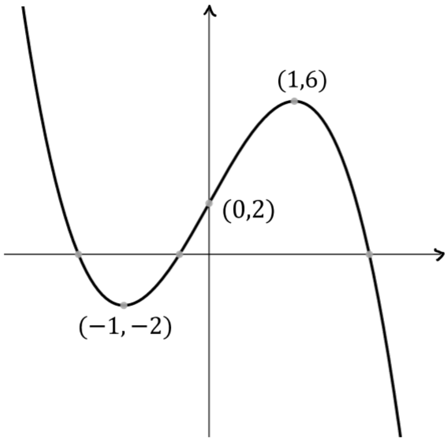
ד. שרטוט:



ה. שרטוט של $g(x)$:



ו. שרטוט של $h(x)$:

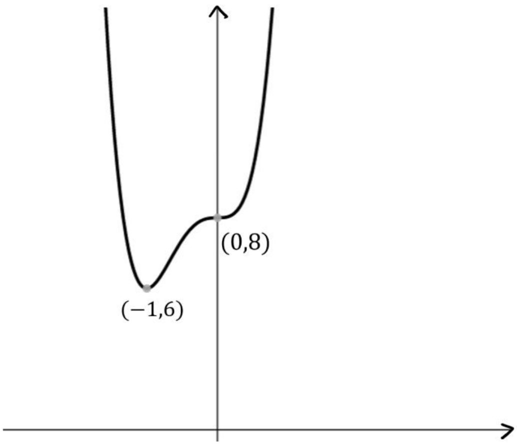


11. <u>**תשובות**</u>:

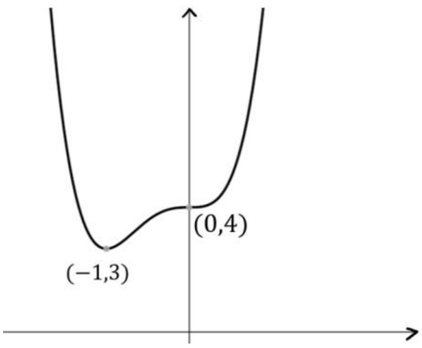
א. $(-1,6)$ מינימום.

ב. <u>תחום ירידה</u>: $x < -1$, <u>תחום עלייה</u>: $x > -1$ **.**

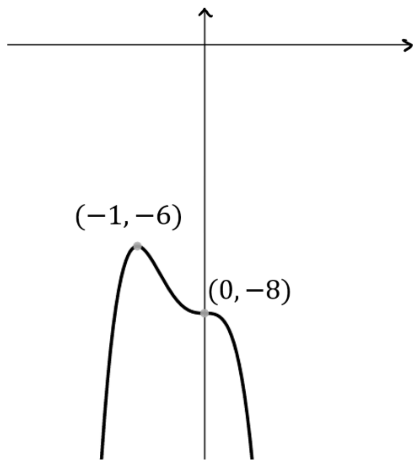
ג. שרטוט:



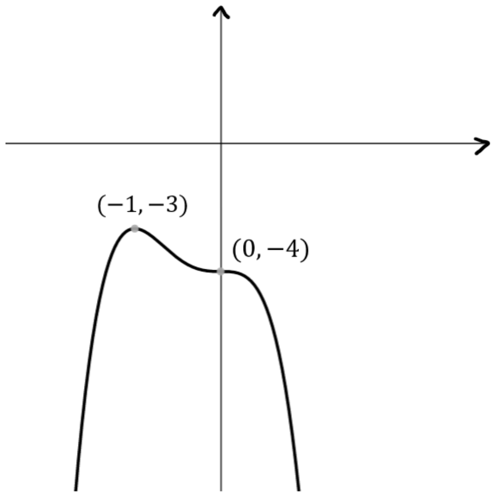
ד. שרטוט של $g(x)$:



ה. שרטוט של $h(x)$:



ו. שרטוט של $j(x)$:

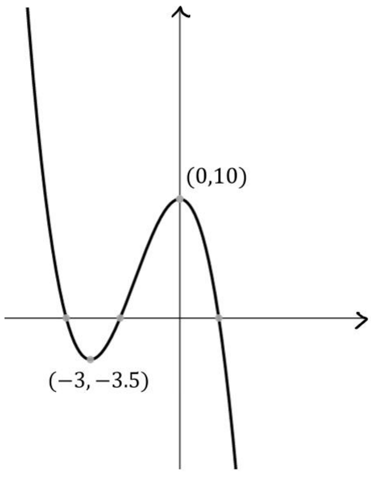


12. **<u>תשובות</u>**:

א. $(-3,-3.5)$ מינימום,$(0,10)$ מקסימום.

ב. <u>תחום עלייה</u>: $-3 < x < 0$, <u>תחום ירידה</u>: $x > 0$ **או** $x < -3$.

ג. שרטוט:



ד. $a = -3.5$ **<u>או</u>** $a = 10$.

ה. הפונקציה $h(x)$: $(3,-3.5)$ מינימום,$(0,10)$ מקסימום.

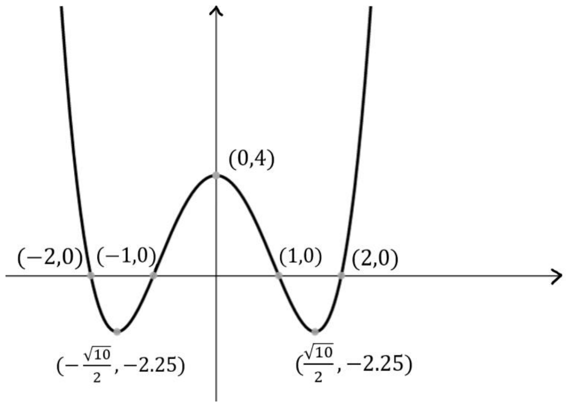
13. **<u>תשובות</u>**:

א. $(0,4)$ מקסימום,$(\frac{\sqrt{10}}{2},-2.25)$ מינימום, $(-\frac{\sqrt{10}}{2},-2.25)$ מינימום.

ב. $(2,0)$,$(1,0)$, $(0,4)$,$(-1,0)$, $(-2,0)$.

ג. <u>תחום עלייה</u>: $-\frac{\sqrt{10}}{2} < x < 0$ **או** $x > \frac{\sqrt{10}}{2}$, <u>תחום ירידה</u>: $x < -\frac{\sqrt{10}}{2}$ **או** $0 < x < \frac{\sqrt{10}}{2}$.

ד. שרטוט:



ה. $(0,4)$ מקסימום,$(\frac{\sqrt{10}}{4},-2.25)$ מינימום, $(-\frac{\sqrt{10}}{4},-2.25)$ מינימום.

ו. $(0,4)$ מקסימום,$(\sqrt{10},-2.25)$ מינימום, $(-\sqrt{10},-2.25)$ מינימום.

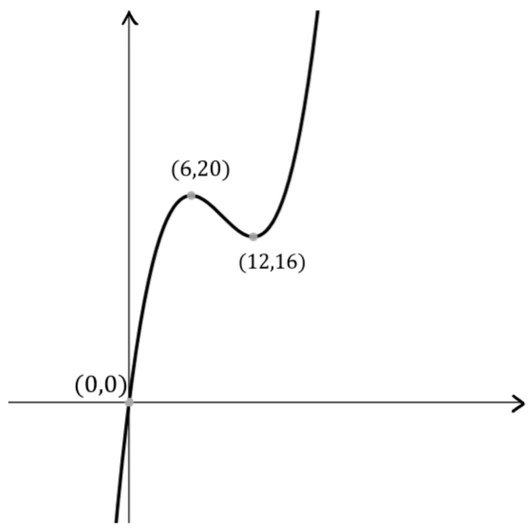
14. **<u>תשובות</u>**:

א. $(12,16)$ מינימום,$(6,20)$ מקסימום.

ב. <u>תחום ירידה</u>: $6 < x < 12$, <u>תחום עלייה</u>: $x > 12$ **או** $x < 6$.

ג. $(0,0)$.

ד. שרטוט:



ה. $(4,16)$ מינימום,$(2,20)$ מקסימום.

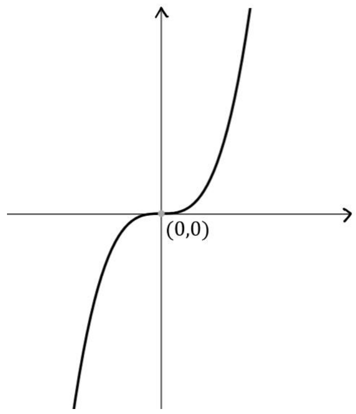
ו. $(24,16)$ מינימום,$(12,20)$ מקסימום.

ז. $(-12,16)$ מינימום,$(-6,20)$ מקסימום.

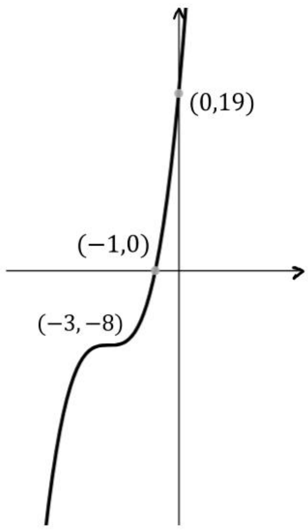
15. **<u>תשובות</u>**:

א. אין נקודות קיצון.

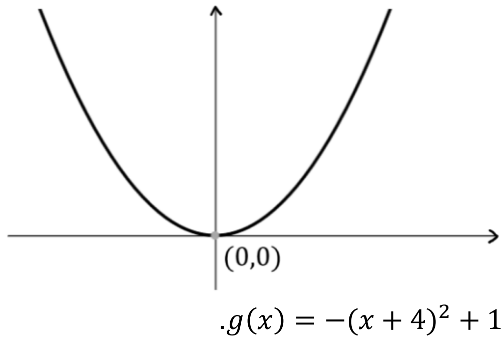
ב. <u>תחום עלייה</u>: עולה לכל x, <u>תחום ירידה</u>: אין.
ג. $(0,0)$.
ד. שרטוט:



ה. $g(x) = (x+3)^3 - 8$.
ו. $(-1,0)$.



16. **<u>תשובות</u>**:
א. $(0,0)$ נקודת מינימום.
ב. <u>תחום עלייה</u>: $0 < x$, <u>תחום ירידה</u>: $x < 0$.
ג. $(0,0)$.
ד. שרטוט:



ה. $g(x) = -(x+4)^2 + 1$.

פונקציה מורכבת ופונקציית מכפלה (רק פולינום).

	הפונקציה	הנגזרת
1	$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
2	$f(x) = ax$	$f'(x) = a$
3	$f(x) = a$	$f'(x) = 0$
4	$f(x) = (u(x))^n$	$f'(x) = n(u(x))^{n-1} \cdot u'(x)$
5	$f(x) = u(x) \cdot v(x)$	$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

נגזרות

1. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = (3x^2 + 2)^5$
ב. $f(x) = (1 - x^2)^2$
ג. $f(x) = (1 + 4x)^3$
ד. $f(x) = -(x + 1)^4$
ה. $f(x) = -2(x^2 + 5x + 3)^7$
ו. $f(x) = (3x + 2)^2$
ז. $f(x) = (3x + 4)^3 \cdot (1 - x)^5$
ח. $f(x) = (1 - x^2)^2 \cdot (1 + 5x)^3$
ט. $f(x) = 2x(1 + x^2)^3$
י. $f(x) = 2(2x + 1)^3(1 - x^2)^2$

1. <u>תשובות</u>:

א. $f'(x) = 30x(3x^2 + 2)^4$
ב. $f'(x) = -4x(1 - x^2)$
ג. $f'(x) = 12(1 + 4x)^2$
ד. $f'(x) = -4(x + 1)^3$
ה. $f'(x) = -14(x^2 + 5x + 3)^6 \cdot (2x + 5)$
ו. $f'(x) = 6(3x + 2)$
ז. $f'(x) = (3x + 4)^2 \cdot (1 - x)^4 \cdot (-24x - 11)$
ח. $f'(x) = (1 - x^2) \cdot (1 + 5x)^2 \cdot (-35x^2 - 4x + 15)$
ט. $f'(x) = 2(1 + x^2)^2 \cdot (7x^2 + 1)$
י. $f'(x) = 4(2x + 1)^2 \cdot (1 - x^2) \cdot (-7x^2 - 2x + 3)$

חקירה מלאה

2. נתונה הפונקציה $f(x) = (1 - x)^2(x - 4)$.

א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה *(אין צורך לפתוח סוגריים לפני גזירה)*.
ב. רשום מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
ד. שרטט את הפונקציה.
ה. נתונה הפונקציה $g(x) = f\left(\frac{1}{3}x\right)$. שרטט את הפונקציה $g(x)$ ורשום על השרטוט את נקודות החיתוך עם הצירים ואת נקודות הקיצון.

3. נתונה הפונקציה $f(x) = (5x-9)^2(3-x)^2$
   א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה *(חלק משיעורי נקודות הקיצון אינם מספרים שלמים).*
   ב. רשום מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
   ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
   ד. שרטט את הפונקציה.
   ה. נתונה הפונקציה $g(x) = f(-x)$. שרטט את הפונקציה $g(x)$ ורשום על השרטוט את נקודות החיתוך עם הצירים ואת נקודות הקיצון.

4. נתונה הפונקציה $f(x) = (2x-5)^4 + 3$
   א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
   ב. רשום מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
   ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
   ד. שרטט את הפונקציה.
   ה. עבור אילו ערכי k למשוואה $f(x) = k$ אין פתרון.

5. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2(\frac{1}{4}x-1)^2 + 1$
   א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
   ב. רשום מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
   ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
   ד. שרטט את הפונקציה.
   ה. נתונה הפונקציה $g(x) = -f(x) + a$. מצא את a אם ידוע שהפונקציה משיקה לציר ה-x .

6. לפונקציה $f(x) = (x+a)(6-x)^2$ יש נקודת קיצון כאשר $x = 4$.
   א. מצא את ערכו של הפרמטר a.
   ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
   ג. רשום מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
   ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
   ה. שרטט את הפונקציה.
   ו. נתונה הפונקציה $g(x) = -2f(x)$. שרטט את הפונקציה $g(x)$ ורשום על השרטוט את נקודות החיתוך עם הצירים ואת נקודות הקיצון.

7. הישר $y = -24x + 45$ משיק לפונקציה $f(x) = a(b-2x)^4$ בנקודה ששיעור ה-x שלה הוא 2 .
   א. מצא את a ו-b.
   ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
   ג. רשום מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
   ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
   ה. שרטט את הפונקציה.

8. נתונה הפונקציה $f(x) = (x^2 - bx - 2b^2)^4$ b הוא פרמטר חיובי.
   א. הבע באמצעות b את נקודות הקיצון של הפונקציה.
   (בהבעת שיעור ה-y של נקודת המקסימום השאר 2 ספרות אחרי הנקודה העשרונית.)
   ב. הבע באמצעות b את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
   ג. הבע באמצעות b את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ד. שרטט את הפונקציה.

9. נתונה הפונקציה $f(x) = bx(bx - \frac{1}{2})^2$ b הוא פרמטר חיובי.
א. הבע באמצעות b את נקודות הקיצון של הפונקציה.
ב. הבע באמצעות b את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ג. הבע באמצעות b את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
ד. שרטט את הפונקציה.

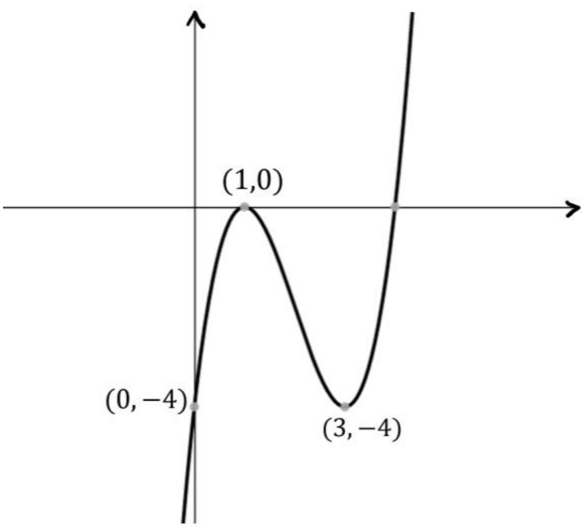
10. נתונה הפונקציה $f(x) = -ax(x-a)^2$ a הוא פרמטר **<u>שלילי</u>**.
א. הבע באמצעות a את נקודות הקיצון של הפונקציה.
ב. הבע באמצעות a את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ג. הבע באמצעות a את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
ד. שרטט את הפונקציה.

תשובות

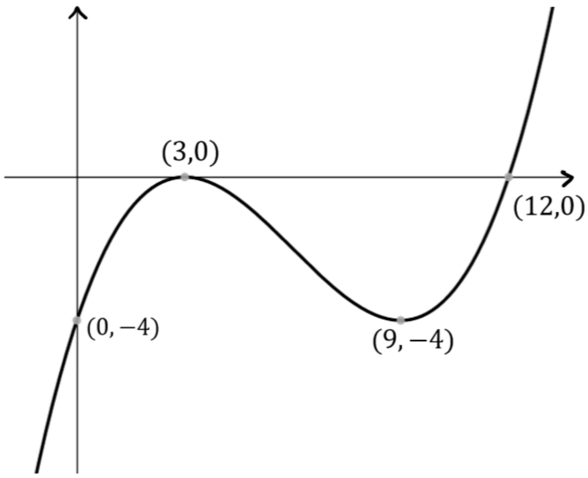
1. **<u>תשובות</u>**:

א. $f'(x) = 30x(3x^2+2)^4$
ב. $f'(x) = -4x(1-x^2)$
ג. $f'(x) = 12(1+4x)^2$
ד. $f'(x) = -4(x+1)^3$
ה. $f'(x) = -14(2x+5)(x^2+5x+3)^6$
ו. $f'(x) = 6(3x+2)$
ז. $f'(x) = -(24x+11)(3x+4)^2(1-x)^4$
ח. $f'(x) = (-35x^2-4x+15)(1-x^2)(1+5x)^2$
ט. $f'(x) = 2(1+x^2)^2(7x^2+1)$
י. $f'(x) = 4(2x+1)^2(1-x^2)(-7x^2-2x+3)$

2. **<u>תשובות</u>**:
א. $(3,-4)$ נקודת מינימום, $(1,0)$ נקודת מקסימום.
ב. <u>תחום עליה</u>: $x > 3$ **או** $x < 1$. <u>תחום ירידה</u>: $1 < x < 3$.
ג. $(4,0)$, $(1,0)$, $(0,-4)$.
ד. שרטוט:



ה. שרטוט:



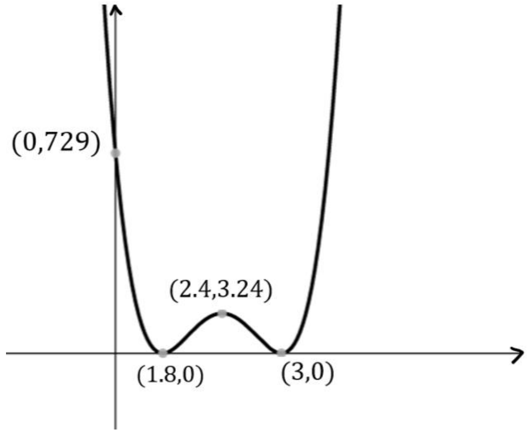
3. **<u>תשובות</u>**:

א. $(1.8,0)$ נקודת מינימום, $(2.4,3.24)$ נקודת מקסימום, $(3,0)$ נקודת מינימום.

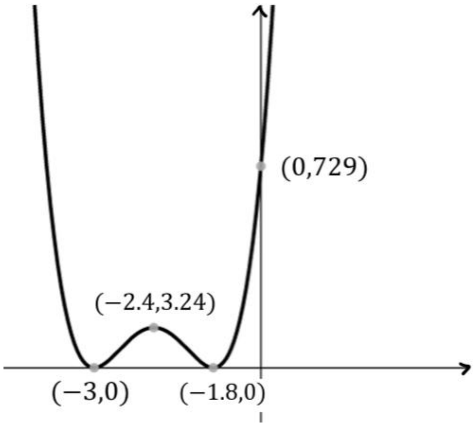
ב. <u>תחום עליה</u>: $x > 3$ **או** $1.8 < x < 2.4$. <u>תחום ירידה</u>: $x < 1.8$ **או** $2.4 < x < 3$.

ג. $(3,0)$, $(1.8,0)$, $(0,729)$.

ד. שרטוט:

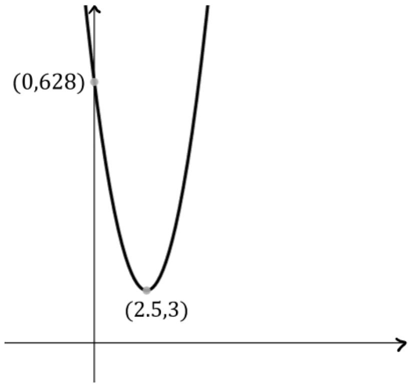


ה. שרטוט:



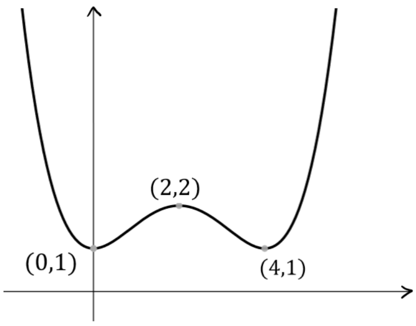
4. **<u>תשובות</u>**:

א. $(2.5,3)$ נקודת מינימום.
ב. <u>תחום עליה</u>: $x > 2.5$ <u>תחום ירידה</u>: $x < 2.5$.
ג. $(0,628)$.
ד. שרטוט:



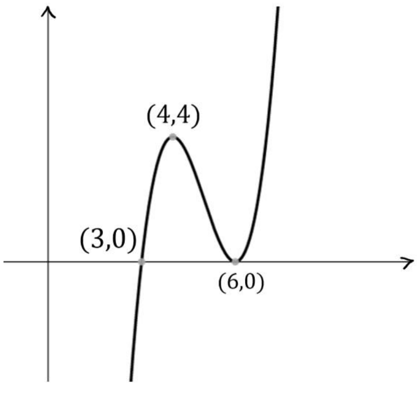
ה. $k < 3$.

5. **<u>תשובות</u>**:
א. $(4,1)$ נקודת מינימום, $(2,2)$ נקודת מקסימום, $(0,1)$ נקודת מינימום.
ב. <u>תחום עליה</u>: $x > 4$ **או** $0 < x < 2$. <u>תחום ירידה</u>: $x < 0$ **או** $2 < x < 4$.
ג. $(0,1)$.
ד. שרטוט:

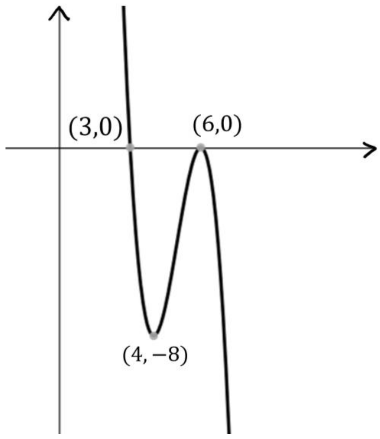


ה. $a = 1$ או $a = 2$.

6. **<u>תשובות</u>**:
א. $a = -3$
ב. $(6,0)$ נקודת מינימום, $(4,4)$ נקודת מקסימום.
ג. <u>תחום עליה</u>: $x < 4$ **או** $x > 6$. <u>תחום ירידה</u>: $4 < x < 6$.
ד. $(3,0), (6,0), (0,-108)$.
ה. שרטוט (נק' החיתוך עם ציר ה-y אינה מופיעה בשרטוט) :



ו. שרטוט(נק' החיתוך עם ציר ה-y אינה מופיעה בשרטוט):



7. **<u>תשובות</u>**:

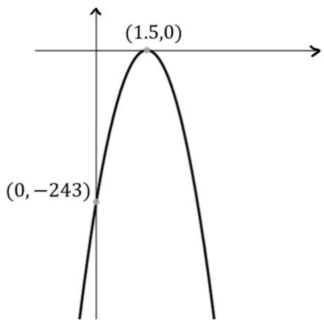
א. $a = -3$, $b = 3$.

ב. $(1.5,0)$ נקודת מקסימום.

ג. <u>תחום ירידה</u>: $x > 1.5$. <u>תחום עליה</u>: $x < 1.5$.

ד. $(1.5,0),(0,-243)$.

ה. שרטוט:



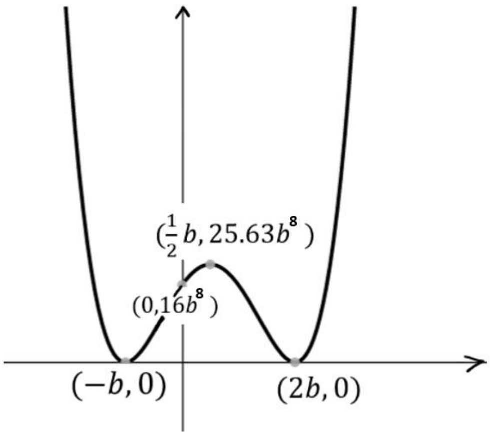
8. **<u>תשובות</u>**:

א. $(2b,0)$ נקודת מינימום, $(\frac{1}{2}b, 25.63b^8)$ נקודת מקסימום, $(-b,0)$ נקודת מינימום.

ב. <u>תחום עליה</u>: $x > 2b$ **או** $-b < x < \frac{1}{2}b$. <u>תחום ירידה</u>: $x < -b$ **או** $\frac{1}{2}b < x < 2b$.

ג. $(2b,0)$, $(-b,0)$, $(0,16b^8)$.

ד. שרטוט:



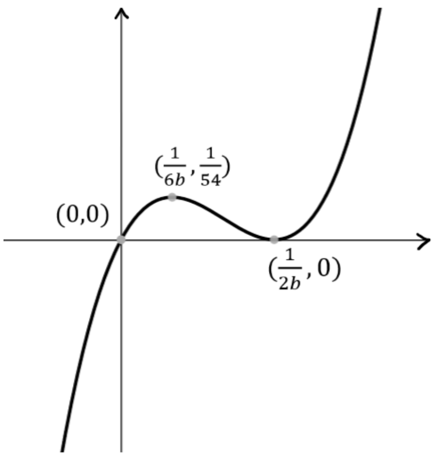
9. **<u>תשובות</u>**:

א. $(\frac{1}{2b},0)$ נקודת מינימום, $(\frac{1}{6b},\frac{1}{54})$ נקודת מקסימום.

ב. <u>תחום עליה</u>: $x > \frac{1}{2b}$ **או** $x < \frac{1}{6b}$. <u>תחום ירידה</u>: $\frac{1}{6b} < x < \frac{1}{2b}$.

ג. $(0,0)$, $(\frac{1}{2b},0)$.

ד. שרטוט:



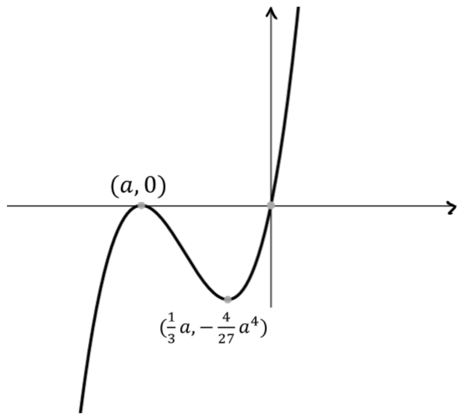
10. **<u>תשובות</u>**:

א. $(\frac{1}{3}a,-\frac{4}{27}a^4)$ נקודת מינימום, $(a,0)$ נקודת מקסימום.

ב. <u>תחום עליה</u>: $x < a$ **או** $x > \frac{1}{3}a$. <u>תחום ירידה</u>: $a < x < \frac{1}{3}a$.

ג. $(0,0),(a,0)$.

ד.   שרטוט:



הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת

גרף הנגזרת מתאר את שיפועי הפונקציה. אם הנקודה (a,b) נמצאת על גרף הנגזרת המשמעות היא שכאשר $x=a$ שיפוע המשיק לגרף הפונקציה הוא b.

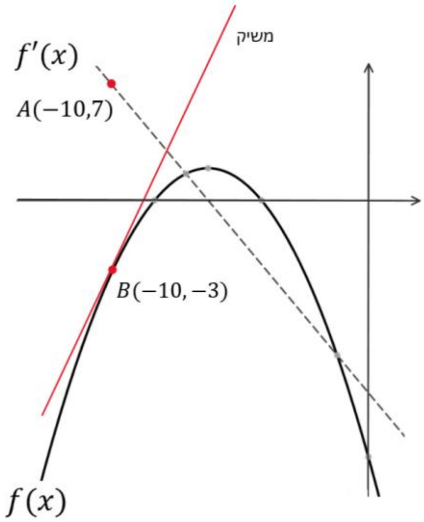
<u>סיכום הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת בפונקציה גזירה:</u>

- בתחום בו הנגזרת חיובית הפונקציה עולה
- בתחום בו הנגזרת שלילית הפונקציה יורדת
- אם $x=a$ מאפס את הנגזרת אז ב-$x=a$ יכולה להיות נקודת מינימום,מקסימום או פיתול.

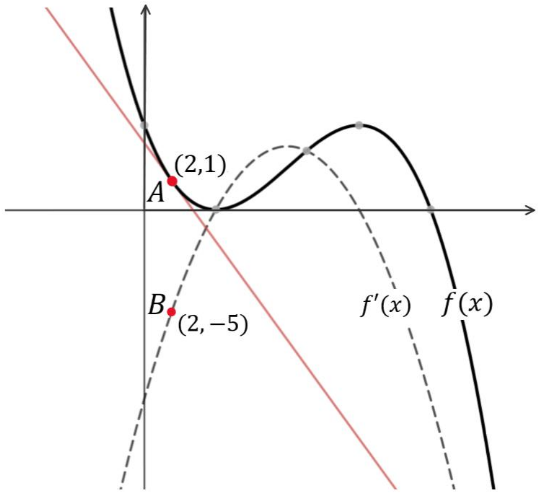
- בתחום בו הפונקציה עולה הנגזרת חיובית (או אפס -ראה דוגמה תרגיל 11)
- בתחום בו הפונקציה יורדת הנגזרת שלילית (או אפס - ראה דוגמה תרגיל 11)
- בנקודות בהן שיפוע הפונקציה הוא אפס -גרף הנגזרת מתאפס.

שאלות

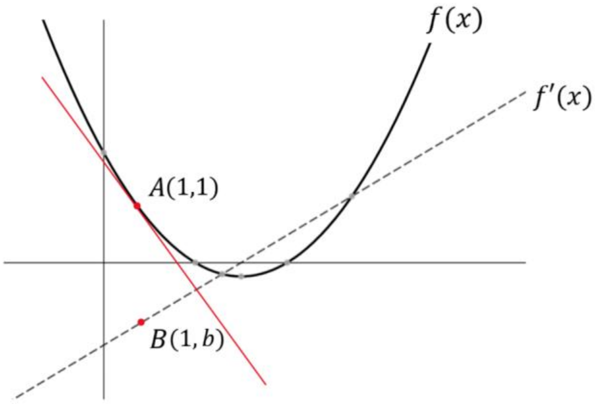
1. בציור שלפניכם מתוארים שני גרפים: הגרף <u>המקווקו</u> מתאר את גרף הנגזרת $f'(x)$ והגרף המצויר <u>בקו מלא</u> מתאר את הפונקציה $f(x)$. בנוסף מתואר בשרטוט המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה $B(-10,-3)$. הנקודה $A(-10,7)$ נמצאת על גרף הנגזרת. מצא את משוואת המשיק לגרף <u>הפונקציה</u> בנקודה B.



2. בציור שלפניכם מתוארים שני גרפים: הגרף <u>המקווקו</u> מתאר את גרף הנגזרת $f'(x)$ והגרף המצויר <u>בקו מלא</u> מתאר את הפונקציה $f(x)$. בנוסף מתואר בשרטוט המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(2,1)$. הנקודה $B(2,-5)$ נמצאת על גרף הנגזרת.
מצא את משוואת המשיק לגרף <u>הפונקציה</u> בנקודה A.



3. בציור שלפניכם מתוארים שני גרפים: הגרף <u>המקווקו</u> מתאר את גרף הנגזרת $f'(x)$ והגרף המצויר <u>בקו מלא</u> מתאר את הפונקציה $f(x)$. בנוסף מתואר בשרטוט המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A אשר משוואתו היא $y=-3x+4$ הנקודה $B(1,b)$ נמצאת על גרף הנגזרת.
מצא את b (שיעור ה-y של נקודה B).



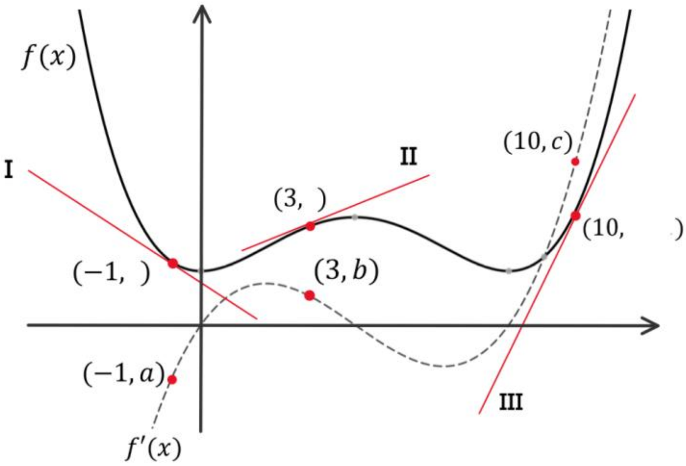
4. בציור שלפניכם מתוארים שני גרפים: הגרף המקווקו מתאר את גרף הנגזרת $f'(x)$ והגרף המצויר בקו מלא מתאר את הפונקציה $f(x)$. בנוסף מתוארים בשרטוט שלושה קווים ישרים (1, 2 ו-3) המשיקים לפונקציה $f(x)$ בנקודות $(-1,\ )$, $(3,\ )$ ו-$(10,\ )$. משוואות המשיקים הן:

$1:\ y = -2.5x + 1.5$

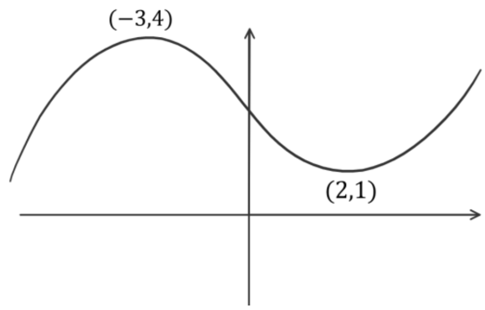
$2:\quad y = 1.5x + 1.5$

$3:\quad y = 8x - 56$

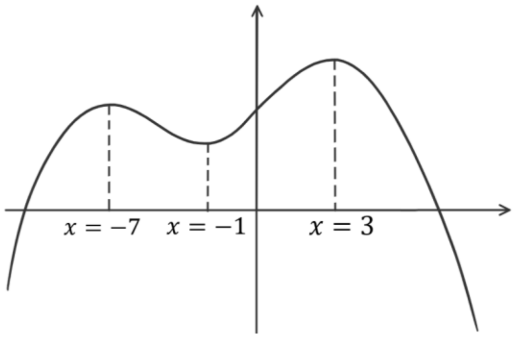
מצא את a,b ו-c (שיעורי ה-y של הנקודות הנמצאות על גרף **<u>הנגזרת</u>** כמתואר בשרטוט).



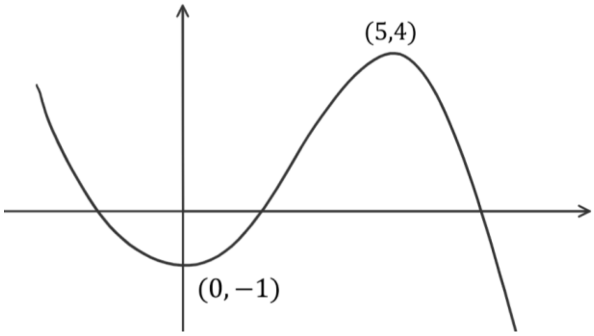
5. לפניך גרף הפונקציה $f(x)$ אשר לה 2 נקודות קיצון בלבד: לפונקציה יש נקודת מקסימום עבור $x = -3$ ונקודת מינימום עבור $x = 2$ (ראה ציור). שרטט סקיצה של גרף הנגזרת. (הפונקציה $f(x)$ רציפה וגזירה לכל x)



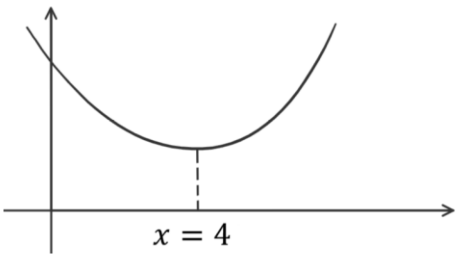
6. לפניך גרף הפונקציה $f(x)$ אשר לה 3 נקודות קיצון בלבד: לפונקציה יש נקודת מקסימום עבור $x = -7$, נקודת מינימום עבור $x = -1$ ונקודת מקסימום עבור $x = 3$ (ראה ציור). שרטט סקיצה של גרף הנגזרת. (הפונקציה $f(x)$ רציפה וגזירה לכל x)



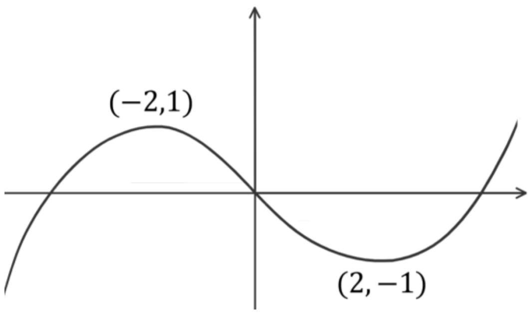
7. לפניך גרף הפונקציה $f(x)$ אשר לה 2 נקודות קיצון בלבד: לפונקציה יש נקודת מינימום על ציר ה-y ונקודת מקסימום עבור $x = 5$ (ראה ציור). שרטט סקיצה של גרף הנגזרת. (הפונקציה $f(x)$ רציפה וגזירה לכל x)



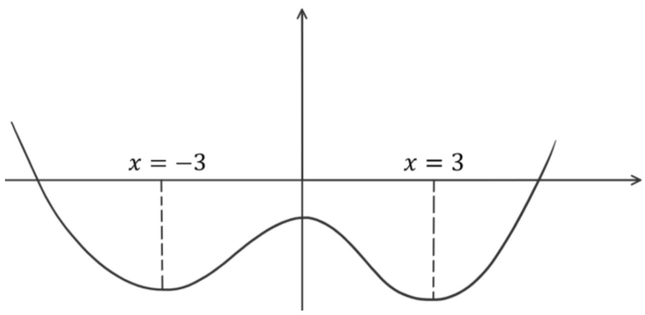
8. לפניך גרף הפונקציה $f(x)$ אשר לה נקודת קיצון אחת בלבד: נקודת מינימום עבור $x = 4$ (ראה ציור). שרטט סקיצה של גרף הנגזרת. (הפונקציה $f(x)$ רציפה וגזירה לכל x)



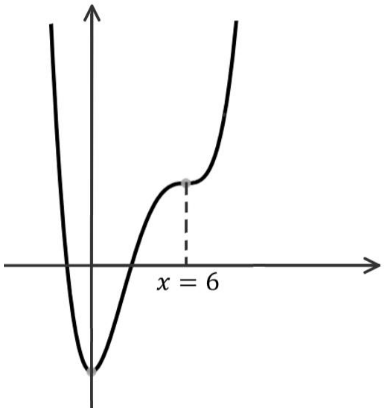
9. לפניך גרף הפונקציה $f(x)$ אשר לה 2 נקודות קיצון בלבד: לפונקציה יש נקודת מקסימום עבור $x = -2$ ונקודת מינימום עבור $x = 2$ (ראה ציור). שרטט סקיצה של גרף הנגזרת. (הפונקציה $f(x)$ רציפה וגזירה לכל x)



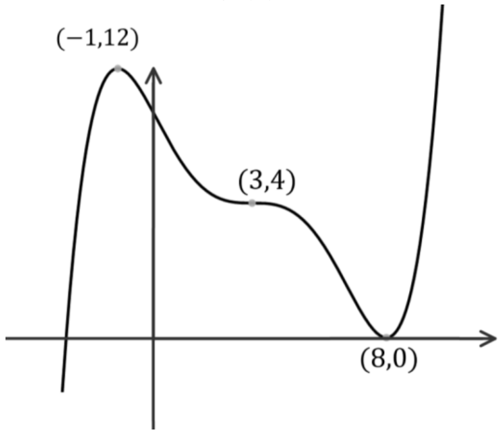
10. לפניך גרף הפונקציה $f(x)$ אשר לה 3 נקודות קיצון בלבד: לפונקציה יש נקודת מקסימום עבור $x = 0$ נקודת מינימום עבור $x = -3$ ונקודת מינימום עבור $x = 3$ (ראה ציור). שרטט סקיצה של גרף הנגזרת. (הפונקציה $f(x)$ רציפה וגזירה לכל x)



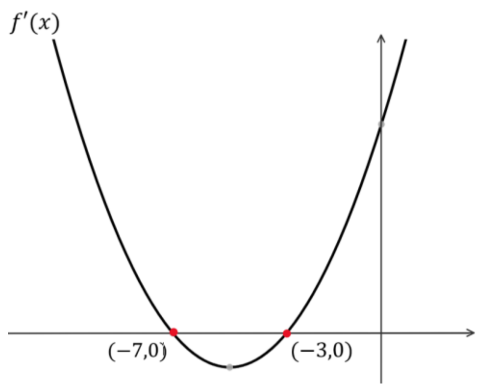
11. לפניך גרף הפונקציה $f(x)$. לפונקציה יש 2 ערכי x המאפסים את הנגזרת: $x = 6$ ו-$x = 0$ אך רק נקודת קיצון אחת: נקודת מינימום הנמצאת על ציר ה-y (ראה ציור). שרטט סקיצה של גרף הנגזרת. (הפונקציה $f(x)$ רציפה וגזירה לכל x)



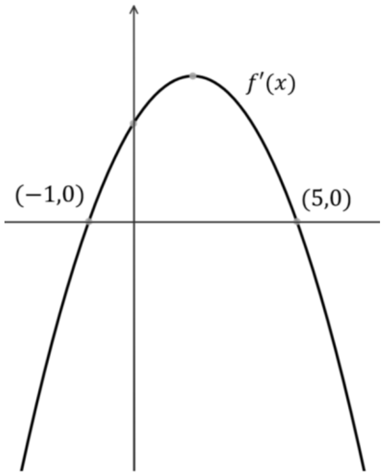
12. לפניך גרף הפונקציה $f(x)$. לפונקציה יש 3 ערכי x המאפסים את הנגזרת: $x = -1$ $x = 3$ ו-$x = 8$ אך רק 2 נקודות קיצון כמתואר בשרטוט (ראה ציור). שרטט סקיצה של גרף הנגזרת. (הפונקציה $f(x)$ רציפה וגזירה לכל x).



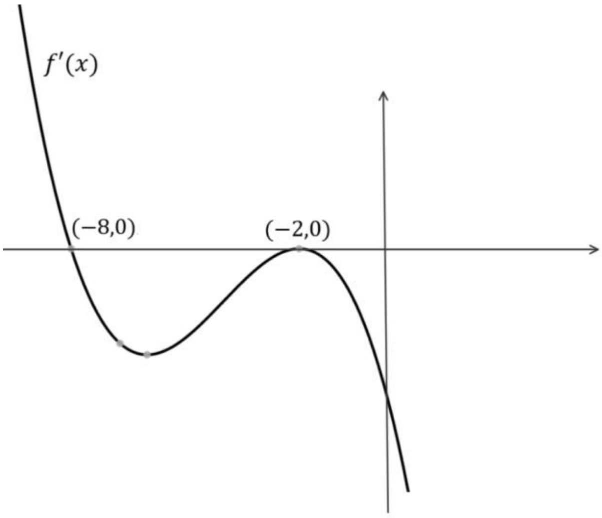
13. לפניך גרף הנגזרת $f'(x)$ המוגדרת לכל x. הנגזרת מתאפסת עבור שני ערכי x בלבד $x = -7$ ו- $x = -3$. תחומי החיוביות והשליליות של גרף הנגזרת מתוארים בשרטוט. שרטט שרטוט אפשרי של גרף הפונקציה אם ידוע שהוא עובר בראשית הצירים ו $f(-7) < 0$



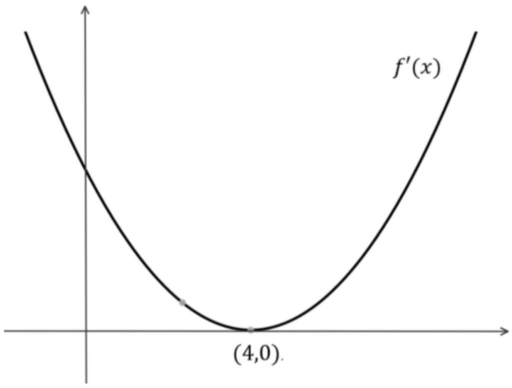
14. לפניך גרף הנגזרת $f'(x)$ המוגדרת לכל x. הנגזרת מתאפסת עבור שני ערכי x בלבד $x = 5$ ו- $x = -1$. תחומי החיוביות והשליליות של גרף הנגזרת מתוארים בשרטוט.
שרטט שרטוט אפשרי של גרף הפונקציה אם ידוע ש $f(0) = -3$, $f(5) > 0$.



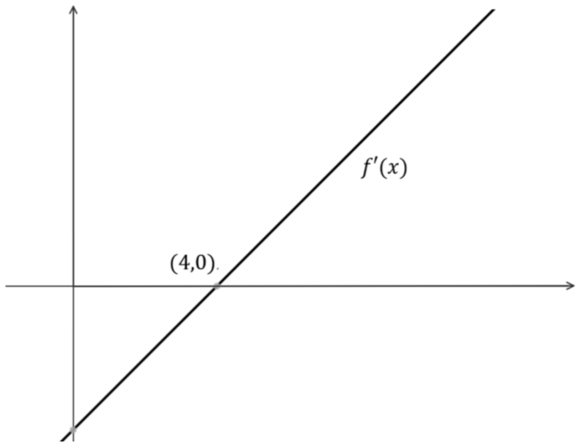
15. לפניך גרף הנגזרת $f'(x)$ המוגדרת לכל x. הנגזרת מתאפסת עבור שני ערכי x בלבד $x = -2$ ו- $x = -8$. תחומי החיוביות והשליליות של גרף הנגזרת מתוארים בשרטוט.
שרטט שרטוט אפשרי של גרף הפונקציה אם ידוע ש $f(-8) = 0$.



16. לפניך גרף הנגזרת $f'(x)$ המוגדרת לכל x. הנגזרת מתאפסת עבור $x = 4$ בלבד. תחומי החיוביות והשליליות של גרף הנגזרת מתוארים בשרטוט.
שרטט שרטוט אפשרי של גרף הפונקציה אם ידוע ש $f(4) < 0$.

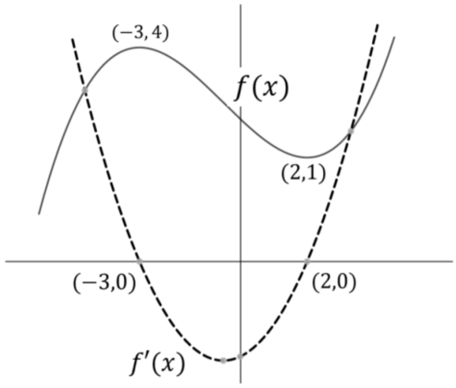


17. לפניך גרף הנגזרת $f'(x)$ המוגדרת לכל x. הנגזרת מתאפסת עבור $x = 4$ בלבד. תחומי החיוביות והשליליות של גרף הנגזרת מתוארים בשרטוט.
שרטט שרטוט אפשרי של גרף הפונקציה אם ידוע שגרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.

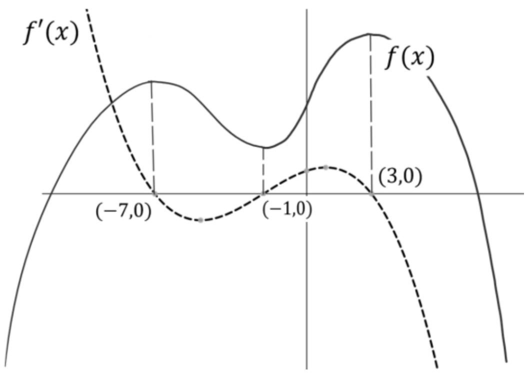


תשובות

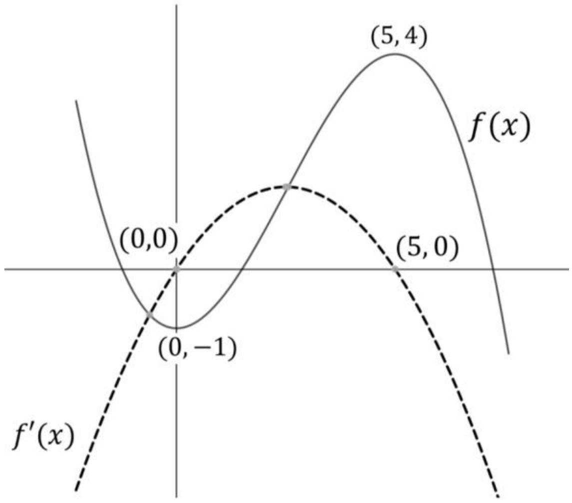
1. $y = 7x + 67$
2. $y = -5x + 11$
3. $b = -3$
4. $a = -2.5$, $b = 1.5$, $c = 8$.
5. גרף הנגזרת הוא הגרף המקווקו:



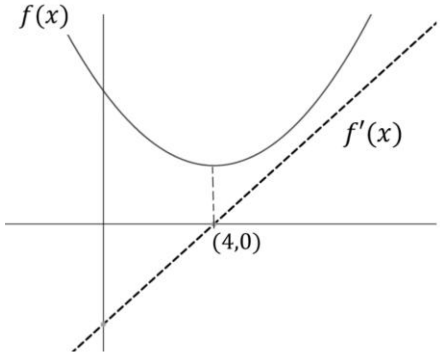
6. גרף הנגזרת הוא הגרף המקווקו:



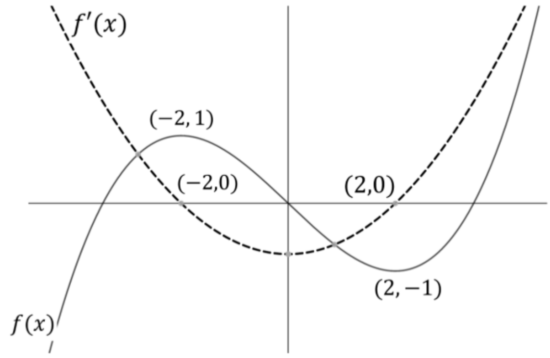
7. גרף הנגזרת הוא הגרף המקווקו:



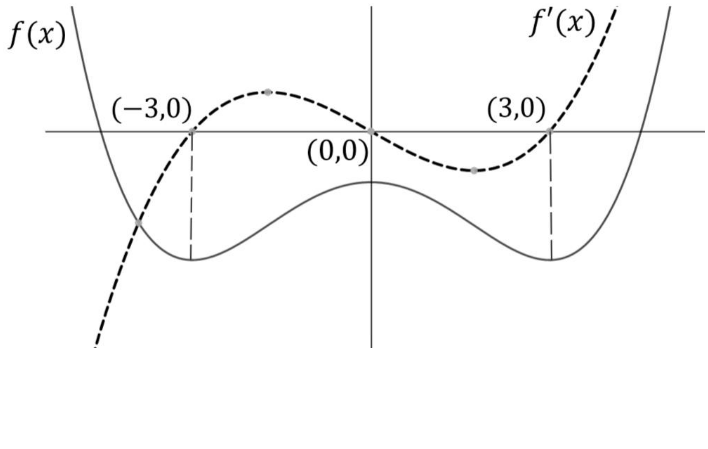
8. גרף הנגזרת הוא הגרף המקווקו:



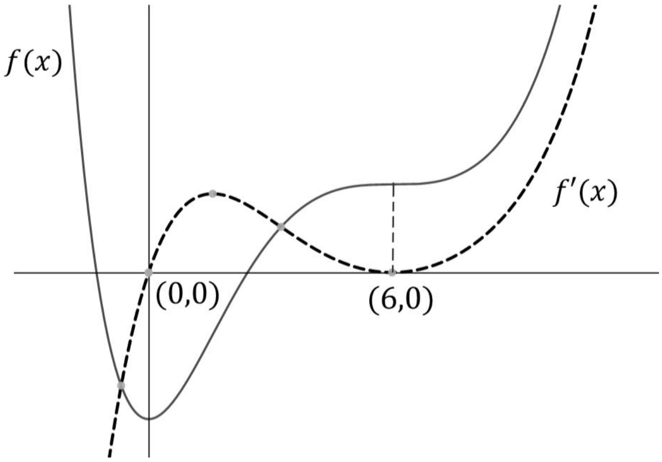
9. גרף הנגזרת הוא הגרף המקווקו:



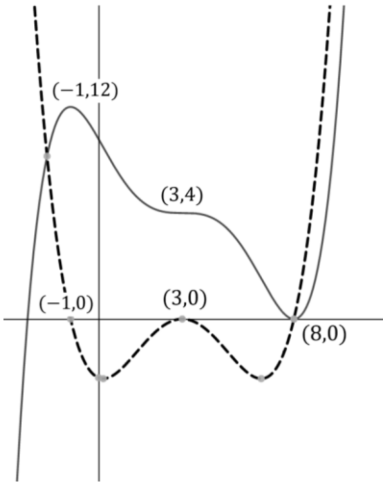
10. גרף הנגזרת הוא הגרף המקווקו:



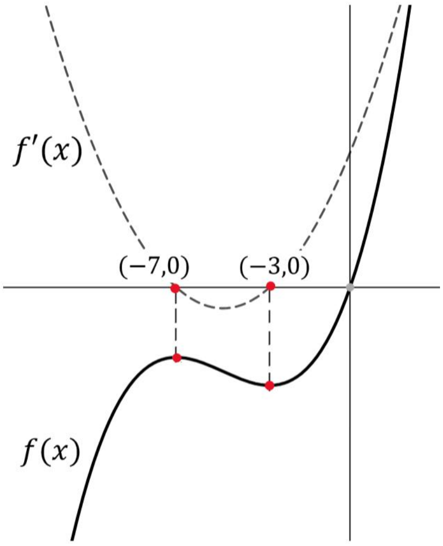
11. גרף הנגזרת הוא הגרף המקווקו:



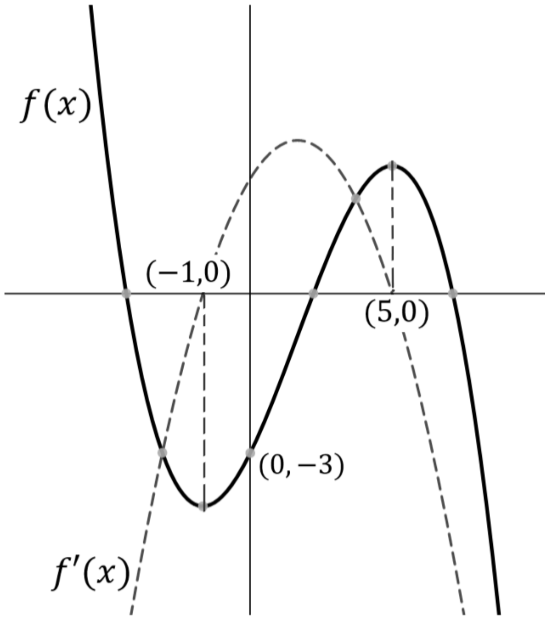
12. גרף הנגזרת הוא הגרף המקווקו:



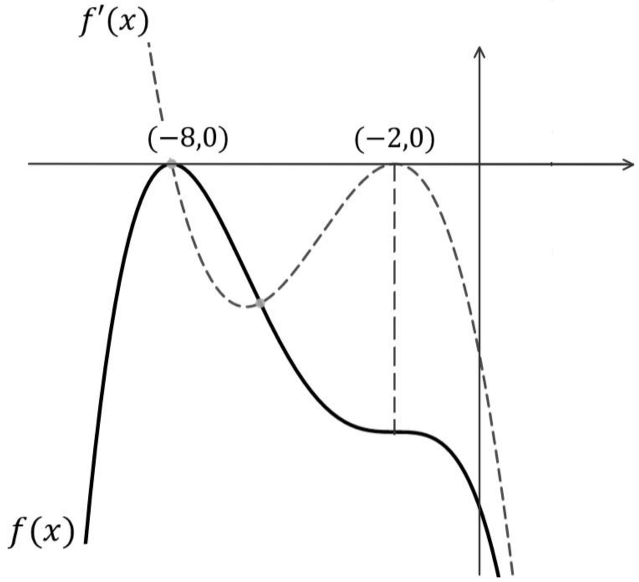
13. גרף הפונקציה מסומן בקו <u>הרציף</u> (גרף הנגזרת מסומן בקו המקווקו).



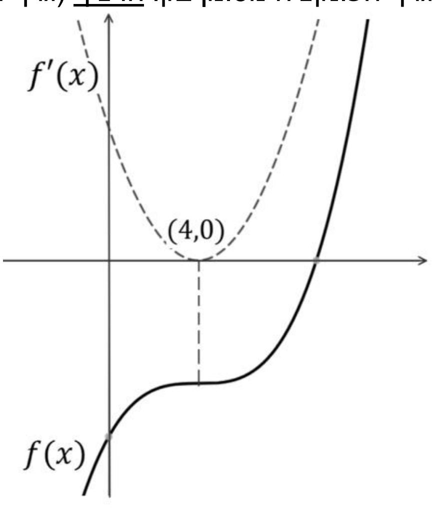
14. גרף הפונקציה מסומן בקו <u>הרציף</u> (גרף הנגזרת מסומן בקו המקווקו).



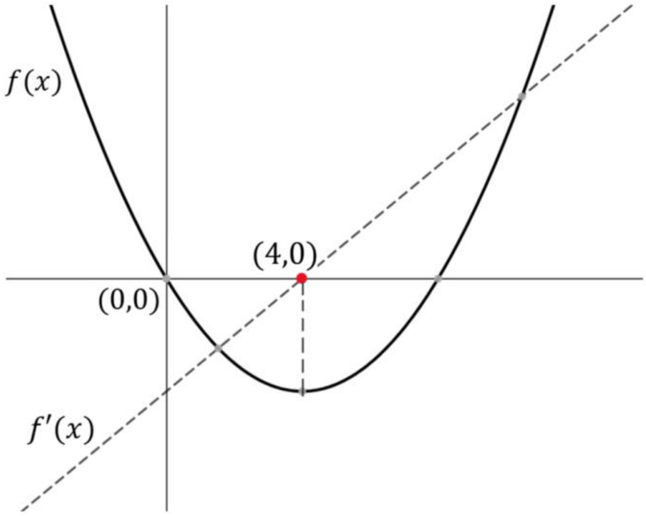
15. גרף הפונקציה מסומן בקו <u>הרציף</u> (גרף הנגזרת מסומן בקו המקווקו).



16. גרף הפונקציה מסומן בקו <u>הרציף</u> (גרף הנגזרת מסומן בקו המקווקו).



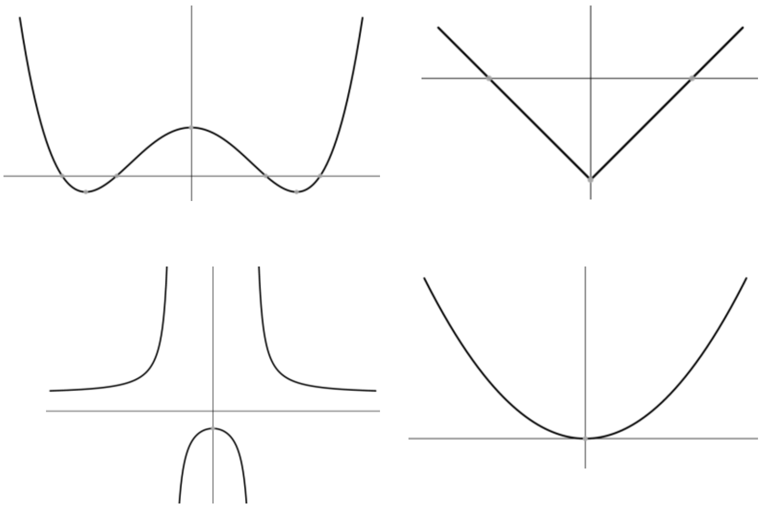
17. גרף הפונקציה מסומן בקו <u>הרציף</u> (גרף הנגזרת מסומן בקו המקווקו).



פונקציה זוגית ופונקציה אי זוגית

פונקציה זוגית

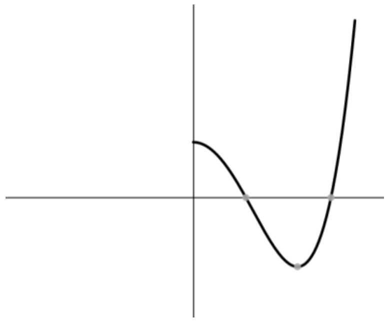
פונקציה זוגית היא פונקציה סימטרית סביב ציר ה-y כמתואר בשרטוטים הבאים:



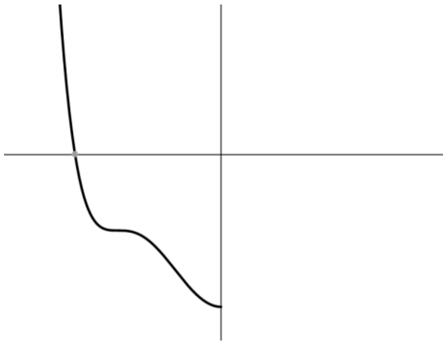
<u>הגדרה</u>: פונקציה זוגית היא פונקציה המקיימת עבור כל x בתחום הגדרתה $f(-x)=f(x)$. כלומר ערכה של הפונקציה **זהה** עבור ערכי x **נגדיים**.

שאלות

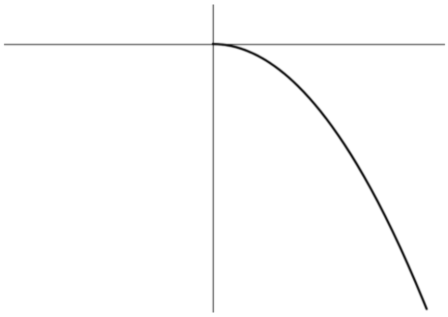
1. נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$ המוגדרת לכל x הוכח שהפונקציה זוגית והשלם את השרטוט.



2. נתונה הפונקציה $f(x) = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 2$ המוגדרת לכל x הוכח שהפונקציה זוגית והשלם את השרטוט.

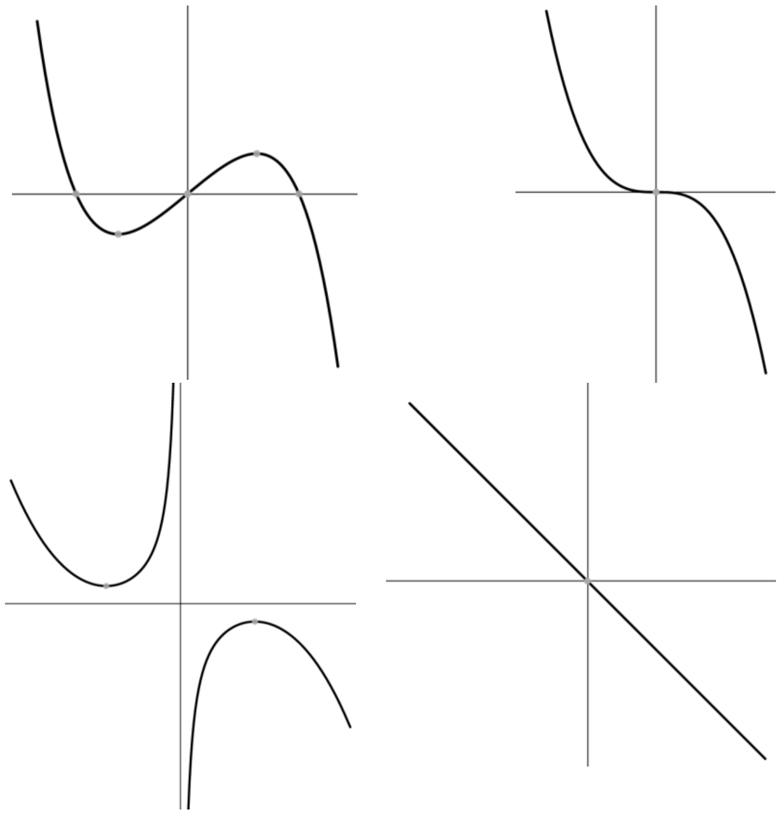


3. נתונה הפונקציה $f(x) = -3x^2$ המוגדרת לכל x הוכח שהפונקציה זוגית והשלם את השרטוט.



פונקציה אי-זוגית

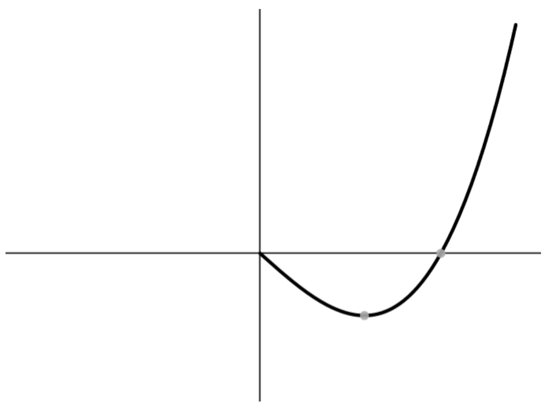
פונקציה   אי-זוגית היא פונקציה **סימטרית סביב ראשית הצירים**



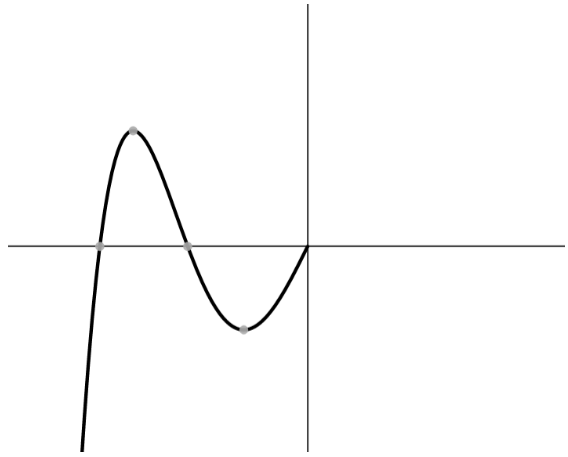
<u>הגדרה</u>: פונקציה אי-זוגית היא פונקציה המקיימת עבור כל x בתחום הגדרתה $f(-x) = -f(x)$.
כלומר ערכיה של הפונקציה **נגדיים** עבור ערכי x **נגדיים**.

שאלות

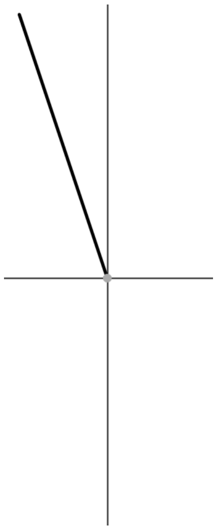
1. נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 2x$ המוגדרת לכל x הוכח שהפונקציה אי-זוגית והשלם את השרטוט.



2. נתונה הפונקציה $f(x) = x^5 - 4x^3 + 3x$ המוגדרת לכל x הוכח שהפונקציה אי-זוגית והשלם את השרטוט.



3. נתונה הפונקציה $f(x) = -3x$ המוגדרת לכל x הוכח שהפונקציה אי-זוגית והשלם את השרטוט.



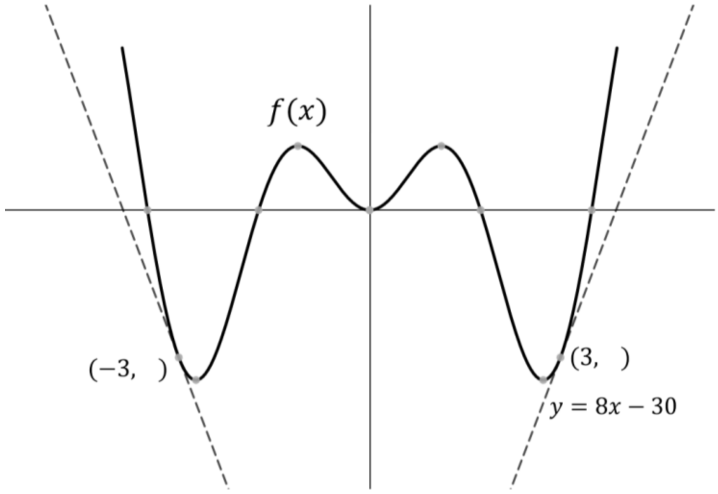
תכונת הנגזרת של פונקציה זוגית

"הנגזרת של פונקציה זוגית היא פונקציה אי זוגית."

כלומר אם $f(x)$ היא פונקציה זוגית אז $f'(x)$ היא פונקציה אי-זוגית.

<u>שאלה</u>

נתונה הפונקציה הזוגית $f(x)$ המתוארת בשרטוט. מצא את משוואת המשיק לפונקציה בנקודה בה $x=-3$ אם ידוע שמשוואת המשיק בנקודה בה $x=3$ היא $y=8x-30$.



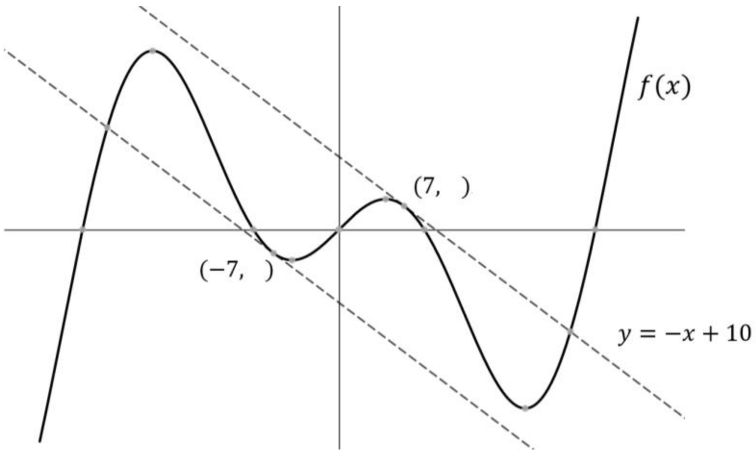
תכונת הנגזרת של פונקציה אי-זוגית

"הנגזרת של פונקציה אי-זוגית היא פונקציה זוגית."

כלומר אם $f(x)$ היא פונקציה אי-זוגית אז $f'(x)$ היא פונקציה זוגית.

<u>שאלה</u>

נתונה הפונקציה האי-זוגית $f(x)$ המתוארת בשרטוט. מצא את משוואת המשיק לפונקציה בנקודה בה $x=-7$ אם ידוע שמשוואת המשיק בנקודה בה $x=7$ היא $y=-x+10$.



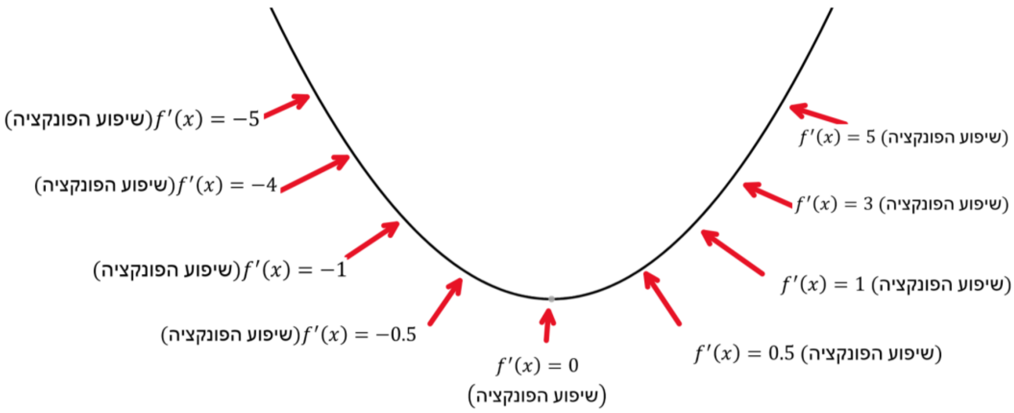
נקודות פיתול, תחומי קעירות כלפי מעלה וקעירות כלפי מטה

(ראה סרטון הסברים ותיאוריה)

<u>קעירות כלפי מעלה</u>

פונקציה (גזירה) קעורה כלפי מעלה בתחום נתון אם באותו התחום שיפועי הפונקציה גדלים (הנגזרת עולה). כלומר אם מתקיים: $f''(x) > 0$.

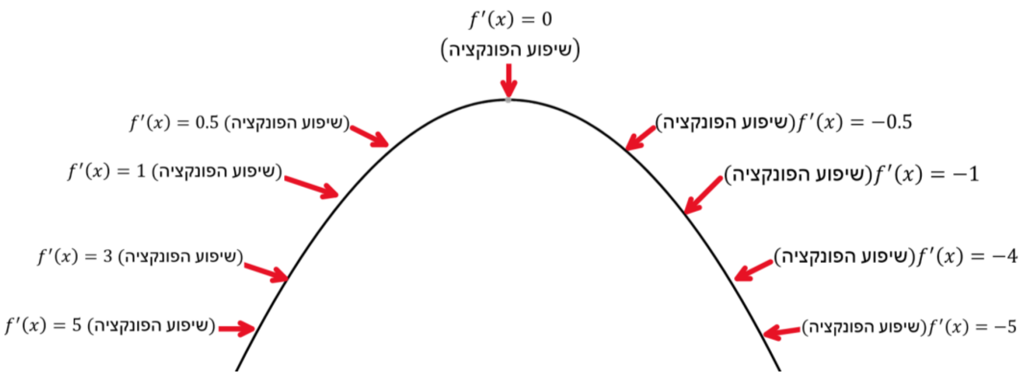
בתמונה הבאה כל מקטע שתבחרו להתבונן בו הוא קעור כלפי מעלה שכן ערכי הנגזרת גדלים.



<u>קעירות כלפי מטה</u>

פונקציה (גזירה) קעורה כלפי מטה בתחום נתון אם באותו התחום שיפועי הפונקציה קטנים (הנגזרת יורדת). כלומר אם מתקיים: $f''(x) < 0$.

בתמונה הבאה כל מקטע שתבחרו להתבונן בו הוא קעור מטה מעלה שכן ערכי הנגזרת קטנים.



<u>נקודת פיתול</u>

נקודת פיתול היא נקודה שבה פונקציה רציפה מחליפה את הקעירות שלה מקעירות כלפי מעלה לקעירות כלפי מטה (או הפוך). היא הנקודה שבה הנגזרת השנייה משנה את סימנה.

<u>מציאת נקודות פיתול (אם תחום ההגדרה הוא כל x)</u>

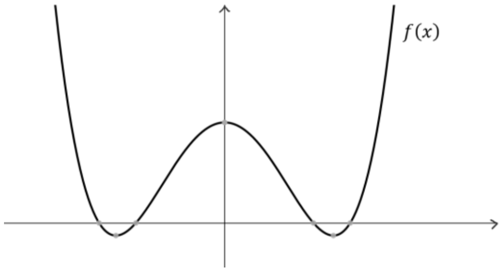
1. משווים את $f''(x)$ לאפס ומוצאים את ערכי ה- x המאפסים אותה.

2. מוודאים באמצעות טבלה ש-$f''(x)$ מחליפה סימן בערכי ה- x שמצאנו בסעיף 1

3. מוצאים את שיעורי ה-y של הנקודות מסעיף 2 אשר בהן $f''(x)$ החליפה סימן.
   אלה נקודות הפיתול.

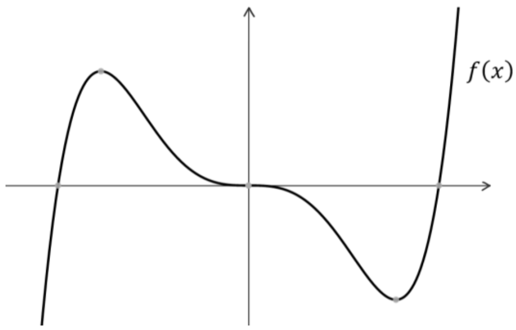
שאלות

1. נתונה הפונקציה נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8$ המתוארת בשרטוט.
מצא את נקודות הפיתול של הפונקציה.



2. נתונה הפונקציה נתונה הפונקציה $f(x) = -(x-2)^4 + 4(x-2)^3 + 2$
   א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
   ב. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
   ג. מצא את נקודות הפיתול של הפונקציה ואת תחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה.
   ד. שרטט את הפונקציה וסמן בציור את נקודות הקיצון והפיתול.
   (אין צורך להתייחס לנקודות החיתוך עם הצירים בשרטוט ואין צורך לשרטט אותן במקומן הנכון).

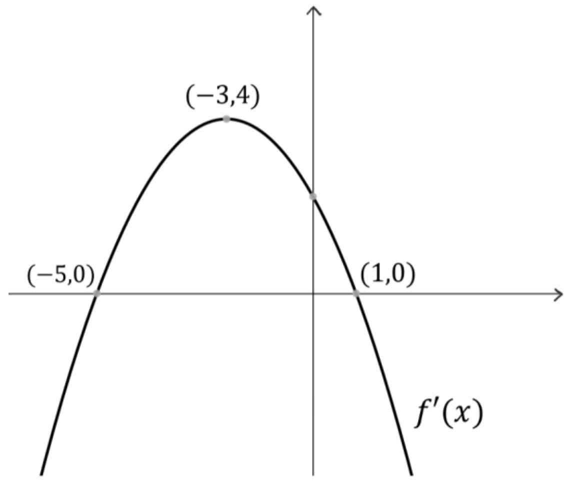
3. נתונה הפונקציה נתונה הפונקציה $f(x) = x^5 - 13\frac{1}{3}x^3$ המתוארת בשרטוט.
מצא את נקודות הפיתול של הפונקציה.



4. נתונה הפונקציה נתונה הפונקציה $f(x) = -x^3$.
   א. מצא את נקודות החיתוך עם הצירים.
   ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה (אם יש כאלה).
   ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).
   ד. מצא את נקודות הפיתול של הפונקציה .
   ה. מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה של הפונקציה.
   ו. שרטט את הפונקציה וסמן בציור את נקודות הקיצון והפיתול (אם יש כאלה).

5. נתונה הפונקציה נתונה הפונקציה $f(x) = x^4$.
   א. מצא את נקודות החיתוך עם הצירים.
   ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
   ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה .
   ד. מצא את נקודות הפיתול של הפונקציה (אם יש כאלה).
   ה. מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה של הפונקציה (אם יש כאלה).
   ו. שרטט את הפונקציה וסמן בציור את נקודות הקיצון והפיתול (אם יש כאלה).

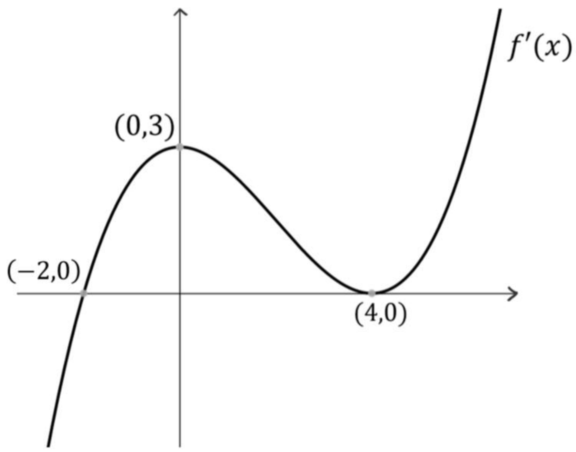
6. בשרטוט הבא נתון גרף הנגזרת של הפונקציה $f(x)$.



א. שרטט, באותה מערכת צירים, את גרף הנגזרת השנייה $f''(x)$.

ב. שרטט, באותה מערכת צירים, את גרף הפונקציה אם ידוע ש: $f(-5) > 0$. סמן בציור את נקודת הפיתול.

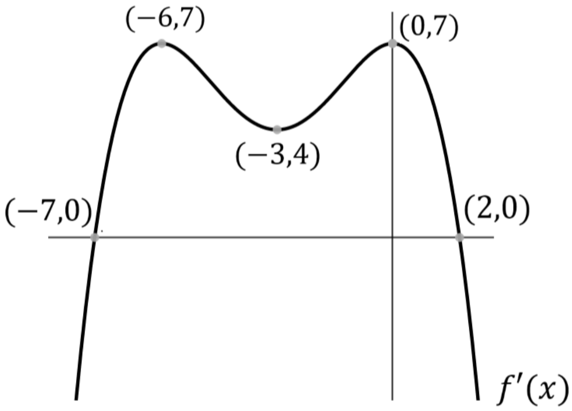
7. בשרטוט הבא נתון גרף הנגזרת של הפונקציה $f(x)$.



א. שרטט, באותה מערכת צירים, את גרף הנגזרת השנייה $f''(x)$.

ב. שרטט, באותה מערכת צירים, את גרף הפונקציה אם ידוע ש: $f(0) = 0$. סמן בציור את נקודות הפיתול.

8. בשרטוט הבא נתון גרף הנגזרת של הפונקציה $f(x)$.

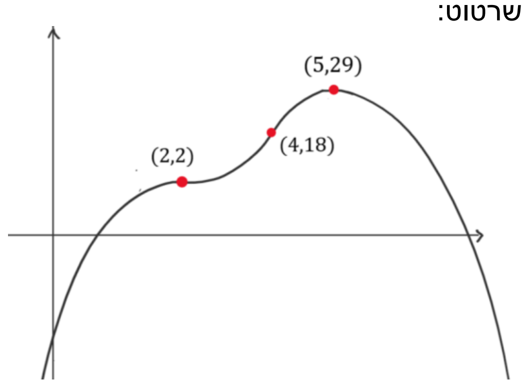


א. שרטט, באותה מערכת צירים, את גרף הנגזרת השנייה $f''(x)$.

ב. שרטט, באותה מערכת צירים, את גרף הפונקציה אם ידוע ש: $f(-7) < 0$ ו- $f(0) = 0$. סמן בציור את נקודות הפיתול.

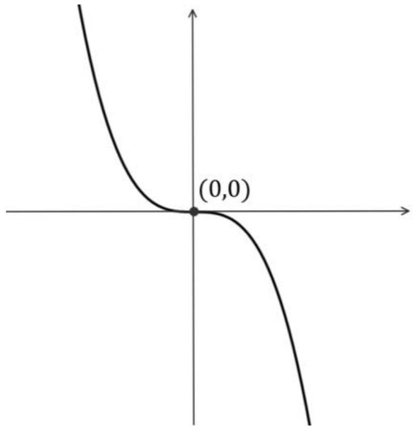
תשובות הנגזרת השנייה

1. $(-1,3), (1,3)$.
2. תשובה:
   א. $(5,29)$ נקודת מקסימום.
   ב. תחום עלייה: $x < 5$, תחום ירידה: $x > 5$.
   ג. $(2,2)$, $(4,18)$.
   תחום קעירות כלפי מעלה: $2 < x < 4$.
   תחום קעירות כלפי מטה: $x > 4$ או $x < 2$.
   ד. שרטוט:



3. $(-2,74\frac{2}{3}), (0,0),(2,-74\frac{2}{3})$.
4. תשובה:
   א. $(0,0)$.
   ב. אין.
   ג. הפונקציה יורדת לכל x, אין תחום ירידה.
   ד. $(0,0)$.
   ה. תחום קעירות כלפי מעלה: $x < 0$.
   תחום קעירות כלפי מטה: $x > 0$.

ו. שרטוט:



5. תשובה:

א. $(0,0)$.

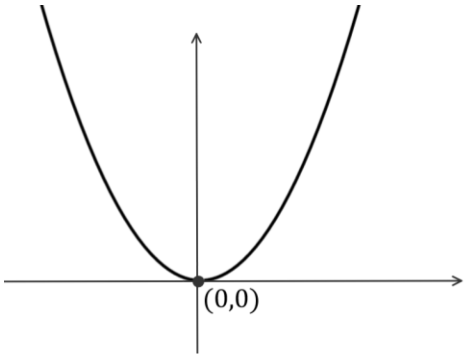
ב. $(0,0)$ נקודת מינימום.

ג. <u>תחום עלייה</u>: $x > 0$, <u>תחום ירידה</u>: $x < 0$.

ד. אין.

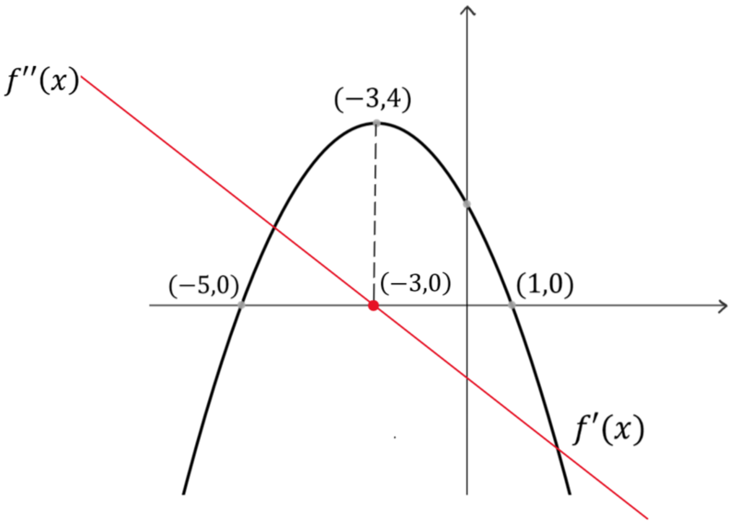
ה. הפונקציה קעורה כלפי מעלה לכל x.

ו. שרטוט:

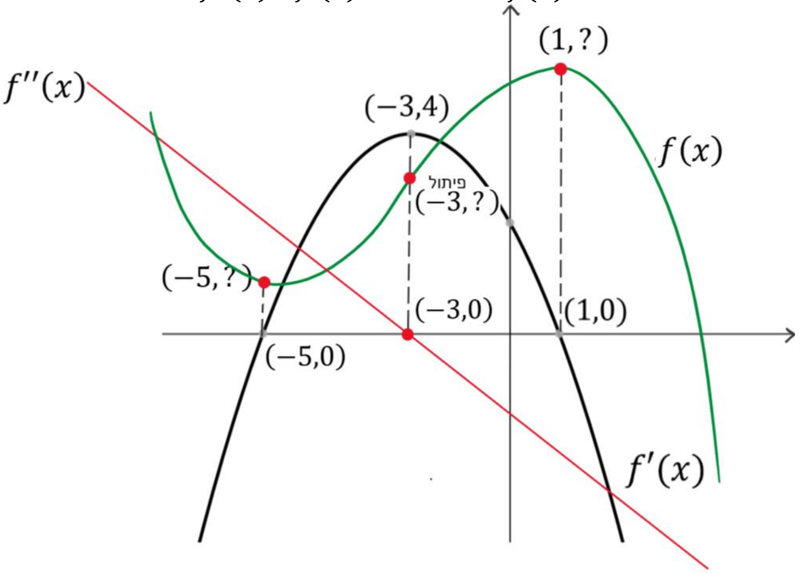


6. תשובה:

א. הוספת השרטוט של $f''(x)$ לשרטוט של $f'(x)$:

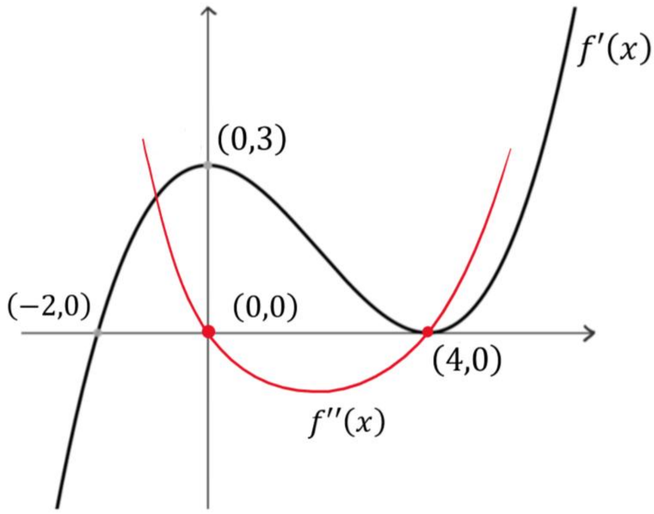


ב. הוספת השרטוט של $f(x)$ לשרטוט של $f'(x)$ ו-$f''(x)$:

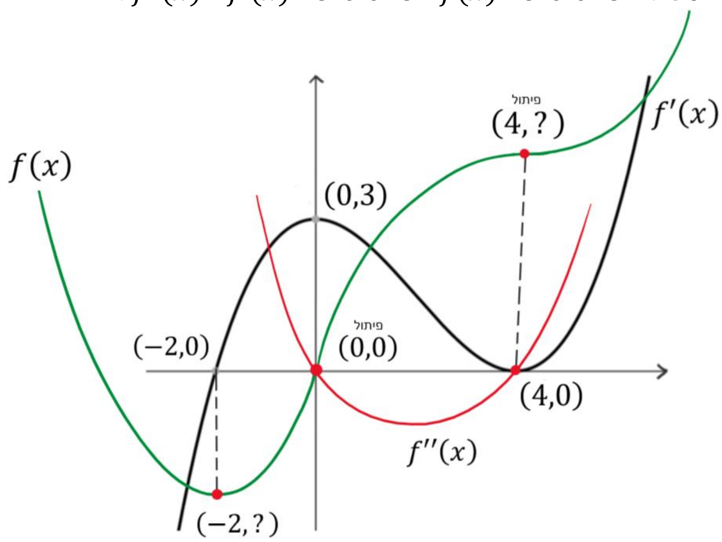


7. תשובה:

א. הוספת השרטוט של $f''(x)$ לשרטוט של $f'(x)$:

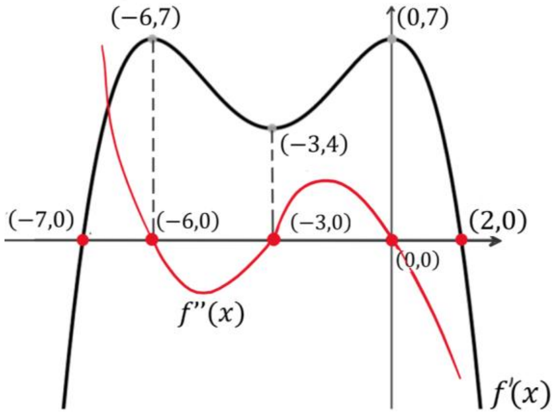


ב. הוספת השרטוט של $f(x)$ לשרטוט של $f'(x)$ ו-$f''(x)$:

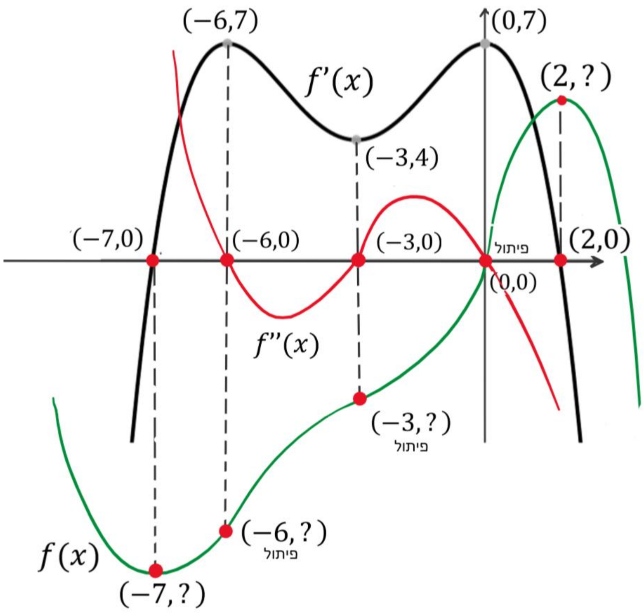


8. תשובה:

א. הוספת השרטוט של $f''(x)$ לשרטוט של $f'(x)$:



ב. הוספת השרטוט של $f(x)$ לשרטוט של $f'(x)$ ו-$f''(x)$:



חקירת פונקציית מנה

הנגזרת	הפונקציה
$f'(x)=n\cdot x^{n-1}$	$f(x)=x^n$
$f'(x)=a$	$f(x)=ax$
$f'(x)=0$	$f(x)=a$
$f'(x)=n(u(x))^{n-1}\cdot u'(x)$	$f(x)=(u(x))^n$
$f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$	$f(x)=u(x)\cdot v(x)$
$f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{(v(x))^2}$	$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$

תרגילי נגזרות

1. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{1-x}{2x+1}$

ב. $f(x)=\frac{1+x^2}{x-3}$

ג. $f(x)=\frac{1}{x}$

ד. $f(x)=-\frac{2}{x^2}$

ה. $f(x)=\frac{x^2+x-1}{2x^2-x+3}$

ו. $f(x)=\frac{(3x+4)^3}{(1+x^2)^2}$

ז. $f(x)=\frac{3x}{4x^2-1}$

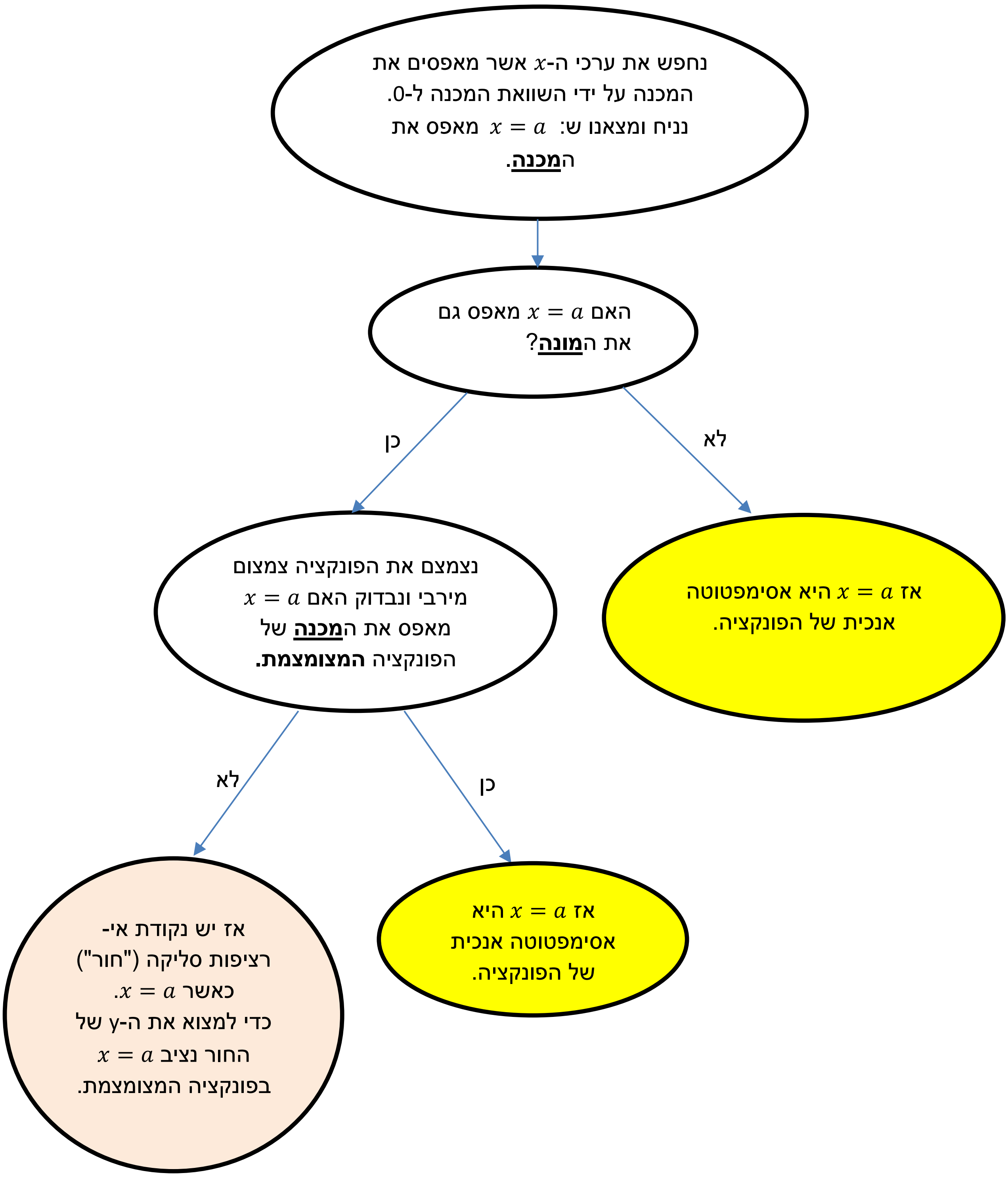
ח. $f(x)=\frac{x^2-c}{x^2-4}$

ט. $f(x)=\frac{(x-2)^2}{x^2-a^2}+\frac{x^2}{4}$

י. $f(x)=ax-\frac{2}{x-2}+\frac{2}{(x-2)^2}-\frac{x}{3}$

אסימפטוטות אנכיות

<u>מציאת אסימפטוטה אנכית:</u>



2. מצא את תחום ההגדרה ואת האסימפטוטות **האנכיות** של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{-6x}{x^2-3x}$

ב. $f(x)=\frac{1+3x}{x+2}$

ג. $f(x)=\frac{x^2+17x+60}{x^2+3x-10}+3$

ד. $f(x)=\frac{1+x^2}{x-3}$

ה. $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$

ו. $f(x)=\frac{1}{x+3}$

ז. $f(x)=\frac{1-x^2}{x^2+1}$

ח. $f(x)=\frac{1-4x^2}{x^2-3x+2}$

ט. $f(x)=\frac{1}{x^2}$

י. $f(x)=\frac{(x-2)(x^2+2)}{x^2-6x+8}$

יא. $f(x)=\frac{1+5x^2}{3x^2-x+2}$

יב. $f(x)=\frac{-8x-8}{x^2-6x-7}$

יג. $f(x)=\frac{x^2-3x-4}{(x^2-8x+16)(x+3)}$

יד. $f(x)=\frac{1}{x-3}+5$

טו. $f(x)=\frac{5x^2+1}{x^2-25}$

טז. $f(x)=\frac{4x^2+5x+1}{-x^2-4}$

יז. $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}$

יח. $f(x)=\frac{x^2}{4x-2x^2}$

יט. $f(x)=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+x+10$

כ. $f(x)=\frac{5x}{x^2+8x+15}-9$

כא. $f(x)=\frac{5x+2x^3-3}{6(x^2+1)}$

כב. $f(x)=\frac{(2x^3-3)^2}{6(x^2+1)^4}+2$

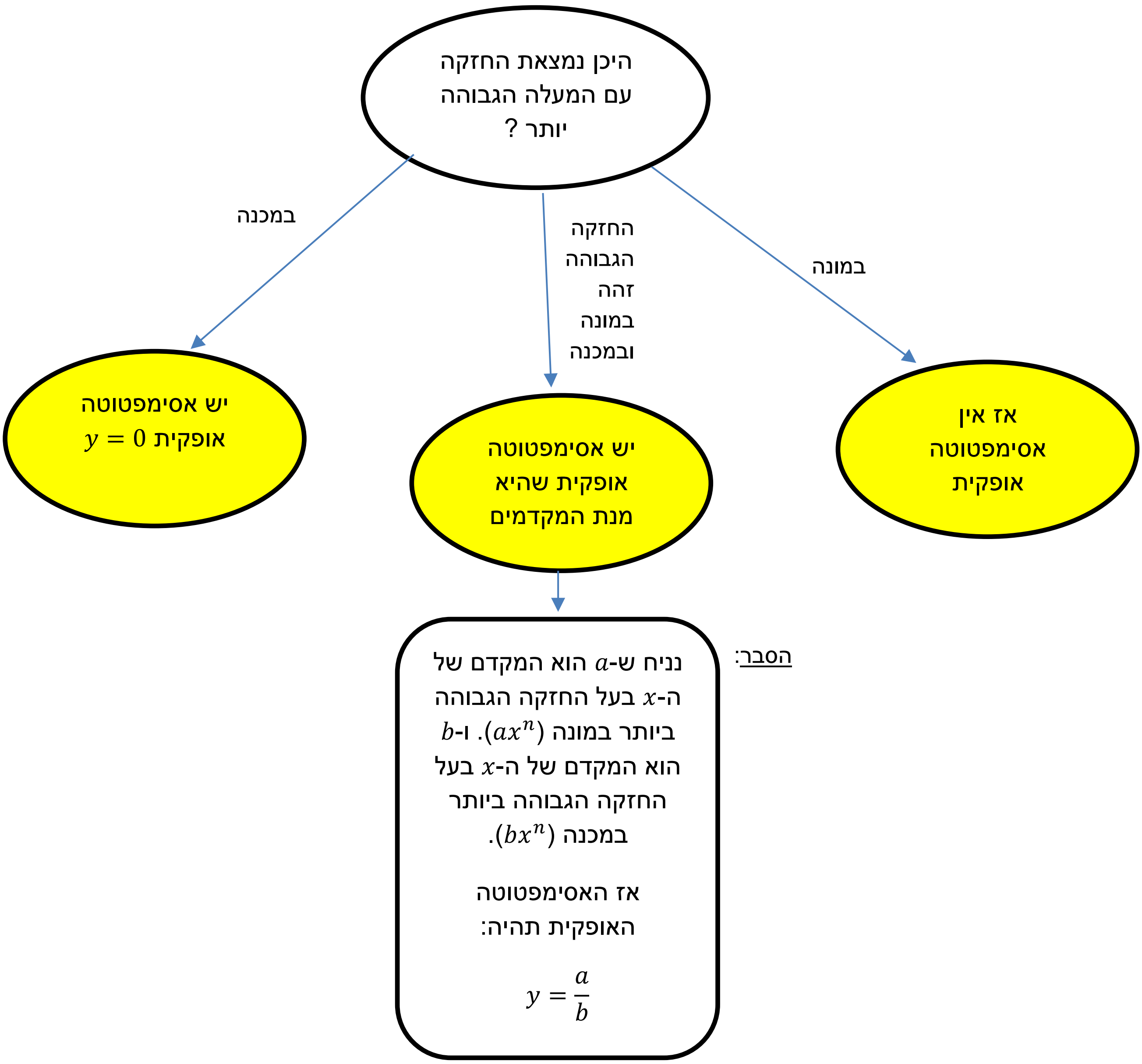
כג. $f(x)=\frac{m+nx}{x-m}$ $(m\neq 0, n\neq -1)$

כד. $f(x)=\frac{x^2-9}{x^2-7x+12}$

כה. $f(x)=\frac{x^2}{x^2-x}$

אסימפטוטות אופקיות

מציאת אסימפטוטה אופקית בפונקצית מנה ללא שורשים



הערות ומקרים מיוחדים נפוצים.

(בכל המקרים הבאים נוכל גם לעשות מכנה משותף ולהשתמש בתרשים זרימה מהדף הקודם.)

- נתונה הפונקציה $f(x)=g(x)+b$. אם לפונקציה $g(x)$ יש אסימפטוטה אופקית $y=a$ אז לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אופקית $y=a+b$.
  - **דוגמה 1**:
    $f(x)=\frac{1-3x^2}{x^2-3x+2}+2$. האסימפטוטה האופקית של הביטוי המודגש היא $y=-3$ ולכן האסימפטוטה של $f(x)$ היא $y=-3+2$ כלומר $y=-1$.
  - **דוגמה 2**:
    $f(x)=\frac{1}{x+5}-4$. האסימפטוטה האופקית של הביטוי המודגש היא $y=0$ ולכן האסימפטוטה של $f(x)$ היא $y=0-4$ כלומר $y=-4$.

- נתונה הפונקציה $f(x)=g(x)+h(x)$. אם לפונקציה $g(x)$ יש אסימפטוטה אופקית $y=a$ ולפונקציה $h(x)$ יש אסימפטוטה אופקית $y=b$, אז לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אופקית $y=a+b$.
  - **דוגמה 1**:
    $f(x)=\frac{1-3x^2}{x^2-3x+2}+\frac{x+1}{x+5}$. האסימפטוטה האופקית של הביטוי הראשון היא $y=-3$ האסימפטוטה האופקית של הביטוי השני היא $y=1$ ולכן האסימפטוטה של $f(x)$ היא $y=-3+1$ כלומר $y=-2$.
  - **דוגמה 2**:
    $f(x)=\frac{1+2x^2}{x^2-3x+2}+\frac{x+1}{x+5}+\frac{1}{x}$. האסימפטוטה האופקית של הביטוי הראשון היא $y=2$ האסימפטוטה האופקית של הביטוי השני היא $y=1$ האסימפטוטה האופקית של הביטוי השלישי היא $y=0$ ולכן האסימפטוטה של $f(x)$ היא: $y=2+1+0$ כלומר $y=3$.
  - **דוגמה 3**:
    $f(x)=\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x}+2$. האסימפטוטה האופקית של הביטוי הראשון היא $y=0$ האסימפטוטה האופקית של הביטוי השני היא $y=0$ ולכן האסימפטוטה של $f(x)$ היא: $y=0+0+2$ כלומר $y=2$.

3. מצא את האסימפטוטות האופקיות של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{-6x}{x^2-3x}$

ב. $f(x)=\frac{1+3x}{x+2}$

ג. $f(x)=\frac{x^2+17x+60}{x^2+3x-10}+3$

ד. $f(x)=\frac{1+x^2}{x-3}$

ה. $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$

ו. $f(x)=\frac{1}{x+3}$

ז. $f(x)=\frac{1-x^2}{x^2+1}$

ח. $f(x)=\frac{1-4x^2}{x^2-3x+2}$

ט. $f(x)=\frac{1}{x^2}$

י. $f(x)=\frac{(x-2)(x^2+2)}{x^2-6x+8}$

יא. $f(x)=\frac{1+5x^2}{3x^2-x+2}$

יב. $f(x)=\frac{-8x-8}{x^2-6x-7}$

יג. $f(x)=\frac{x^2-3x-4}{(x^2-8x+16)(x+3)}$

יד. $f(x)=\frac{1}{x-3}+5$

טו. $f(x)=\frac{5x^2+1}{x^2-25}-2$

טז. $f(x)=\frac{4x^2+5x+1}{-x^2-4}+4$

יז. $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}$

יח. $f(x)=\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}+1$

יט. $f(x)=\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}-x$

כ. $f(x)=\frac{x^2}{4x-2x^2}$

כא. $f(x)=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+x+10$

כב. $f(x)=\frac{(2x^3-3)^2}{6(x^2+1)^4}+2$

כג. $f(x)=\frac{m+nx}{x-m}$ $(m\neq 0, n\neq -1)$

תרגילי חקירת פונקצית מנה

4. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{8x-20}{x^2-4} - 1$
   א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
   ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
   ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
   ד. מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה.
   ה. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
   ו. שרטט את הפונקציה $f(x)$.
   ז. עבור אילו ערכי k אין פתרון למשוואה: $\frac{8x-20}{x^2-4} - 1 = k$.
   ח. נתונה הפונקציה $g(x) = f(x-3) - 3$. מה הן נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$. נמק.

5. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{4}{x^2-1}$
   א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
   ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
   ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
   ד. מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה.
   ה. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (במידה ויש כאלה).
   ו. שרטט את הפונקציה.
   ז. נתונה הפונקציה $g(x) = -f(x)$. מה הן נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$. נמק.

6. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{4-2x}{x-4}$
   א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
   ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
   ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן (במידה ויש כאלה).
   ד. מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה (במידה ויש כאלה).
   ה. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
   ו. שרטט את הפונקציה.
   ז. נתונה הפונקציה $g(x) = |f(x)|$. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ ושרטט אותה.

7. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x} + x + 2$
   א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
   ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים (במידה ויש כאלה).
   ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
   ד. מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה.
   ה. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (במידה ויש כאלה).
   ו. שרטט את הפונקציה $f(x)$.
   ז. עבור אילו ערכי k למשוואה: $\frac{1}{x} + x + 2 = k$ יש פתרון יחיד.
   ח. נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) + a$. מצא את שני ערכי a האפשריים עבורם הפונקציה $g(x)$ משיקה לציר ה-x.

8. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן (במידה ויש כאלה).
ד. מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה (במידה ויש כאלה).
ה. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
ו. שרטט את הפונקציה $f(x)$.
ז. עבור אילו ערכי k הישר: $y=k$ אינו חותך את הפונקציה $f(x)$.
ח. נתונה הפונקציה $g(x)=f(-x)$. שרטט את גרף הפונקציה $g(x)$.

9. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x-1}{x^2}$

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה .
ה. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (במידה ויש כאלה).
ו. שרטט את הפונקציה $f(x)$.
ז. נתונה הפונקציה $g(x)=|f(x)|+1$. שרטט את הפונקציה $g(x)$ ומצא את נקודות הקיצון שלה.

הערה: בסרטונים הבאים יתכן ותדרשו למצוא (בפעם הראשונה) נקודות פיתול בפונקצית מנה. יש לשים לב שכאשר בודקים את סימני הנגזרת השנייה בכל אחד מהתחומים צריך להכניס לטבלה גם את תחום ההגדרה של הפונקציה.

<u>מציאת נקודות פיתול</u>

1. משווים את $f''(x)$ לאפס ומוצאים את ערכי ה- x המאפסים אותה.

2. בונים טבלה ולטבלה מכניסים את תחום ההגדרה ואת הנקודות מסעיף 1.
מוודאים באמצעות טבלה ש-$f''(x)$ מחליפה סימן בערכי ה- x שמצאנו בסעיף 1

3. מוצאים את שיעורי ה-y של הנקודות מסעיף 2 אשר בהן $f''(x)$ החליפה סימן.
אלה נקודות הפיתול.

10. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{4x^2-10x+4}{x^2+1}$

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן .
ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה .
ה. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
ו. מצא את נקודות הפיתול של הפונקציה *(במציאת שיעורי ה-x השאר שורש בתשובתך ובמציאת שיעורי ה-y השאר 2 ספרות אחרי הנקודה העשרונית).*
ז. מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה של הפונקציה.
ח. שרטט את הפונקציה $f(x)$.
ט. עבור אילו ערכי k אין פתרון למשוואה: $f(x)=k$.

11. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+1$
א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים (במידה ויש כאלה).
ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
ד. מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה.
ה. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (השאר בתשובתך 2 ספרות אחרי הנקודה העשרונית).
ו. מצא את נקודות הפיתול של הפונקציה.
ז. מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה של הפונקציה.
ח. שרטט את הפונקציה $f(x)$.
ט. נתונה הפונקציה $g(x)=-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+1$. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ (אין צורך לגזור את הפונקציה $g(x)$).

12. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2}{2x-4x^2}$
א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן (במידה ויש כאלה).
ד. מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה (במידה ויש כאלה).
ה. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים. (במידה ויש כאלה).
ו. מצא את נקודות הפיתול של הפונקציה (במידה ויש כאלה).
ז. מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה של הפונקציה.
ח. שרטט את הפונקציה $f(x)$.
ט. עבור אילו ערכי k הישר: $y=k$ אינו חותך את הפונקציה $f(x)$.

13. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{9x}{-x^2+5x-4}$
א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
ד. מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה.
ה. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
ו. שרטט את הפונקציה.
ז. נתונה הפונקציה $g(x)=f(x-a)$. מצא את 2 ערכי a האפשריים אם ידוע שאחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה-y.

14. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{ax^2+18}{x^2-18x-b}+3$ האסימפטוטה האופקית של הפונקציה ואחת האסימפטוטות האנכיות שלה נחתכות בנקודה $(-3,5)$.
א. מצא את ערכי הפרמטרים a ו-b.
ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
ג. מצא את כל האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
ד. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
ה. מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה.
ו. שרטט את הפונקציה (אין צורך למצוא את נקודות החיתוך עם הצירים).

15. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x-a}{x^2+bx-7}+c$. לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית $y=0$ ואסימפטוטה אנכית אחת בלבד והיא $x=-1$.

א. מצא את ערכי הפרמטרים b,a ו-c .
ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה. (במידה ויש כאלה).
ד. מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה. (במידה ויש כאלה).
ה. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (במידה ויש כאלה).
ו. מצא את נקודות הפיתול (אם יש כאלה).
ז. מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה והקעירות כלפי מטה.
ח. שרטט את הפונקציה.
ט. לישר $x=p^2$ ולפונקציה $f(x)$ אין נקודות חיתוך. מצא את ערכי הפרמטר p האפשריים (תוכל להשאיר שורש בתשובתך).

16. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{b(x-1)}{x^2+3}+a$ (b פרמטר חיובי). בסעיפים הבאים תוכל לבטא את התשובות באמצעות a ו-b במידת הצורך.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה (במידה ויש כאלה).
ד. מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה (במידה ויש כאלה).
ה. הפונקציה מקיימת עבור כל x בתחום הגדרתה $-10\le f(x)\le 4$. *(ידוע שהפונקציה מקבלת את כל הערכים בתחום הנ"ל)*. מצא את a ו-b.
ו. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (בתשובתך השאר 2 ספרות אחרי הנקודה העשרונית).
ז. שרטט את הפונקציה $f(x)$.

17. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{a}{x^2+bx+9}$. לפונקציה יש אסימפטוטה <u>אנכית</u> אחת בלבד והיא נמצאת מימין לציר ה-y . בנוסף הפונקציה חותכת את הקרן החיובית של ציר ה-y במרחק יחידה אחת מראשית הצירים.

א. מצא את ערכי הפרמטרים a ו-b .
ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
ג. מצא את כל האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
ד. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה. (במידה ויש כאלה).
ה. מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה. (במידה ויש כאלה).
ו. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (במידה ויש כאלה).
ז. שרטט את הפונקציה.

18. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+b}$ $(b<-\frac{1}{4})$. בסעיפים הבאים **השתמש בפרמטר *b*** במידת הצורך.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
ג. האם לפונקציה יש נקודות קיצון? נמק.
ד. מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה.
ה. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
ו. שרטט את הפונקציה.

19. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+1}{bx^2+bx+1}$ b הוא פרמטר.

א. עבור אילו ערכי b יש לפונקציה:
   i. אסימפטוטה אנכית אחת.
   ii. שתי אסימפטוטות אנכיות.
   iii. אין אסימפטוטה אנכית.

ב. לפונקציה יש אסימפטוטה אנכית אחת. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
ג. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
ד. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
ה. מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה.
ו. מצא את נקודות החיתוך עם הצירים (אם יש כאלה).
ז. שרטט את הפונקציה.

20. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{bx^2+2x-1}$ b הוא פרמטר.

א. עבור אילו ערכי b יש לפונקציה:
   i. אסימפטוטה אנכית אחת.
   ii. שתי אסימפטוטות אנכיות.
   iii. אין אסימפטוטה אנכית.

נתון: $b<-1$

ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים (אם יש כאלה).
ג. הבע באמצעות b את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
ד. באיזה רביע נמצאת נקודת הקיצון? נמק.
ה. מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה.
ו. מצא את נקודות החיתוך עם הצירים (אם יש כאלה).
ז. שרטט את הפונקציה.

תשובות

1. **תשובות-נגזרות**:

א. $f(x)=-\frac{3}{(2x+1)^2}$

ב. $f(x)=\frac{x^2-6x-1}{(x-3)^2}$

ג. $f(x)=-\frac{1}{x^2}$

ד. $f(x)=\frac{4}{x^3}$

ה. $f(x)=\frac{-3x^2+10x+2}{(2x^2-x+3)^2}$

ו. $f(x)=\frac{(-3x^2-16x+9)(3x+4)^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4}$

ז. $f(x)=\frac{-3(4x^2+1)}{(4x^2-1)^2}$

ח. $f(x)=\frac{2x(c-4)}{(x^2-4)^2}$

ט. $f(x)=\frac{2(x-2)(2x-a^2)}{(x^2-a^2)^2}+\frac{x}{2}$

י. $f(x)=a+\frac{2}{(x-2)^2}-\frac{4}{(x-2)^3}-\frac{1}{3}$

2. **<u>תשובות-אסימפטוטות</u>:**

א. <u>תחום הגדרה</u>: $x \neq 0$, $x \neq 3$. <u>אסימפטוטות אנכיות</u>: $x = 3$.
<u>נקודת אי-רציפות סליקה</u>: $(0,2)$.

ב. <u>תחום הגדרה</u>: $x \neq -2$. <u>אסימפטוטות אנכיות</u>: $x = -2$.

ג. <u>תחום הגדרה</u>: $x \neq 2$, $x \neq -5$. <u>אסימפטוטות אנכיות</u>: $x = 2$.
<u>נקודת אי-רציפות סליקה</u>: $(-5,2)$.

ד. <u>תחום הגדרה</u>: $x \neq 3$. <u>אסימפטוטות אנכיות</u>: $x = 3$.

ה. <u>תחום הגדרה</u>: $x \neq 1, x \neq -1$. <u>אסימפטוטות אנכיות</u>: $x = 1, x = -1$.

ו. <u>תחום הגדרה</u>: $x \neq -3$, <u>אסימפטוטות אנכיות</u>: $x = -3$.

ז. <u>תחום הגדרה</u>: כל x , <u>אסימפטוטות אנכיות</u>: אין ,

ח. <u>תחום הגדרה</u>: $x \neq 1, x \neq 2$, <u>אסימפטוטות אנכיות</u>: $x = 1, x = 2$.

ט. <u>תחום הגדרה</u>: $x \neq 0$. <u>אסימפטוטות אנכיות</u>: $x = 0$,

י. <u>תחום הגדרה</u>: $x \neq 4$, $x \neq 2$. <u>אסימפטוטות אנכיות</u>: $x = 4$.
<u>נקודת אי-רציפות סליקה</u>: $(2, -3)$.

יא. <u>תחום הגדרה</u>: כל x , <u>אסימפטוטות אנכיות</u>: אין .

יב. <u>תחום הגדרה</u>: $x \neq 7$, $x \neq -1$. <u>אסימפטוטות אנכיות</u>: $x = 7$.
<u>נקודת אי-רציפות סליקה</u>: $(-1,1)$.

יג. <u>תחום הגדרה</u>: $x \neq -3, x \neq 4$, <u>אסימפטוטות אנכיות</u>: $x = -3, x = 4$,

יד. <u>תחום הגדרה</u>: $x \neq 3$, <u>אסימפטוטות אנכיות</u>: $x = 3$.

טו. <u>תחום הגדרה</u>: $x \neq -5, x \neq 5$, <u>אסימפטוטות אנכיות</u>: $x = -5, x = 5$.

טז. <u>תחום הגדרה</u>: כל x , <u>אסימפטוטות אנכיות</u>: אין .

יז. <u>תחום הגדרה</u>: $x \neq 0$, <u>אסימפטוטות אנכיות</u>: $x = 0$.

יח. <u>תחום הגדרה</u>: $x \neq 0, x \neq 2$, <u>אסימפטוטות אנכיות</u>: $x = 2$, <u>נקודת אי-רציפות סליקה</u>: $(0,0)$.

יט. <u>תחום הגדרה</u>: $x \neq 0$, <u>אסימפטוטות אנכיות</u>: $x = 0$.

כ. <u>תחום הגדרה</u>: $x \neq -3, x \neq -5$, <u>אסימפטוטות אנכיות</u>: $x = -5, x = -3$.

כא. <u>תחום הגדרה</u>: כל x , <u>אסימפטוטות אנכיות</u>: אין .

כב. <u>תחום הגדרה</u>: כל x , <u>אסימפטוטות אנכיות</u>: אין .

כג. <u>תחום הגדרה</u>: $x \neq m$, <u>אסימפטוטות אנכיות</u>: $x = m$.

כד. <u>תחום הגדרה</u>: $x \neq 3$, $x \neq 4$. <u>אסימפטוטות אנכיות</u>: $x = 4$.
<u>נקודת אי-רציפות סליקה</u>: $(3, -6)$.

כה. <u>תחום הגדרה</u>: $x \neq 1$, $x \neq 0$. <u>אסימפטוטות אנכיות</u>: $x = 1$.
<u>נקודת אי-רציפות סליקה</u>: $(0,0)$.

3. **<u>תשובות-אסימפטוטות</u>:**

א. <u>אסימפטוטות אופקיות</u>: $y = 0$.

ב. <u>אסימפטוטות אופקיות</u>: $y = 3$.

ג. <u>אסימפטוטות אופקיות</u>: $y = 4$.

ד. <u>אסימפטוטות אופקיות</u>: אין.

ה. <u>אסימפטוטות אופקיות</u>: $y = 0$.

ו. <u>אסימפטוטות אופקיות</u>: $y = 0$.

ז. <u>אסימפטוטות אופקיות</u>: $y = -1$.

ח. <u>אסימפטוטות אופקיות</u>: $y = -4$.

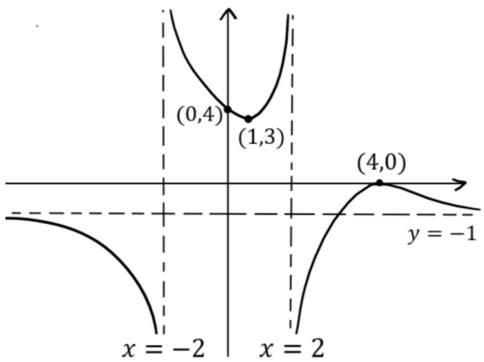
ט. <u>אסימפטוטות אופקיות</u>: $y = 0$.

י. <u>אסימפטוטות אופקיות</u>: אין.

יא. <u>אסימפטוטות אופקיות</u>: $y = \frac{5}{3}$.

יב. <u>אסימפטוטות אופקיות</u>: $y = 0$.
יג. <u>אסימפטוטות אופקיות</u>: $y = 0$.
יד. <u>אסימפטוטות אופקיות</u>: $y = 5$.
טו. <u>אסימפטוטות אופקיות</u>: $y = 3$.
טז. <u>אסימפטוטות אופקיות</u>: $y = 0$.
יז. <u>אסימפטוטות אופקיות</u>: $y = 0$.
יח. <u>אסימפטוטות אופקיות</u>: $y = 1$.
יט. <u>אסימפטוטות אופקיות</u>: אין.
כ. <u>אסימפטוטות אופקיות</u>: $y = -\frac{1}{2}$.
כא. <u>אסימפטוטות אופקיות</u>: אין.
כב. <u>אסימפטוטות אופקיות</u>: $y = 2$.
כג. <u>אסימפטוטות אופקיות</u>: $y = n$.

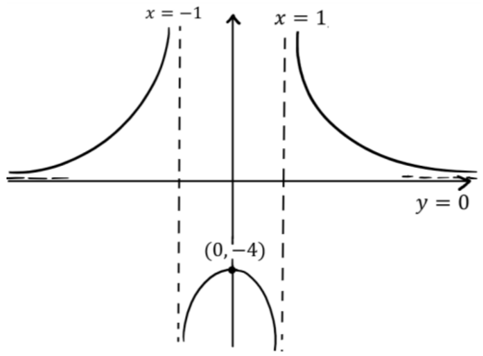
4. **<u>תשובות</u>**:
א. <u>תחום הגדרה</u>: $x \neq 2, x \neq -2$.
ב. <u>אסימפטוטות אנכיות</u>: $x = 2, x = -2$.
<u>אסימפטוטה אופקית</u>: $y = -1$.
ג. $(1,3)$ נקודת מינימום, $(4,0)$ נקודת מקסימום.
ד. <u>תחום עליה</u>: $1 < x < 2$ **או** $2 < x < 4$, <u>תחום ירידה</u>: $x > 4$ **או** $-2 < x < 1$ **או** $x < -2$
ה. $(0,4)$,$(4,0)$.
ו. שרטוט:



ז. $0 < k < 3$.
ח. $(4,0)$ נקודת מינימום, $(7, -3)$ נקודת מקסימום.

5. **<u>תשובות</u>**:
א. <u>תחום הגדרה</u>: $x \neq 1, x \neq -1$.
ב. <u>אסימפטוטות אנכיות</u>: $x = 1, x = -1$.
<u>אסימפטוטה אופקית</u>: $y = 0$.
ג. $(0, -4)$ נקודת מקסימום.
ד. <u>תחום עליה</u>: $x < -1$ **או** $-1 < x < 0$, <u>תחום ירידה</u>: $x > 1$ **או** $0 < x < 1$ **.**
ה. $(0, -4)$.

ו. שרטוט:



ז. $(0,4)$ נקודת מינימום.

6. **<u>תשובות</u>**:

א. <u>תחום הגדרה</u>: $x \neq 4$.

ב. <u>אסימפטוטות אנכיות</u>: $x = 4$.

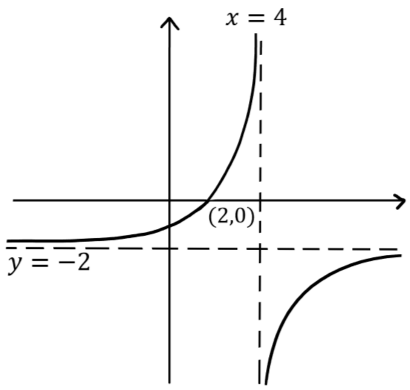
<u>אסימפטוטה אופקית</u>: $y = -2$.

ג. אין.

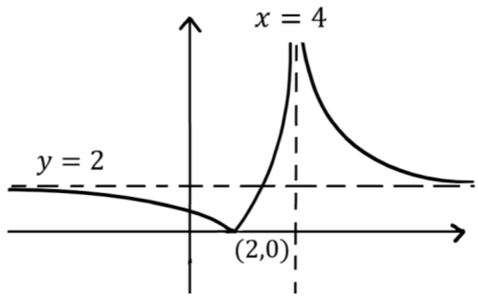
ד. <u>תחום עליה</u>: $x > 4$ **או** $x < 4$, <u>תחום ירידה</u>: אין.

ה. $(2,0),(0,-1)$.

ו. שרטוט:



ז. $(2,0)$ נקודת מינימום. שרטוט:



7. **<u>תשובות</u>**:

א. <u>תחום הגדרה</u>: $x \neq 0$.

ב. <u>אסימפטוטות אנכיות</u>: $x = 0$.

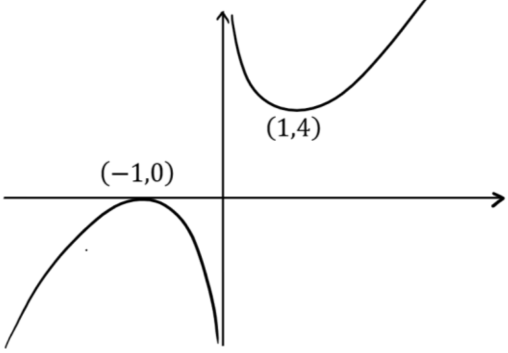
<u>אסימפטוטה אופקית</u>:אין.

ג. $(-1,0)$ נקודת מקסימום, $(1,4)$ נקודת מינימום.

ד. <u>תחום עליה</u>: $x > 1$ **או** $x < -1$, <u>תחום ירידה</u>: $-1 < x < 0$ **או** $0 < x < 1$.

ה. $(-1,0)$.

ו. שרטוט:



ז. $k = 4, k = 0$.

ח. $a = -4$ או $a = 0$.

8. **<u>תשובות</u>**:

א. <u>תחום הגדרה</u>: $x \neq 1, x \neq 2$

ב. <u>אסימפטוטות אנכיות</u>: $x = 1$. (יש נקודת אי רציפות סליקה ב-$(2,4)$)

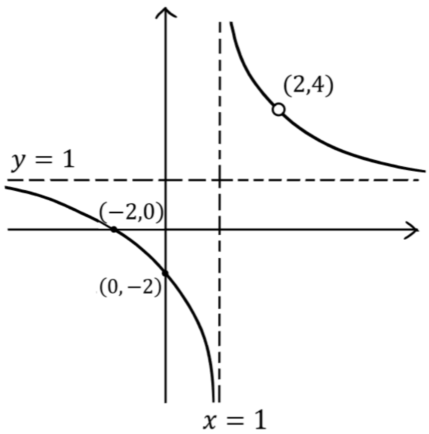
<u>אסימפטוטה אופקית</u>: $y = 1$.

ג. אין נקודות קיצון.

ד. <u>תחום עליה</u>: אין , <u>תחום ירידה</u>: $x < 1$ **או** $x > 1$, $x \neq 2$.

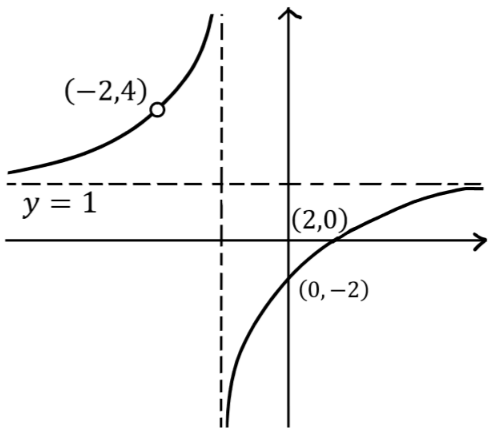
ה. $(-2,0)$, $(0,-2)$.

ו. שרטוט:



ז. $k = 4, k = 1$.

ח. שיקוף סביב ציר ה-y:



9. **<u>תשובות</u>**:

א. <u>תחום הגדרה</u>: $x \neq 0$.

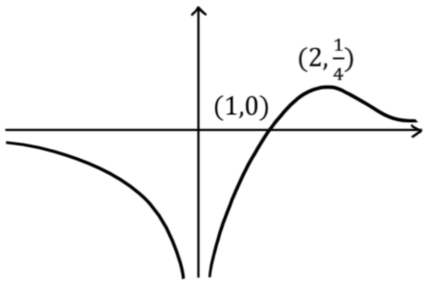
ב. <u>אסימפטוטות אנכיות</u>: $x = 0$.
<u>אסימפטוטה אופקית</u>: $y = 0$.

ג. $(2,\frac{1}{4})$ נקודת מקסימום.

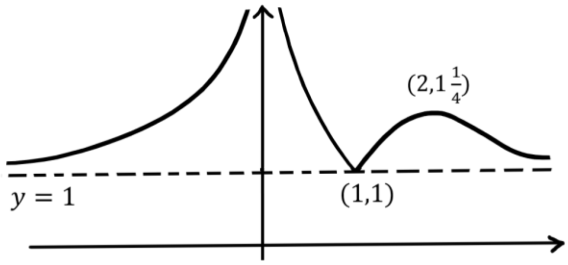
ד. <u>תחום עליה</u>: $0 < x < 2$, <u>תחום ירידה</u>: $x > 2$ **או** $x < 0$.

ה. $(1,0)$.

ו. שרטוט:



ז. נקודות הקיצון הן: $(1,1)$ נקודת מינימום, $(2,1\frac{1}{4})$ נקודת מקסימום. שרטוט:



10. **<u>תשובות</u>**:

א. <u>תחום הגדרה</u>: כל x.

ב. <u>אסימפטוטות אנכיות</u>: אין.
<u>אסימפטוטה אופקית</u>: $y = 4$.

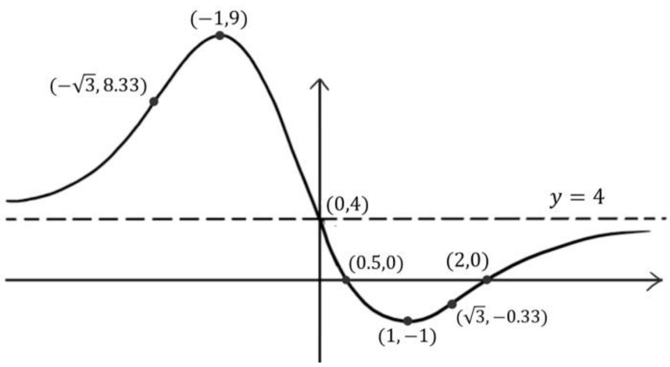
ג. $(1,-1)$ נקודת מינימום, $(-1,9)$ נקודת מקסימום.

ד. <u>תחום ירידה</u>: $-1 < x < 1$, <u>תחום עליה</u>: $x > 1$ **או** $x < -1$.

ה. $(0.5,0),(2,0),(0,4)$.

ו. $(\sqrt{3},-0.33),(-\sqrt{3},8.33),(0,4)$.

ז. <u>תחומי קעירות כלפי מעלה</u>: $0 < x < \sqrt{3}$ או $x < -\sqrt{3}$.
<u>תחומי קעירות כלפי מטה</u>: $-\sqrt{3} < x < 0$ **או** $x > \sqrt{3}$.



ח. $k > 9$ **או** $k < -1$.

11. **<u>תשובות</u>**:

א. <u>תחום הגדרה</u>: $x \neq 0$.

ב. <u>אסימפטוטות אנכיות</u>: $x = 0$.
<u>אסימפטוטה אופקית</u>: $y = 1$.

ג. $(1,2)$ נקודת מקסימום.

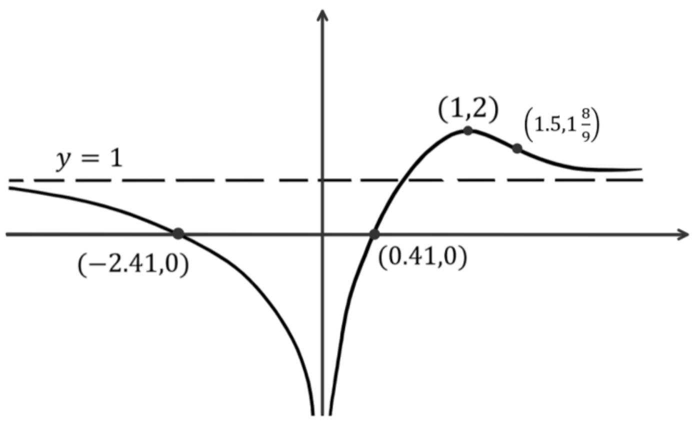
ד. <u>תחום ירידה</u>: $x > 1$ או $x < 0$, <u>תחום עליה</u>: $0 < x < 1$ **.**

ה. $(-2.41,0),(0.41,0)$.

ו. $\left(1.5,1\frac{8}{9}\right)$.

ז. <u>תחומי קעירות כלפי מעלה</u>: $x > 1.5$
<u>תחומי קעירות כלפי מטה</u>: $0 < x < 1.5$ או $x < 0$.

ח. שרטוט:



ט. שיקוף סביב ציר ה-y ולכן: $(-1,2)$ נקודת מקסימום.

12. **<u>תשובות</u>**:

א. <u>תחום הגדרה</u>: $x \neq 0, x \neq \frac{1}{2}$.

ב. <u>אסימפטוטות אנכיות</u>: $x = \frac{1}{2}$ נקודת אי רציפות סליקה (0,0).
<u>אסימפטוטה אופקית</u>: $y = -\frac{1}{4}$.

ג. אין.

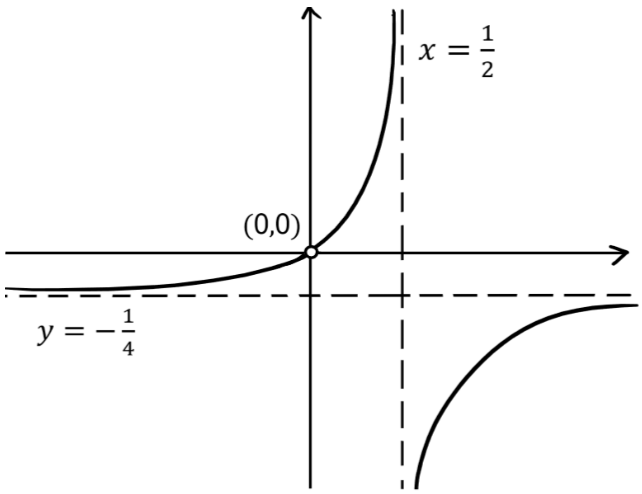
ד. <u>תחום ירידה</u>: אין, <u>תחום עליה</u>: $x > \frac{1}{2}$ או $x < \frac{1}{2}$, $x \neq 0$.

ה. אין.

ו. אין.

ז. <u>תחומי קעירות כלפי מעלה</u>: $x < \frac{1}{2}$, $x \neq 0$
<u>תחומי קעירות כלפי מטה</u>: $x > \frac{1}{2}$.

ח. שרטוט:



ט. $k=0$ או $k=-\frac{1}{4}$.

13. **<u>תשובות</u>**:

א. <u>תחום הגדרה</u>: $x \neq 1, x \neq 4$

ב. <u>אסימפטוטות אנכיות</u>: $x=1$, $x=4$.

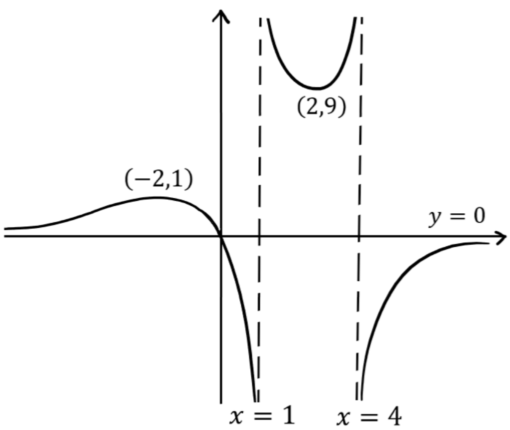
<u>אסימפטוטה אופקית</u>: $y=0$.

ג. $(2,9)$ נקודת מינימום, $(-2,1)$ נקודת מקסימום.

ד. <u>תחום עליה</u>: $x<-2$ **או** $2<x<4$ **או** $x>4$, <u>תחום ירידה</u>: $-2<x<1$ **או** $1<x<2$.

ה. $(0,0)$.

ו. שרטוט:



ז. $a=2$ או $a=-2$.

14. **<u>תשובות</u>**:

א. $a=2$, $b=63$.

ב. <u>תחום הגדרה</u>: $x \neq -3, x \neq 21$

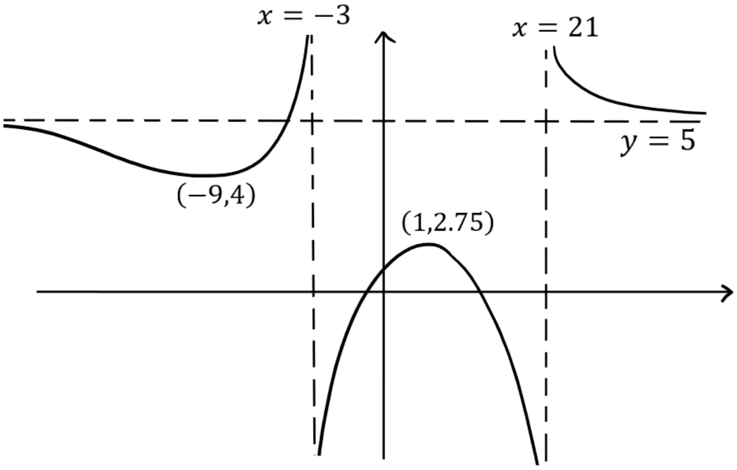
ג. <u>אסימפטוטות אנכיות</u>: $x=-3$, $x=21$.

<u>אסימפטוטה אופקית</u>: $y=5$.

ד. $(-9,4)$ נקודת מינימום, $(1,2.75)$ נקודת מקסימום.

ה. <u>תחום עליה</u>: $-9<x<-3$ **או** $-3<x<1$, <u>תחום ירידה</u>: $x<-9$ **או** $1<x<21$ **או** $x>21$.

ו. שרטוט:



15. **<u>תשובות</u>**:

א. $a=7$, $b=-6$, $c=0$.

ב. <u>תחום הגדרה</u>: $x\neq -1, x\neq 7$.

ג. אין.

ד. <u>תחום עליה</u>: אין , <u>תחום ירידה</u>: $x<-1$ **או** $x>-1$, $x\neq 7$.

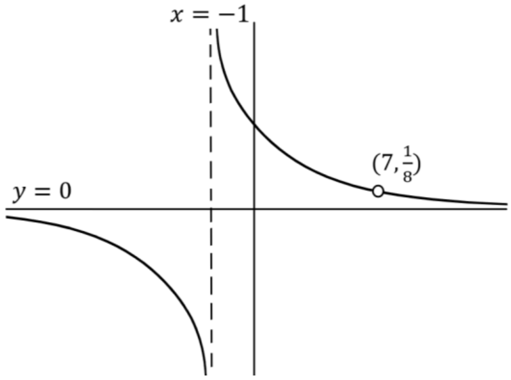
ה. $(0,1)$.

ו. אין.

ז. <u>תחומי קעירות כלפי מעלה</u>: $x>-1$, $x\neq 7$

<u>תחומי קעירות כלפי מטה</u>: $x<-1$

ח. שרטוט:



ט. $p=\sqrt{7}$ **או** $p=-\sqrt{7}$.

16. **<u>תשובות</u>**:

א. <u>תחום הגדרה</u>: כל x

ב. <u>אסימפטוטות אנכיות</u>: אין.

<u>אסימפטוטה אופקית</u>: $y=a$.

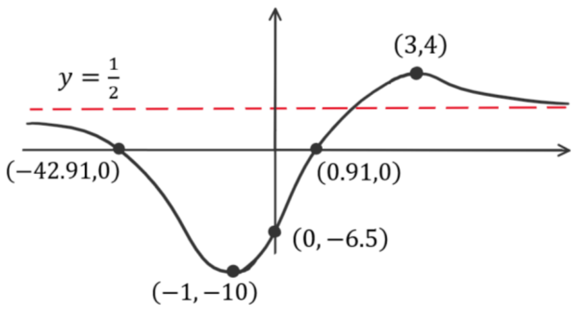
ג. $\left(-1,a-\frac{1}{2}b\right)$ נקודת מינימום, $\left(3,a+\frac{1}{6}b\right)$ נקודת מקסימום.

ד. <u>תחום ירידה</u>: $x>3$ **או** $x<-1$, <u>תחום עליה</u>: $-1<x<3$.

ה. $a=\frac{1}{2}$, $b=21$.

ו. $(-42.91,0)$, $(0.91,0)$, $(0,-6.5)$.

ז. שרטוט:



17. **<u>תשובות</u>**:

א. $a=9$, $b=-6$.

ב. <u>תחום הגדרה</u>: $x\neq 3$.

ג. <u>אסימפטוטות אנכיות</u>: $x=3$.

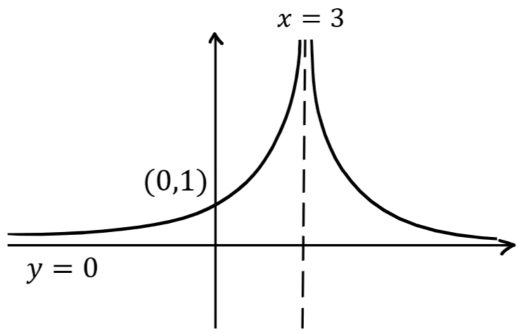
<u>אסימפטוטה אופקית</u>: $y=0$.

ד. אין.

ה. <u>תחום עליה</u>: $x<3$, <u>תחום ירידה</u>: $x>3$.

ו. $(0,1)$.

ז. שרטוט:



18. **<u>תשובות</u>**:

א. <u>תחום הגדרה</u>: $x\neq\sqrt{-b}$, $x\neq-\sqrt{-b}$.

ב. <u>אסימפטוטות אנכיות</u>: $x=\sqrt{-b}$, $x=-\sqrt{-b}$.

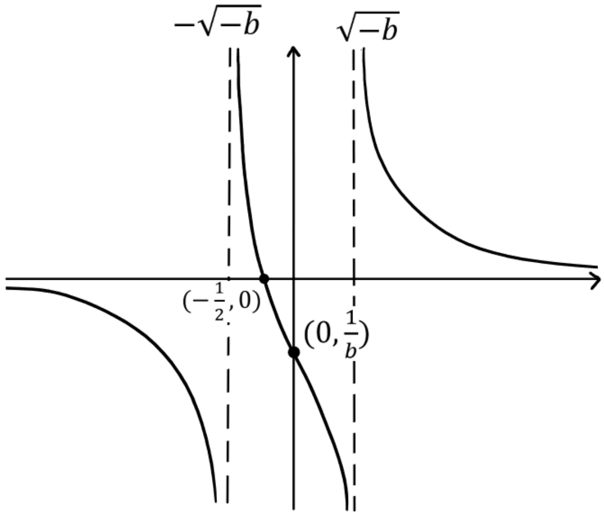
<u>אסימפטוטה אופקית</u>: $y=0$.

ג. לא. (*כאשר גוזרים ומשווים לאפס מקבלים משוואה ריבועית שאין לה פתרון. היות ו-* $b<-\frac{1}{4}$ *הדיסקרימיננטה\דלתא של המשוואה הריבועית שלילית*).

ד. <u>תחום עליה</u>: אין , <u>תחום ירידה</u>: $x>\sqrt{-b}$ **או** $-\sqrt{-b}<x<\sqrt{-b}$ **או** $x<-\sqrt{-b}$

ה. $(-\frac{1}{2},0)$, $(0,\frac{1}{b})$.

ו. שרטוט:



19. תשובות:

א. ערכי b

iv. אסימפטוטה אנכית אחת: $b=4$.

v. שתי אסימפטוטות אנכיות: $b>4$ **או** $b<0$.

vi. אין אסימפטוטה אנכית: $0\le b<4$.

ב. $x\neq-\frac{1}{2}$.

ג. אסימפטוטות אנכיות: $x=-\frac{1}{2}$.

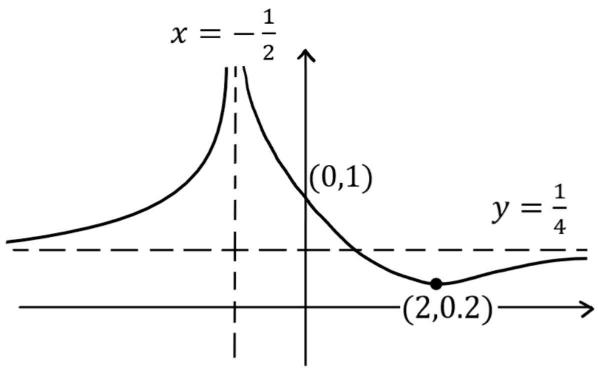
אסימפטוטה אופקית: $y=\frac{1}{4}$.

ד. $(2,0.2)$ נקודת מינימום.

ה. תחום עליה: $x<-\frac{1}{2}$ **או** $x>2$ תחום ירידה: $-\frac{1}{2}<x<2$

ו. $(0,1)$.

ז. שרטוט:



20. תשובות:

א. ערכי b

i. אסימפטוטה אנכית אחת: $b=0$, $b=-1$.

ii. שתי אסימפטוטות אנכיות: $b>-1$, $b\neq0$.

iii. אין אסימפטוטה אנכית: $b < -1$.

ב. אסימפטוטות אנכיות: אין.
אסימפטוטה אופקית: $y = 0$.

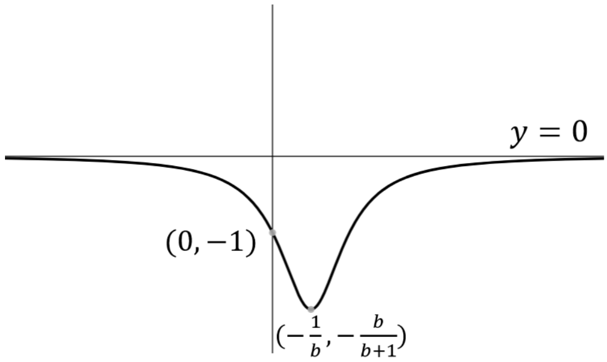
ג. $\left(-\frac{1}{b}, -\frac{b}{b+1}\right)$ נקודת מינימום.

ד. נקודת הקיצון נמצאת ברביע הרביעי.

ה. תחום עליה: $x > -\frac{1}{b}$ תחום ירידה: $x < -\frac{1}{b}$

ו. $(0, -1)$.

ז. שרטוט:



הפונקציה ההופכית

דגשים

$g(x) = \frac{1}{f(x)}$

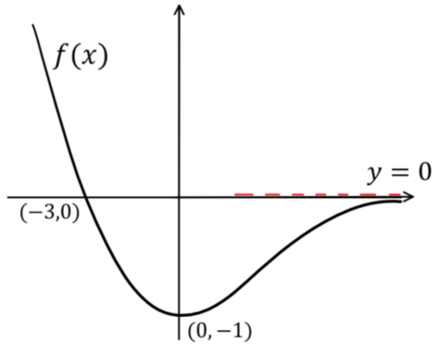
כל נקודה (x_0, y_0) בפונקציה $f(x)$ תהפוך להיות $(x_0, \frac{1}{y_0})$ בפונקציה $g(x)$.

1. ניתן לגזור ולראות ש- $g'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$ כלומר ניתן לראות שהנגזרת $g'(x)$ והנגזרת $f'(x)$ מתאפסות עבור אותם ערכי x אבל סימני הנגזרת הפוכים. כלומר ש-$f(x)$ יורדת $g(x)$ עולה ולהפך. לכן נקודות המינימום המקומיות יהפכו להיות מקסימום מקומיות ולהפך.
2. נקודות אשר ערכי ה-y שלהן שווים ל-1 או -1 לא "זזות" ממקומן.
נקודות ערכי ה-y שלהן מקיימות $-1 < y < 1 , y \neq 0$ מתרחקות מציר ה-x.
נקודות ערכי ה-y שלהן מקיימות $y > 1$ או $y < -1$ מתקרבות לציר ה-x.
3. בנקודות אשר סביבן ערך ה-y שואף לאפס (לרוב נקודות חיתוך עם ציר ה-x או השקה לציר ה-x) נוצרת אסימפטוטה אנכית בפונקציה $g(x)$.
4. אם כאשר x שואף ל-$\pm\infty$ ערך ה-y שואף ל-$\pm\infty$ אז לפונקציה $g(x)$ תהיה אסימפטוטה אופקית $y = 0$.
5. אסימפטוטה אופקית $y = a$ תהפוך להיות $y = \frac{1}{a}$
6. אסימפטוטות אנכיות של הפונקציה $f(x)$ יהפכו להיות "חורים" של הפונקציה $g(x)$ אשר שיעור ה-y של ה"חור" הוא אפס.
7. תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ יכלול בתוכו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ ובנוסף את כל ה-איקסים שמאפסים את $f(x)$. כלומר $f(x) \neq 0$.
8. אסימפטוטה אופקית $y = 0$ כבר לא תהיה אסימפטוטה אופקית אלא הפונקציה פשוט תשאף לאינסוף או מינוס אינסוף

תרגילים

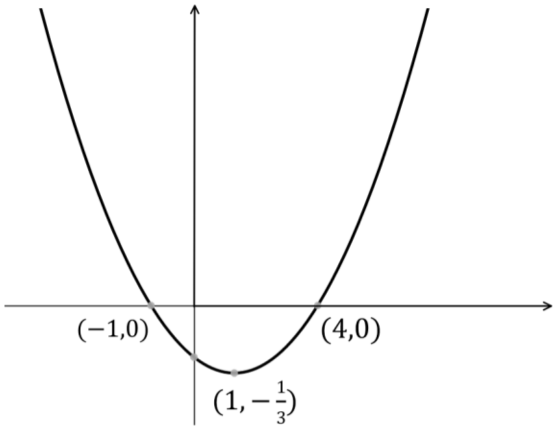
בכל התרגילים הבאים אם לא משורטטת אסימפטוטה אופקית, הנח שלפונקציה אין אסימפטוטה אופקית.

1. נתונה הפונקציה $f(x)$ והפונקציה ההופכית $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.
   א. הוכח שתחומי העליה והירידה של הפונקציה $g(x)$ הפוכים לתחומי העליה והירידה של הפונקציה $f(x)$
   ב. נתון גרף הפונקציה $f(x)$. שרטט באותה מערכת צירים את גרף הפונקציה $g(x)$.



2. נתונה הפונקציה $f(x)$ והפונקציה ההופכית $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.
   א. הוכח שתחומי העליה והירידה של הפונקציה $g(x)$ הפוכים לתחומי העליה והירידה של הפונקציה $f(x)$

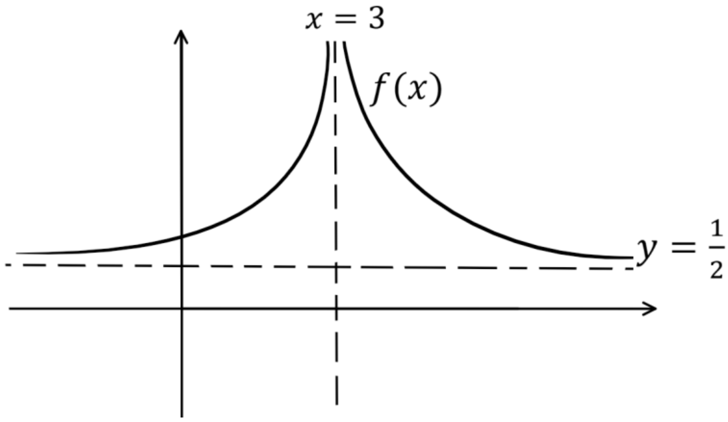
ב. נתון גרף הפונקציה $f(x)$. שרטט באותה מערכת צירים את גרף הפונקציה $g(x)$.



3. נתונה הפונקציה $f(x)$ והפונקציה ההופכית $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

א. הוכח שתחומי העליה והירידה של הפונקציה $f(x)$ הפוכים לתחומי העליה והירידה של הפונקציה $g(x)$

ב. נתון גרף הפונקציה $f(x)$. שרטט באותה מערכת צירים את גרף הפונקציה $g(x)$.



חקירת פונקציית שורש

סרטון ותרגילי הקדמה

צפו בסרטון ההקדמה הבא אשר בו נמצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות

- $f(x) = \sqrt{x-10}$
- $f(x) = \sqrt{x^2-6x+8}$
- $f(x) = \sqrt{-x^2+6x-8}$
- $f(x) = \sqrt{x}$
- $f(x) = \frac{1+x^2}{\sqrt{x}}$
- $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}-2}$
- $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x-10}$
- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}+1}$

תרגילי תחום הגדרה

1. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sqrt{x-2}$

ב. $f(x) = \sqrt{1-x}$

ג. $f(x) = \sqrt{-x^2+3x}$

ד. $f(x) = 5\sqrt{1-3x}$

ה. $f(x) = \sqrt{-x^2+3x+4}$

ו. $f(x) = \sqrt{x}$

ז. $f(x) = -2\sqrt{x}+3x^2+1$

ח. $f(x) = \sqrt{x^2+3x+4}$

ט. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

י. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}-2}$

יא. $f(x) = \frac{x-10}{\sqrt{x-2}}$

יב. $f(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{x-1}$

יג. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$

יד. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-2}$

טו. $f(x) = \frac{\sqrt{-x}}{x+2}$

טז. $f(x) = \frac{\sqrt{-x}}{x-3}$

יז. $f(x) = \sqrt{x^2-6x+9}$

יח. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$

יט. $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{1+2x}}$

כ. $f(x) = \frac{\sqrt{3+x}}{\sqrt{1-x}}$

כא. $f(x) = \sqrt{\frac{3+x}{1-x}}$

כב. $f(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{4-x}+2}$

פתרונות- תחום ההגדרה:

א. $x \geq 2$
ב. $x \leq 1$
ג. $0 \leq x \leq 3$
ד. $x \leq \frac{1}{3}$
ה. $-1 \leq x \leq 4$
ו. $x \geq 0$
ז. $x \geq 0$
ח. כל x
ט. $x > 0$
י. $x \neq 4, x \geq 0$.
יא. $x > 2$
יב. $x \geq 3$
יג. $x \geq 0$
יד. $x \neq 2, x \geq 0$.
טו. $x \neq -2, x \leq 0$.
טז. $x \leq 0$
יז. כל x
יח. $x \geq 0$
יט. $x > -\frac{1}{2}$
כ. $-3 \leq x < 1$
כא. $-3 \leq x < 1$
כב. $0 \leq x \leq 4$

אסימפטוטות אנכיות בפונקציית שורש

- מציאת אסימפטוטה **<u>אנכית</u>** בפונקצית שורש:
  - ראשית נמצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
  - נבדוק האם קיימים ערכי x המאפסים את המכנה.
  - אם ערכי ה-x שמאפסים את המכנה נמצאים בקצוות תחום ההגדרה או בתוכו (ולא מחוצה לו) נשתמש בכללים למציאת <u>אסימפטוטה אנכית</u> על פיהם למדנו למצוא אסימפטוטה אנכית בפונקצית מנה
- הנה כמה דוגמאות לשימוש בשלבים הנ"ל למציאת אסימפטוטה אנכית (צפו בסרטון הסבר כדי לראות את הפתרון):
  - $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-4}$
  - $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+4}$
  - $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-4}}$
  - $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}(x^2+4)}$
  - $f(x) = \frac{\sqrt{x}(x^2-16)}{(x+4)}$
  - $f(x) = \frac{\sqrt{x}(x^2-16)}{(x-4)}$

2. בתרגילים הבאים מצא את תחום ההגדרה, את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה ואת נקודות אי רציפות הסליקה (חורים) אם יש כאלה.

א. $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x}+3}$

ב. $f(x)=\frac{\sqrt{3+x}}{\sqrt{1-x}}$

ג. $f(x)=\frac{\sqrt{x-2}}{x^2-9}$

ד. $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{5-x}}$

ה. $f(x)=\frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(x+3)}$

ו. $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

ז. $f(x)=\frac{x}{x-\sqrt{x}}$

ח. $f(x)=\frac{\sqrt{3x+6}}{\sqrt{x+1}}$

ט. $f(x)=\sqrt{x^2+x-12}$

י. $f(x)=\frac{(x-5)\sqrt{x^2+x-12}}{x^2-7x+10}$

יא. $f(x)=\frac{\sqrt{4x^2+x+1}}{-x+2}$

יב. $f(x)=\frac{\sqrt{-x^2+4x+21}}{x+2}$

יג. $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{-x^2+8x-15}}$

יד. $f(x)=\frac{\sqrt{-x^2-7x-10}}{x}$

טו. $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3x+2}}$

טז. $f(x)=\frac{3x+1}{\sqrt{9x^2+x+1}}$

פתרונות – אסימפטוטות אנכיות

א. תחום הגדרה: $x \geq 0$; אין אסימפטוטה אנכית.

ב. תחום הגדרה: $-3 \leq x < 1$; אסימפטוטה אנכית $x=1$.

ג. תחום הגדרה: $x \neq 3$, $x \geq 2$; אסימפטוטה אנכית $x=3$.

ד. תחום הגדרה: $x < 5$; אסימפטוטה אנכית $x=5$.

ה. תחום הגדרה: $x \neq 4$, $x \geq 0$; אסימפטוטה אנכית $x=4$.

ו. תחום הגדרה: $x \neq 1$, $x \geq 0$; אסימפטוטה אנכית $x=1$.

ז. תחום הגדרה: $x \neq 1$, $x > 0$; אסימפטוטה אנכית $x=1$, נקודת אי-רציפות סליקה $(0,0)$.

ח. תחום הגדרה: $x > -1$; אסימפטוטה אנכית $x=-1$.

ט. תחום הגדרה: $x \geq 3$ או $x \leq -4$; אין אסימפטוטה אנכית.

י. תחום הגדרה: $x \neq 5$, $x \geq 3$ או $x \leq -4$; אין אסימפטוטה אנכית , נקודת אי-רציפות סליקה $(5,\sqrt{2})$.

יא. תחום הגדרה: $x \neq 2$; אסימפטוטה אנכית $x=2$.

יב. תחום הגדרה: $x \neq -2$, $-3 \leq x \leq 7$; אסימפטוטה אנכית $x=-2$.

יג. תחום הגדרה: $3 < x < 5$; אסימפטוטה אנכית $x=3$, $x=5$.

יד. תחום הגדרה: $-5 \leq x \leq -2$; אין אסימפטוטה אנכית.

טו. תחום הגדרה: $x > -1$ או $x < -2$; אסימפטוטה אנכית $x=-2$, נקודת אי-רציפות סליקה $(-1,0)$.

טז. תחום הגדרה: כל x ; אין אסימפטוטה אנכית.

אסימפטוטות אופקיות בפונקציית שורש

- הכללים למציאת **<u>אסימפטוטה אופקית</u>** בפונקציית שורש זהים לכללים על פיהם למדנו למצוא אסימפטוטה אופקית בפונקציית מנה <u>למעט ההבדלים הבאים</u>:

  - אם תחום ההגדרה הוא תחום סגור $(a < x < b)$ לא תהיה אסימפטוטה אופקית .

  - <u>יוצא דופן 1 (נפוץ)</u>: אם הפונקציה היא מהצורות הבאות:
    $$(a > 0)\ f(x) = \frac{Bx+C}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\ ,\ f(x) = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{Bx+C}$$
    כלומר שוויון חזקות במונה ובמכנה אחרי הוצאת השורש.
    במקרה כזה תהינה לפונקציה שתי אסימפטוטות אופקיות שונות. אחת בצד ימין ואחרת בצד שמאל. כדי למצוא אותן ננקוט באחת מהשיטות הבאות:
    1. נבדוק מה גבול הפונקציה(לאן היא שואפת) כאשר x שואף לאינסוף ולמינוס אינסוף.
    2. נזכור שהאסימפטוטות האופקיות של הפונקציה $\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{Bx+C}$ הן:
       $y = \frac{\sqrt{a}}{B}$ כאשר x שואף לאינסוף.
       $y = -\frac{\sqrt{a}}{B}$ כאשר x שואף למינוס אינסוף.

  - <u>יוצא דופן 2 (**נדיר מאוד**)</u>: אם הפונקציה היא מהצורה הבאה:
    $\sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{ax^2+tx+k}$ אז תהיה לפונקציה אסימפטוטה אופקית $y = 0$. כדי למצוא אותה ננקוט באחת מהשיטות הבאות:
    1. נבדוק מה גבול הפונקציה(לאן היא שואפת) כאשר x שואף לאינסוף ולמינוס אינסוף.
    2. נזכור שהאסימפטוטה האופקית של הפונקציה היא $y = 0$.

  - נשים לב שבמצב של שוויון חזקות במונה ובמכנה מהצורה: $\frac{\sqrt{ax^n+bx^{n-1}+\dots}}{\sqrt{Ax^n+Bx^{n-1}+\dots}}$
    האסימפטוטה האופקית שמורכבת ממנת המקדים תהיה $y = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{A}}$ **ולא** $y = \frac{a}{A}$.

סרטון הסבר עם דוגמאות- אסימפטוטה אופקית

<u>בסרטון ההסבר</u> על אסימפטוטה אופקית נמצא אסימפטוטות אופקיות לפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \frac{\sqrt{9x^2+x+1}}{3x+1}$

ב. $f(x) = \frac{-\sqrt{16x^2+1}}{x-3} + 1$

ג. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-4}$

ד. $f(x) = \frac{\sqrt{5-x}}{2x}$

ה. $f(x) = \frac{\sqrt{9x-18}}{\sqrt{4x-4}}$

תרגול אסימפטוטות אופקיות

3. בתרגילים הבאים מצא את האסימפטוטות האופקיות של הפונקציה אם יש כאלה.

א. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}+3}$

ב. $f(x) = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$

ג. $f(x) = \frac{\sqrt{-x^2+x+6}}{-x+2}$

ד. $f(x) = \frac{3\sqrt{-x}}{1+x}$

ה. $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+x+1}}{-x+2}$

ו. $f(x) = \frac{\sqrt{-25x+50}}{\sqrt{-x+4}}$

ז. $f(x) = \frac{x}{x\sqrt{x}+3x}$

ח. $f(x) = x\sqrt{1-x}$

ט. $f(x) = \frac{\sqrt{-4x}}{1+2\sqrt{-x}}$

י. $f(x) = \frac{x+1}{-\sqrt{4x^2-32x+48}} + 2$

יא. $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

יב. $f(x) = \frac{-x}{\sqrt{x^2-8x+15}} - 1$

יג. $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x^2}}$

יד. $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{-x+7}}$

טו. $f(x) = \sqrt{\frac{4x-4}{x+7}}$

טז. $f(x) = \frac{\sqrt{5x+5}}{\sqrt{x+4}}$

יז. $f(x) = \frac{-\sqrt{x^2-1}}{x+1} + \frac{3x^2-1}{x^2+1}$

יח. $f(x) = \frac{-\sqrt{x^2-1}}{x+1} + \frac{3x^2-1}{x^2+1} + 2$

יט. $f(x) = \frac{-\sqrt{x^2-1}}{x+1} + \frac{3x^2-1}{x^2+1} + x^3$

פתרונות – אסימפטוטות אופקיות

א. אין אסימפטוטה אופקית.

ב. $\underset{x\to\infty}{y} = 2$.

ג. אין אסימפטוטה אופקית.

ד. $\underset{x\to-\infty}{y} = 0$.

ה. $\underset{x\to\infty}{y} = -2$, $\underset{x\to-\infty}{y} = 2$.

ו. $\underset{x\to-\infty}{y} = 5$.

ז. $\underset{x\to\infty}{y} = 0$.

ח. אין אסימפטוטה אופקית.

ט. $\underset{x\to-\infty}{y} = 1$.

י. $\underset{x\to\infty}{y} = 1.5$, $\underset{x\to-\infty}{y} = 2.5$.

יא. אין אסימפטוטה אופקית.

יב. $\underset{x\to\infty}{y} = -2$, $\underset{x\to-\infty}{y} = 0$.

יג. $\underset{x\to\infty}{y} = 0$.

יד. אין אסימפטוטה אופקית.

טו. $y = 2$.

טז. $\underset{x\to\infty}{y} = \sqrt{5}$.

יז. $\underset{x\to\infty}{y} = 2$, $\underset{x\to-\infty}{y} = 4$.

יח. $\underset{x\to\infty}{y} = 4$, $\underset{x\to-\infty}{y} = 6$.

יט. אין אסימפטוטה אופקית.

נגזרת של פונקציית שורש

הנגזרת	הפונקציה
$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$	$f(x) = x^n$
$f'(x) = a$	$f(x) = ax$
$f'(x) = 0$	$f(x) = a$
$f'(x) = n(u(x))^{n-1} \cdot u'(x)$	$f(x) = (u(x))^n$
$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$	$f(x) = u(x) \cdot v(x)$
$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$	$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$
$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$f(x) = \sqrt{u(x)}$

תרגילי נגזרות

4. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$.

ב. $f(x) = 5\sqrt{1 - 3x}$.

ג. $f(x) = \sqrt{x}$.

ד. $f(x) = x\sqrt{x}$.

ה. $f(x) = -2\sqrt{x} + 3x^2 + 1$.

ו. $f(x) = (2x - 1)^2\sqrt{1 + x}$.

ז. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

ח. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$.

ט. $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{1+2x}}$.

י. $f(x) = \frac{\sqrt{3+x}}{\sqrt{1-x}}$.

יא. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$.

יב. $f(x) = \frac{\sqrt{-x}}{1+2\sqrt{-x}}$.

פתרון לתרגילי נגזרת

א. $f'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}}$.

ב. $f'(x) = \frac{-15}{2\sqrt{1-3x}}$.

ג. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

ד. $f'(x) = 1.5\sqrt{x} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$.

ה. $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}} + 6x$.

ו. $f'(x) = \frac{(2x-1)(10x+7)}{2\sqrt{1+x}}$.

ז. $f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$.

ח. $f'(x) = \frac{1-3x^2}{2\sqrt{x}(1+x^2)^2}$.

ט. $f'(x) = \frac{3(x+1)}{(1+2x)\sqrt{1+2x}}$.

י. $f'(x) = \frac{2}{(1-x)\sqrt{1-x}\sqrt{3+x}} = \frac{2}{\sqrt{(1-x)^3}\sqrt{3+x}}$.

יא. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$.

יב. $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{-x}(1+2\sqrt{-x})^2}$.

חקירה מלאה של פונקציית שורש

צפה בסרטונים המסבירים על נקודות קיצון קצה והשלבים למציאתן.
בסרטון נמצא את נקודות הקיצון של הפונקציות הבאות:

$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2+1}$.

$f(x) = \frac{\sqrt{-x+8}}{\sqrt{x-4}}$.

$f(x) = \sqrt{x}$.

שלבים למציאת נקודות קיצון קצה

- נמצא את תחום ההגדרה של הפונקציה
  - אם תחום ההגדרה הוא מהסוג $x \le a$ או מהסוג $x \ge a$ אז תהיה נקודת קיצון קצה ב-a. רק נותר לנו לקבוע את סוגה (מינימום קצה או מקסימום קצה)
  - אם תחום ההגדרה הוא מהסוג $x < a$ או מהסוג $x > a$ אז תהיה ב $x = a$ או אסימפטוטה אנכית או נקודת אי רציפות סליקה ("חור"). רק נותר לנו לקבוע איזה מבין השניים.
- נגזור את הפונקציה ונחפש את המאפסים של הנגזרת. ערכי ה-x המאפסים את הנגזרת הן הנקודות החשודות לקיצון (מקומיות).
- נבנה טבלה לקביעת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
  - לטבלה נכניס את תחום ההגדרה ואת הנקודות החשודות לקיצון.
  - נציב בנגזרת ערכי x מכל אחד מהתחומים שבטבלה כדי לקבוע את סימני הנגזרת.
- נסווג את סוג נקודות הקיצון על פי תחומי העלייה והירידה. גם את נקודות הקיצון המקומיות (אם יש כאלה) וגם את נקודות קיצון הקצה (אם יש כאלה).
- נמצא את ערכי ה-y של נקודות הקיצון.
- נגיש תשובה סופית.

תרגילי חקירה

5. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{8\sqrt{x}}{3+x^2}$.
   א. מצא את תחום ההגדרה.
   ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים (אם יש כאלה).
   ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
   ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
   ה. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים .
   ו. שרטט את הפונקציה.

6. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$.
   א. מצא את תחום ההגדרה.
   ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
   ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
   ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).
   ה. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים .
   ו. שרטט את הפונקציה.

7. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{x-1}}+3$.
   א. מצא את תחום ההגדרה.
   ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים אם יש כאלה.
   ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
   ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
   ה. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
   ו. שרטט את הפונקציה.

8. נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{-x^2+2x+15}$.
   א. מצא את תחום ההגדרה.
   ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים (אם יש כאלה).
   ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
   ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
   ה. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
   ו. שרטט את הפונקציה.

9. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2x}{x-\sqrt{x}}+2$.
   א. מצא את תחום ההגדרה.
   ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים אם יש כאלה.
   ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה(אם יש כאלה).
   ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
   ה. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
   ו. שרטט את הפונקציה.

10. נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{x^2-6x+8}$.
א. מצא את תחום ההגדרה.
ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים (אם יש כאלה).
ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה .
ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ה. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
ו. שרטט את הפונקציה.

11. נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{x^2+6}$.
א. מצא את תחום ההגדרה.
ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים (אם יש כאלה).
ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה .
ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ה. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
ו. שרטט את הפונקציה.

12. נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{\frac{x}{x-1}}$.
א. מצא את תחום ההגדרה.
ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה .
ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).
ה. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים .
ו. שרטט את הפונקציה.

13. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-2x-15}}{x-3}$.
א. מצא את תחום ההגדרה.
ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים (אם יש כאלה).
ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה .
ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ה. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
ו. שרטט את הפונקציה.

14. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{3-3x}{\sqrt{x^2-2x+9}}+1$.
א. מצא את תחום ההגדרה.
ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים (אם יש כאלה).
ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה (אם יש כאלה).
ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).
ה. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
ו. שרטט את הפונקציה.

15. נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{(x+3)(x-1)}$.
א. מצא את תחום ההגדרה.
ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים (אם יש כאלה).
ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה .
ה. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים .
ו. שרטט את הפונקציה.
ז. נתונה הפונקציה $g(x)=\sqrt{x+3}\sqrt{x-1}$. האם הפונקציה $g(x)$ זהה לפונקציה $f(x)$? אם לא ,שרטט את הפונקציה $g(x)$ וציין את ההבדל ביניהם.

16. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x-5}{\sqrt{x^2-25}}$.
א. מצא את תחום ההגדרה.
ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים .
ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה. (אם יש כאלה).
ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה .
ה. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
ו. שרטט את הפונקציה.
ז. תלמיד שקיבל משימה לחקור את הפונקציה, צמצם אותה באופן הבא:

$$f(x)=\frac{x-5}{\sqrt{x^2-25}}=\frac{x-5}{\sqrt{(x-5)(x+5)}}=\frac{\sqrt{(x-5)}^2}{\sqrt{(x-5)}\cdot\sqrt{(x+5)}}=\frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{x+5}}$$

ורק אז פתר את סעיפים **א** עד **ו'** כלומר חקר את הפונקציה המצומצמת (אשר לה הוא קרא $g(x)$).
שרטט את הפונקציה המצומצמת ($g(x)=\frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{x+5}}$) מבלי לחקור אותה מחדש.

5. תשובות:

א. $x \geq 0$.

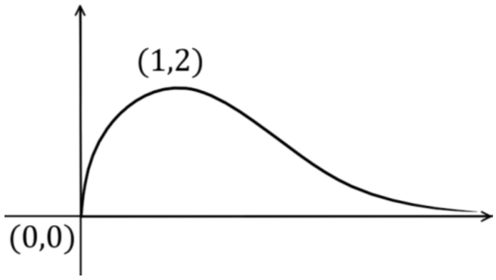
ב. אין אסימפטוטה אנכית. אסימפטוטה אופקית: $y = 0$.

ג. נקודת מקסימום: $(1,2)$, נקודת מינימום קצה: $(0,0)$.

ד. תחום עליה: $0 < x < 1$, תחום ירידה: $x > 1$.

ה. $(0,0)$.

ו. שרטוט:



6. תשובות:

א. $x \geq 0$, $x \neq 1$.

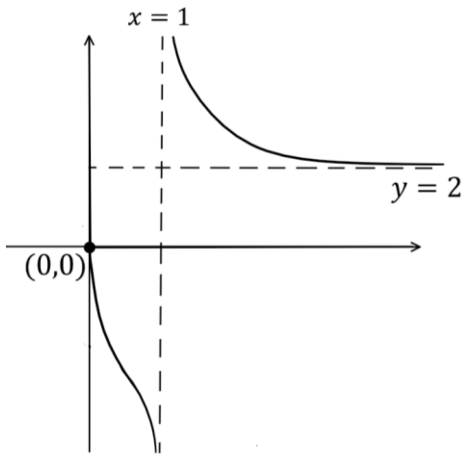
ב. אסימפטוטה אנכית $x = 1$. אסימפטוטה אופקית: $y = 2$.

ג. נקודת מקסימום קצה: $(0,0)$.

ד. תחומי ירידה: $0 < x < 1$, $x > 1$. תחום עליה: אין.

ה. $(0,0)$.

ו. שרטוט:



7. תשובות:

א. $1 < x \leq 4$

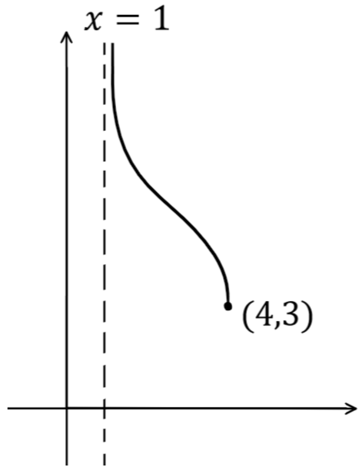
ב. אסימפטוטה אנכית $x = 1$. אין אסימפטוטה אופקית.

ג. נקודת מינימום קצה: $(4,3)$.

ד. תחומי ירידה: $1 < x < 4$. תחום עליה: אין.

ה. אין חיתוך עם הצירים.

ו. שרטוט:



8. תשובות:

א. $-3 \le x \le 5$

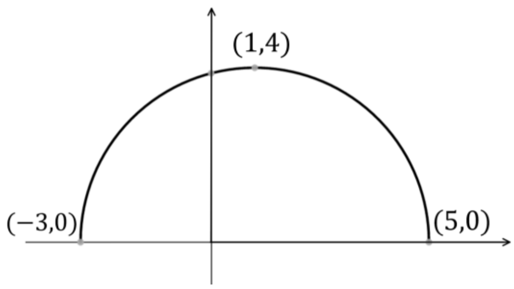
ב. אין אסימפטוטה אנכית. אין אסימפטוטה אופקית.

ג. נקודת מקסימום: $(1,4)$, נקודות מינימום קצה: $(-3,0)$, $(5,0)$.

ד. תחום ירידה: $1 < x < 5$. תחום עליה: $-3 < x < 1$.

ה. $(-3,0)$, $(5,0)$, $(0,\sqrt{15})$.

ו. שרטוט:



9. תשובות:

א. $x > 0$, $x \neq 1$.

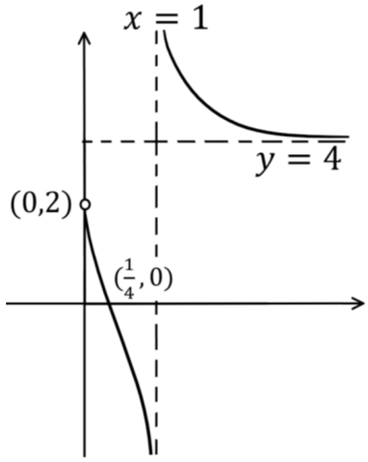
ב. אסימפטוטה אנכית $x = 1$.נקודת אי רציפות סליקה: $(0,2)$.
אסימפטוטה אופקית $y = 4$.

ג. אין נקודות קיצון.

ד. תחום ירידה: $0 < x < 1$, $x > 1$. תחום עליה: אין.

ה. $(\frac{1}{4}, 0)$.

ו. שרטוט:



10. תשובות:

א. $x \geq 4$ או $x \leq 2$.

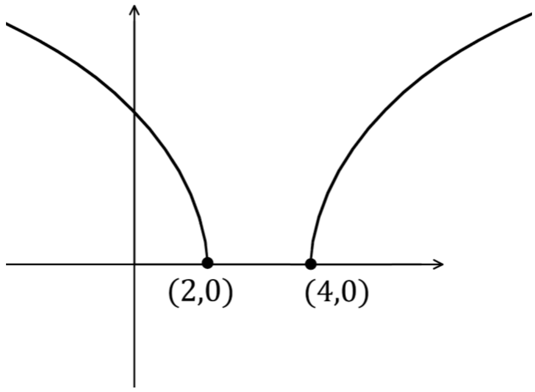
ב. אין אסימפטוטה אנכית. אין אסימפטוטה אופקית.

ג. נקודות מינימום קצה: $(2,0)$, $(4,0)$.

ד. תחום ירידה: $x < 2$. תחום עליה: $x > 4$.

ה. $(4,0)$, $(2,0)$, $(0,2\sqrt{2})$.

ו. שרטוט:



11. תשובות:

א. כל x.

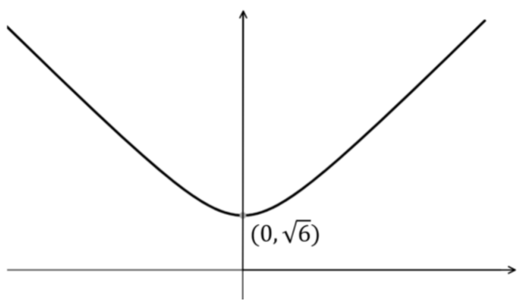
ב. אין אסימפטוטה אנכית. אין אסימפטוטה אופקית.

ג. נקודת מינימום: $(0,\sqrt{6})$.

ד. תחום ירידה: $x < 0$. תחום עליה: $x > 0$.

ה. $(0,\sqrt{6})$.

ו. שרטוט:



12. תשובות:

א. $x > 1$ או $x \leq 0$.

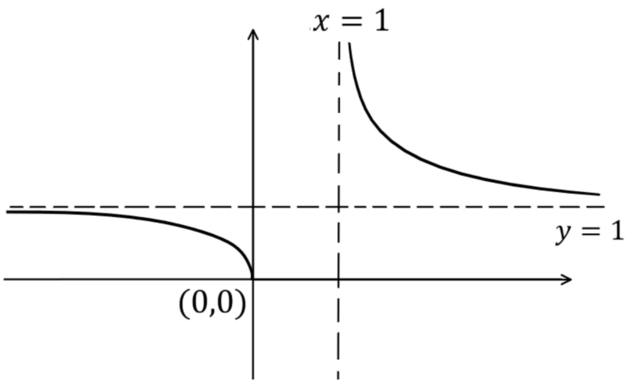
ב. אסימפטוטה אנכית $x = 1$. אסימפטוטה אופקית $y = 1$.

ג. נקודת מינימום קצה: $(0,0)$.

ד. תחום ירידה: $x > 1$ או $x < 0$. תחום עליה: אין.

ה. $(0,0)$.

ו. שרטוט:



13. תשובות:

א. $x \geq 5$ או $x \leq -3$.

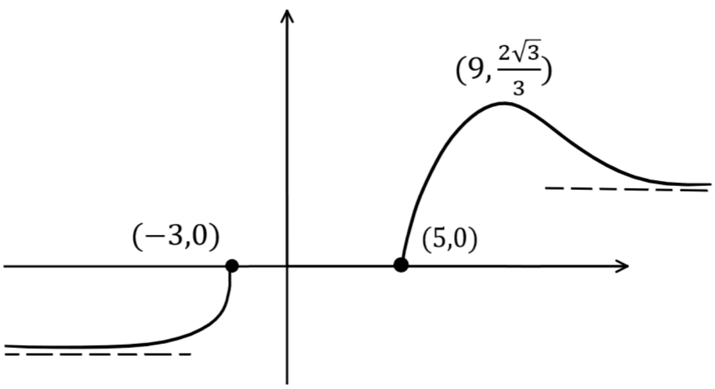
ב. אין אסימפטוטה אנכית. אסימפטוטות אופקיות: $\underset{x\to\infty}{y = 1}$, $\underset{x\to-\infty}{y = -1}$.

ג. נקודת מינימום קצה: $(5,0)$. נקודת מקסימום קצה: $(-3,0)$.נקודת מקסימום $(9,\frac{2\sqrt{3}}{3})$.

ד. תחום ירידה: $x > 9$. תחום עליה: $5 < x < 9$, $x < -3$.

ה. $(5,0)$, $(-3,0)$.

ו. שרטוט:



14. תשובות:

א. כל x.

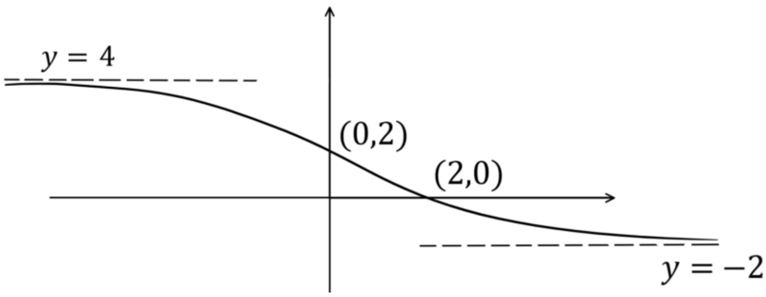
ב. אין אסימפטוטה אנכית. אסימפטוטות אופקיות: $\underset{x\to\infty}{y = -2}$, $\underset{x\to-\infty}{y = 4}$.

ג. אין נקודות קיצון.

ד. הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה

ה. $(2,0)$, $(0,2)$.

ו. שרטוט:



15. תשובות:

א. $x \geq 1$ או $x \leq -3$.

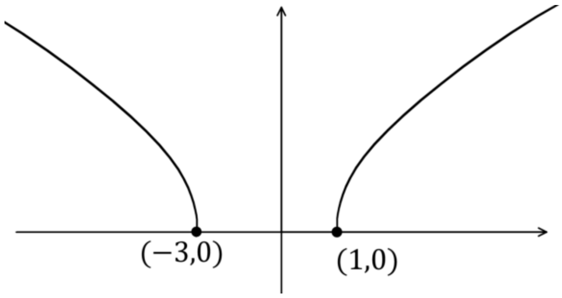
ב. אין אסימפטוטות אנכיות. אין אסימפטוטות אופקיות.

ג. יש שתי נקודות מינימום קצה: $(1,0)$, $(-3,0)$.

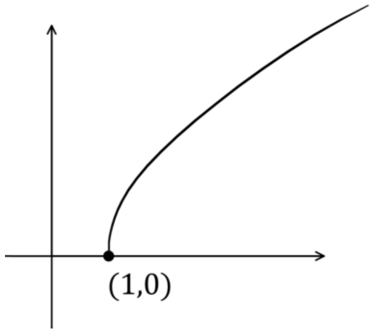
ד. תחום עליה: $x > 1$. תחום ירידה: $x < -3$.

ה. $(1,0)$, $(-3,0)$.

ו. שרטוט של $f(x)$:



ז. שרטוט של $g(x)$:



16. תשובות:

א. $x > 5$ או $x < -5$.

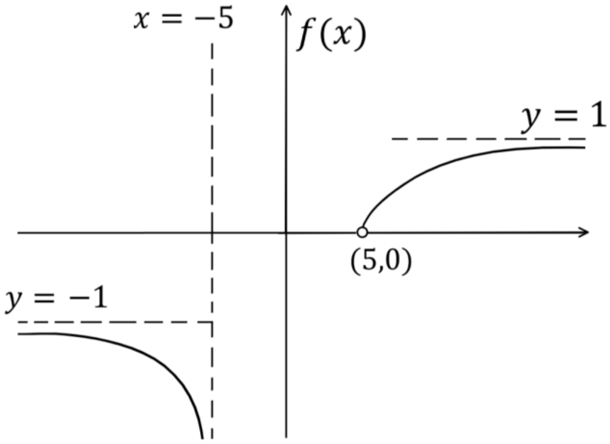
ב. אסימפטוטה אנכית $x = -5$. נקודת אי רציפות סליקה: $(5,0)$. אסימפטוטות אופקיות: $\underset{x\to\infty}{y = 1}$, $\underset{x\to-\infty}{y = -1}$.

ג. אין נקודות קיצון.

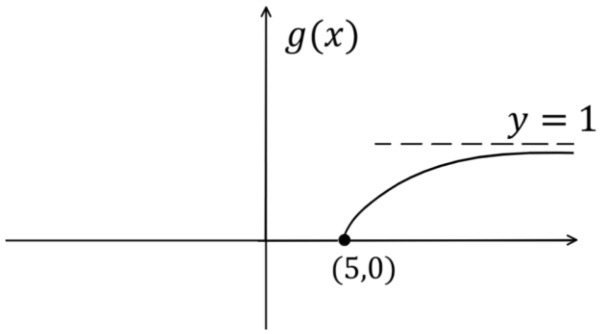
ד. תחום עליה: $x > 5$. תחום ירידה: $x < -5$.

ה. אין חיתוך עם הצירים.

ו. שרטוט של $f(x)$:



ז. שרטוט של $g(x)$:



העלאת פונקציה בחזקת n

$g(x) = f^n(x)$

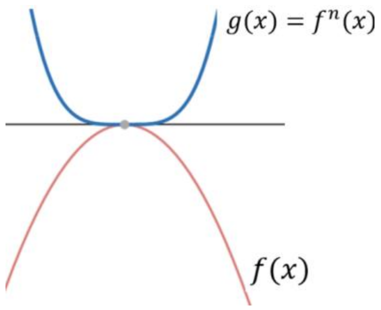
דגשים

1. כל נקודה (x_0, y_0) בפונקציה $f(x)$ תהפוך להיות $(x_0, {y_0}^n)$ בפונקציה $g(x)$.
2. תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
3. נקודות ערכי ה-y שלהן מקיימות $y \neq 0$, $-1 < y < 1$ מתקרבות לציר ה-x .
   נקודות ערכי ה-y שלהן מקיימות $y > 1$ או $y < -1$ מתרחקות מציר ה-x .
4. אסימפטוטה אופקית $y = a$ תהפוך להיות $\mathrm{y} = a^n$
5. אם לפונקציה $f(x)$ אין אסימפטוטה אופקית אז גם לפונקציה $g(x)$ אין אסימפטוטה אופקית.
6. אם לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אנכית $x = a$ אז גם לפונקציה $g(x)$ יש אסימפטוטה אנכית $x = a$.

דגשים עבור n זוגי

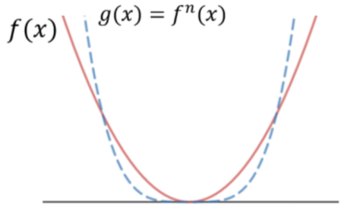
1. נקודות אשר היו מתחת לציר ה-x יעלו אל מעל ציר ה-x.
2. נקודות אשר ערכי ה-y שלהן שווים ל-1 או 0 לא "זזות" ממקומן.
   שיעורי y השווים ל- -1 הופכים ל 1.
3. אם לפונקציה $f(x)$ יש נקודת חיתוך עם ציר ה-x $(a, 0)$ אז לפונקציה $g(x)$ יש נקודת מינימום ב-$(a, 0)$.
4. אם לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון הנמצאת **מתחת** לציר ה-x (a, b) אז לפונקציה $g(x)$ יש נקודת קיצון מעל ציר ה-x ב-(a, b^n) אך מסוג אחר- כלומר נקודת מינימום תהפוך לנקודת מקסימום ונקודת מקסימום תהפוך לנקודת מינימום.

*<u>הערה</u>: סעיף 4 נכון גם לנקודת מקסימום שנמצאת מתחת לציר ה-x (ראה איור):



5. אם לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון הנמצאת **מעל** לציר ה-x (a, b) אז לפונקציה $g(x)$ יש נקודת קיצון מעל ציר ה-x ב-(a, b^n) מאותו הסוג- כלומר נקודת מינימום תישאר מינימום ונקודת מקסימום תישאר מקסימום.

*<u>הערה</u>: סעיף 5 נכון גם לנקודת מינימום שנמצאת על ציר ה-x (ראה איור):

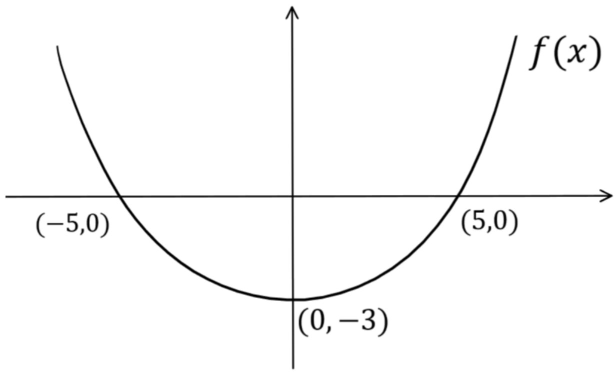


דגשים עבור n אי זוגי

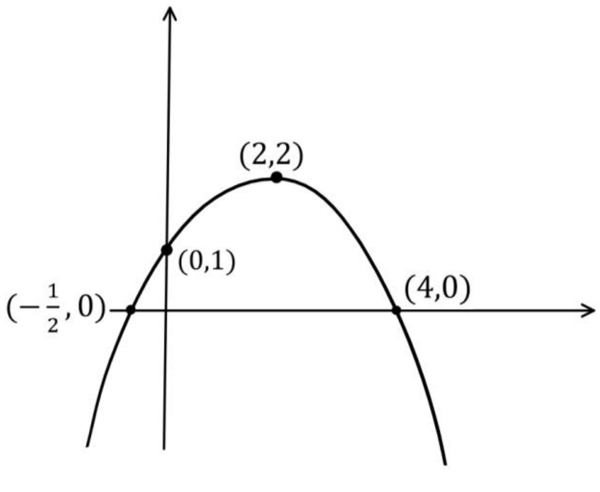
1. נקודות אשר ערכי ה-y שלהן שווים ל-1,0 או -1 לא "זזות" ממקומן.
2. אם לפונקציה $f(x)$ יש נקודת חיתוך עם ציר ה-x $(a,0)$ אז לפונקציה $g(x)$ יש נקודת פיתול בעלת שיפוע אפס ב-$(a,0)$.
3. אם לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון x (a,b) אז לפונקציה $g(x)$ יש נקודת קיצון ב-(a,b^n) מאותו הסוג- כלומר נקודת מינימום תישאר מינימום ונקודת מקסימום תישאר מקסימום.

שאלות

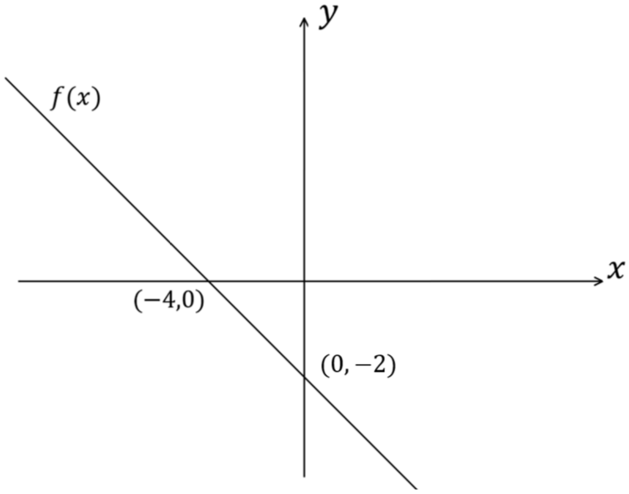
1. הפונקציה $g(x)$ מוגדרת באמצעות הפונקציה $f(x)$ באופן הבא: $g(x)=f^n(x)$. בשרטוט שלפניך נתון גרף הפונקציה $f(x)$ שרטט את הפונקציה $g(x)$. הבחן בין שני מקרים (1) n זוגי (2) n אי זוגי.



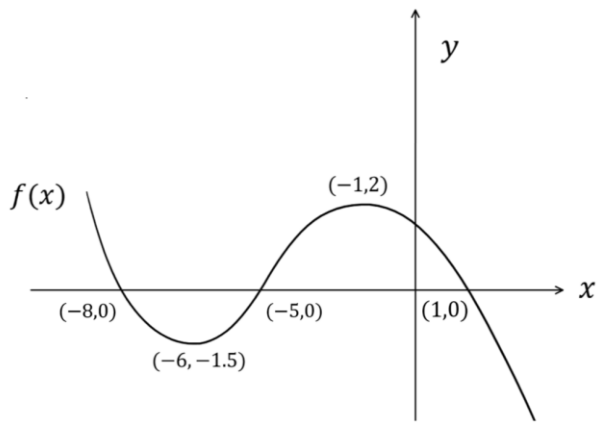
2. הפונקציה $g(x)$ מוגדרת באמצעות הפונקציה $f(x)$ באופן הבא: $g(x)=f^n(x)$. בשרטוט שלפניך נתון גרף הפונקציה $f(x)$ שרטט את הפונקציה $g(x)$. הבחן בין שני מקרים (1) n זוגי (2) n אי זוגי.



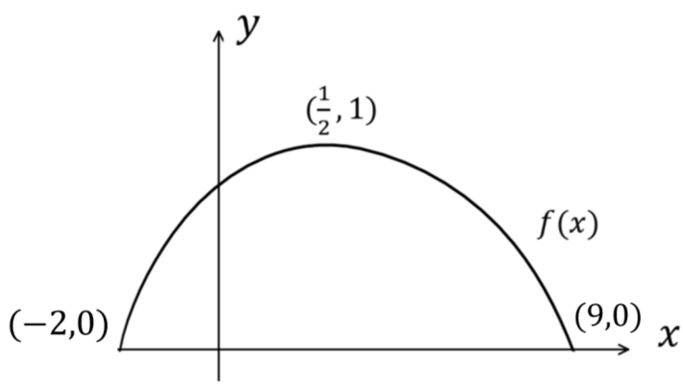
3. הפונקציה $g(x)$ מוגדרת באמצעות הפונקציה $f(x)$ באופן הבא:
$g(x) = f^n(x)$. בשרטוט שלפניך נתון גרף הפונקציה $f(x)$ שרטט את הפונקציה $g(x)$. הבחן בין שני מקרים (1) n זוגי (2) n אי זוגי.



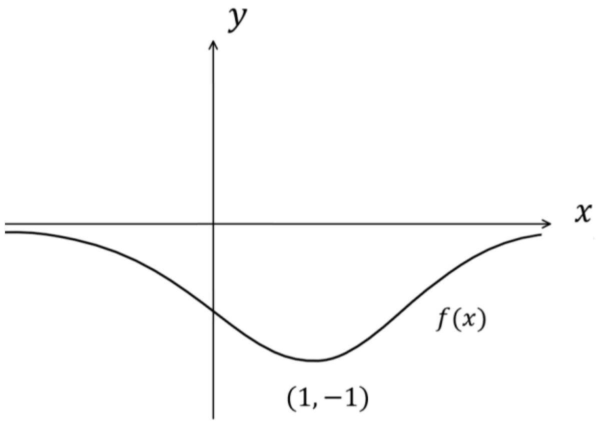
4. הפונקציה $g(x)$ מוגדרת באמצעות הפונקציה $f(x)$ באופן הבא:
$g(x) = f^n(x)$. בשרטוט שלפניך נתון גרף הפונקציה $f(x)$ שרטט את הפונקציה $g(x)$. הבחן בין שני מקרים (1) n זוגי (2) n אי זוגי.



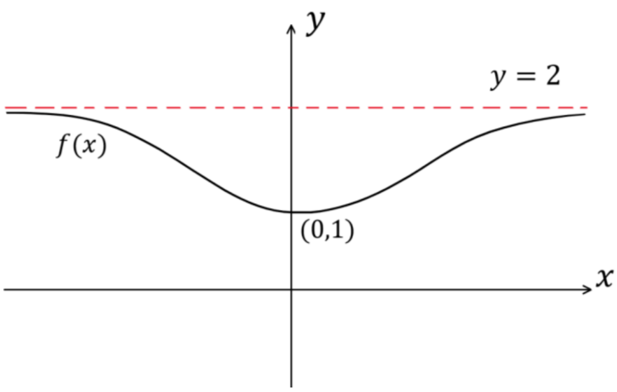
5. הפונקציה $g(x)$ מוגדרת באמצעות הפונקציה $f(x)$ באופן הבא: $g(x) = f^n(x)$. בשרטוט שלפניך נתון גרף הפונקציה $f(x)$ שרטט את הפונקציה $g(x)$.



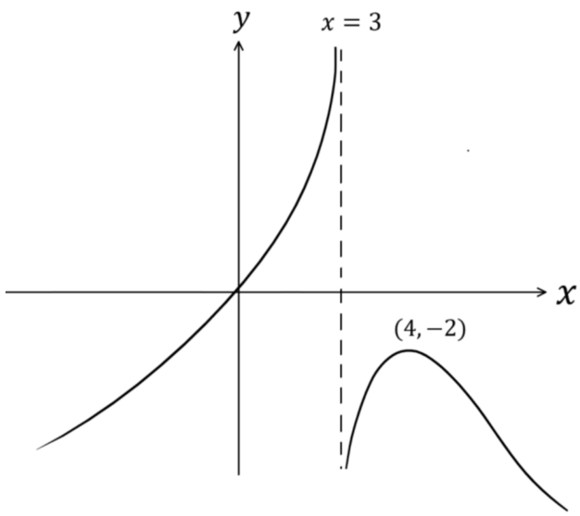
6. הפונקציה $g(x)$ מוגדרת באמצעות הפונקציה $f(x)$ באופן הבא:
$g(x) = f^n(x)$. בשרטוט שלפניך נתון גרף הפונקציה $f(x)$ שרטט את הפונקציה $g(x)$. הבחן בין שני מקרים (1) n זוגי (2) n אי זוגי.



7. הפונקציה $g(x)$ מוגדרת אסימפטוטה אופקית באמצעות הפונקציה $f(x)$ באופן הבא: $g(x) = f^n(x)$. בשרטוט שלפניך נתון גרף הפונקציה $f(x)$ שרטט את הפונקציה $g(x)$.

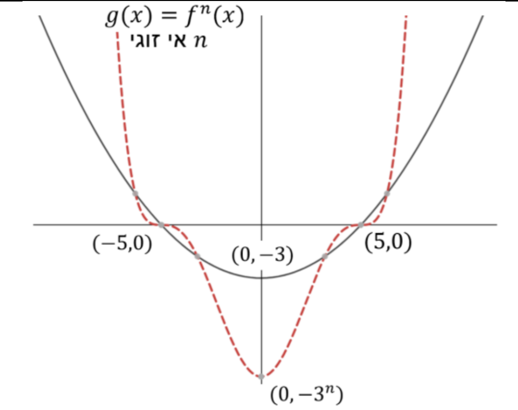
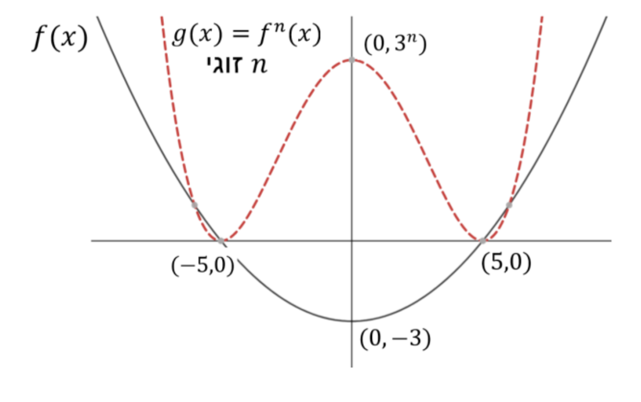


8. הפונקציה $g(x)$ מוגדרת באמצעות הפונקציה $f(x)$ באופן הבא: $g(x) = f^n(x)$. בשרטוט שלפניך נתון גרף הפונקציה $f(x)$ שרטט את הפונקציה $g(x)$. הבחן בין שני מקרים (1) n זוגי (2) n אי זוגי.

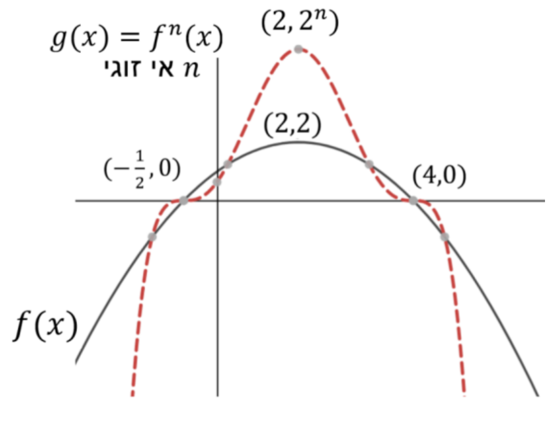
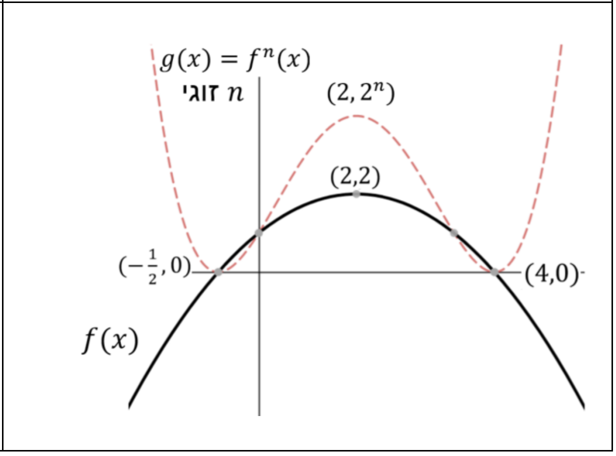


תשובות

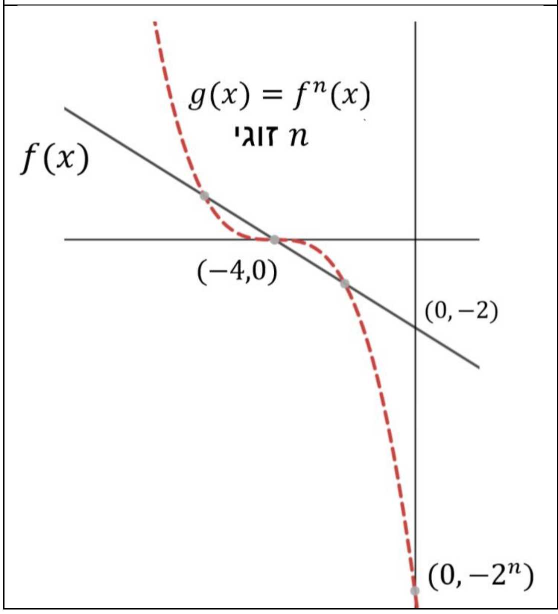
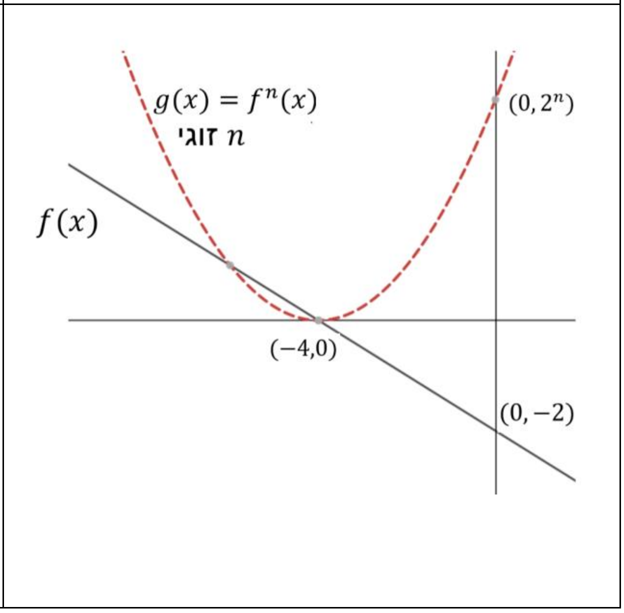
1.

n אי-זוגי	n זוגי
	

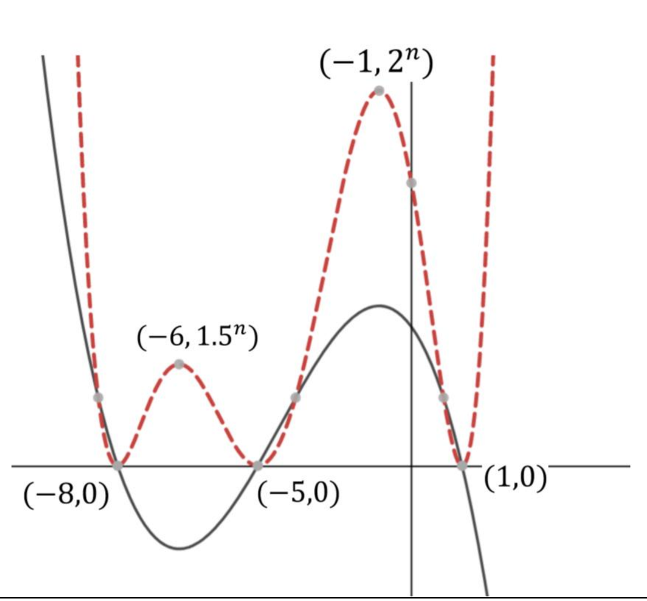
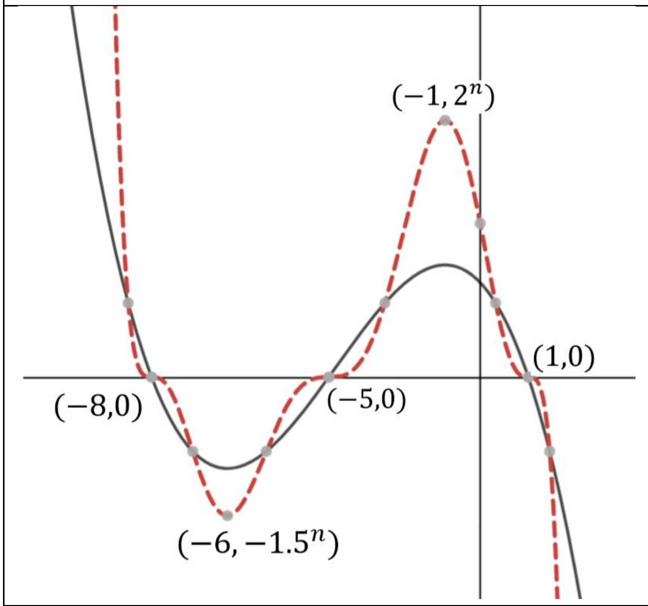
2.

n אי-זוגי	n זוגי
	

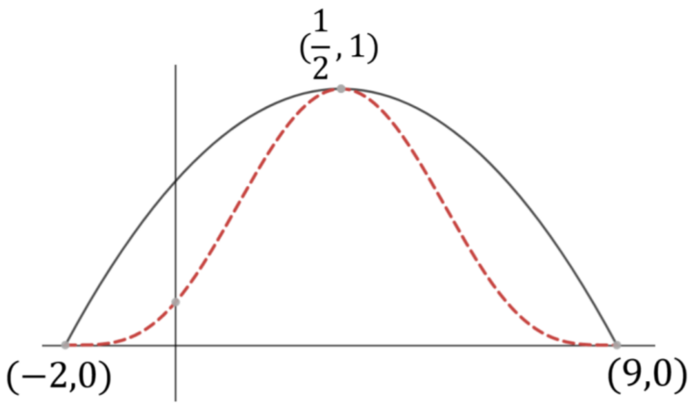
3.

n אי-זוגי	n זוגי
	

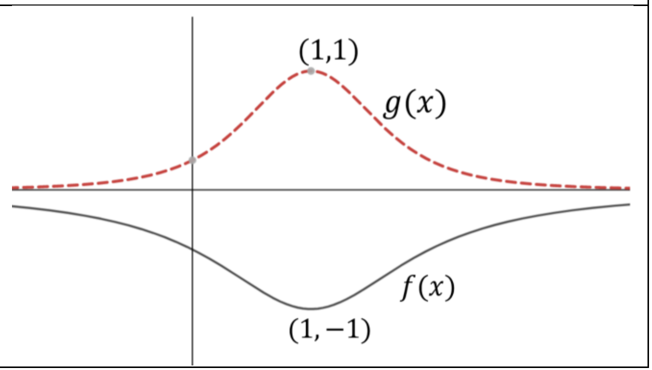
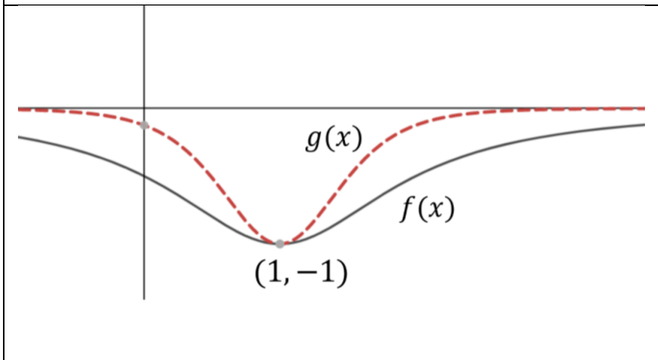
.4

n זוגי	n אי-זוגי
	

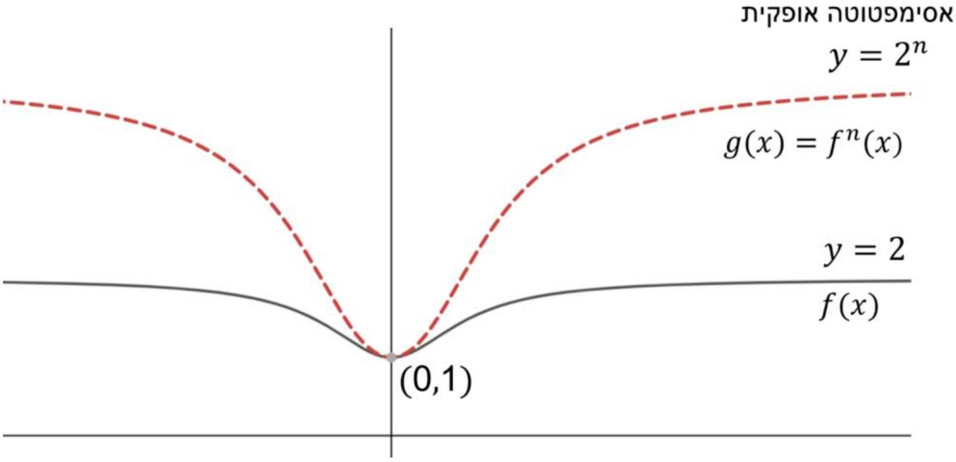
.5



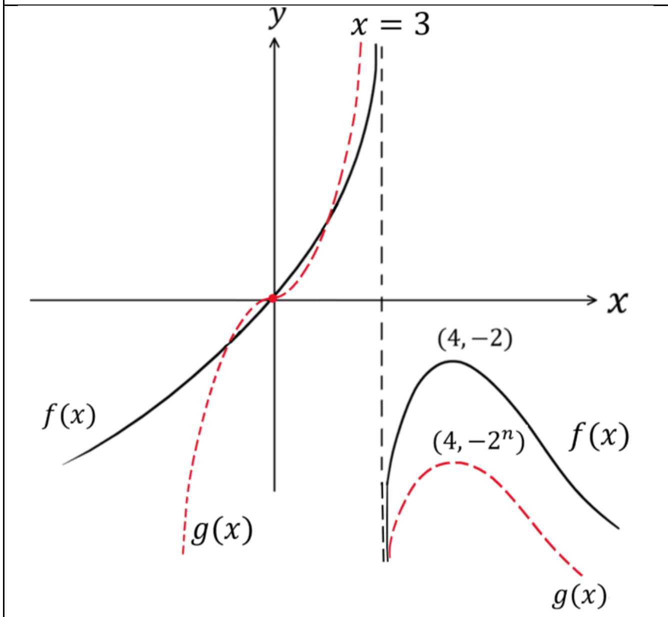
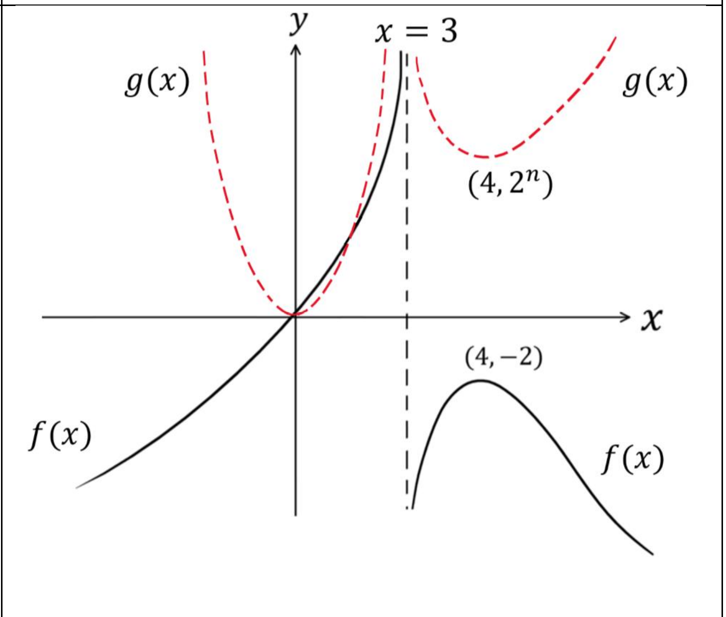
.6

n זוגי	n אי-זוגי
	

.7



.8

n אי-זוגי	n זוגי
	

אינטגרלים

מציאת הפונקציה הקדומה (לא כולל מציאת קבוע האינטגרציה)

חוקי אינטגרלים (אינטגרלים בסיסיים).

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int ax^n\,dx = a\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int \frac{x^n}{a}\,dx = \frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{a} + c$$

$$\int a\,dx = ax + c$$

צפה בסרטון ההסבר וראה כיצד מצאנו את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{x^4}{2}\,dx = \frac{x^5}{10} + c$$

$$\int 7\,dx = 7x + c$$

$$\int -2\,dx = -2x + c$$

$$\int 1\,dx = x + c$$

$$\int 10\,dx = 10x + c$$

$$\int x^2 + 4\,dx = \frac{x^3}{3} + 4x + c$$

$$\int 8x - 2 - 9x^2\,dx = 4x^2 - 2x - 3x^3 + c$$

$$\int x^4\,dx = \frac{x^5}{5} + c$$

$$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + c$$

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c$$

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\int 3x^2\,dx = x^3 + c$$

$$\int 8x^3\,dx = 2x^4 + c$$

$$\int 3x^5\,dx = \frac{1}{2}x^6 + c$$

$$\int \frac{x^2}{3}\,dx = \frac{x^3}{9} + c$$

תרגיל 1 - מצא את האינטגרלים הבאים.

1. $\int x^7\,dx =$
2. $\int x\,dx =$
3. $\int \frac{2x^2}{5}\,dx =$
4. $\int 8\,dx =$
5. $\int \frac{1}{3}x\,dx =$
6. $\int \frac{1}{3}x^5\,dx =$
7. $\int \frac{3}{7}x^5 + 32x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x - \frac{1}{8}\,dx =$
8. $\int \frac{2x^2}{3} - mx^3 - \frac{3mx}{n} - n =$

פתרון תרגיל 1

1. $\frac{x^8}{8}+c$
2. $\frac{x^2}{2}+c$
3. $\frac{2x^3}{15}+c$
4. $8x+c$
5. $\frac{1}{6}x^2+c$
6. $\frac{1}{18}x^6+c$
7. $\frac{x^6}{14}+8x^4-\frac{x^3}{6}+\frac{3x^2}{2}-\frac{x}{8}+c$
8. $\frac{2x^3}{9}-\frac{mx^4}{4}-\frac{3mx^2}{2n}-nx+c$

תרגיל 2 - מצא את האינטגרלים הבאים.

בתרגילים הבאים יש להביא את הביטויים לצורה מוכר של תבנית שאנו יודעים לבצע לה אינטגרל, ורק אז לבצע אינטגרל.

1. $\int \frac{1}{x^5}dx =$
2. $\int \frac{1}{x^2}dx =$
3. $\int \frac{2}{x^3}-\frac{1}{2}dx =$
4. $\int \frac{5}{3x^4}dx =$
5. $\int -\frac{1}{5x^2}dx =$
6. $\int \frac{1-x^2}{x^2}dx =$
7. $\int \frac{2x^5-x^2+1}{x^4}dx =$
8. $\int \sqrt{x}\,dx =$
9. $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx =$
10. $\int \frac{2}{3\sqrt{x}}dx =$
11. $\int 3\sqrt{x}+1dx =$

תרגיל 2 - פתרון.

1. $-\frac{1}{4x^4}+c$
2. $-\frac{1}{x}+c$
3. $-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}x+c$
4. $-\frac{5}{9x^3}+c$
5. $\frac{1}{5x}+c$
6. $-\frac{1}{x}-x+c$
7. $x^2+\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+c$
8. $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+c$
9. $2\sqrt{x}+c$
10. $\frac{4\sqrt{x}}{3}+c$
11. $2x\sqrt{x}+x+c=2\sqrt{x^3}+x+c$

אינטגרל של פונקציה מורכבת

<u>כלל נוסף:</u>

$$\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$$

<u>צפה בסרטון ההסבר שבו אני מראה איך לפתור את האינטגרלים הבאים:</u>

$\int (4x-3)^3\,dx =$

$\int \sqrt{3x+2}\,dx =$

$\int \frac{1}{\sqrt{3x+2}}\,dx =$

$\int (3x+2)^4\,dx =$

$\int (-x+2)^3\,dx =$

$\int (4+2x)^2\,dx =$

$\int (5-x)^4\,dx =$

תרגיל 3 - מצא את האינטגרלים הבאים.

1. $\int 8(2x+2)^3+2\,dx =$
2. $\int -(2-x)^4-x\,dx =$
3. $\int 5(x+1)^4-3x^2+1\,dx =$
4. $\int \frac{-40}{(5x+1)^4}\,dx =$
5. $\int \frac{16}{5(2x+2)^3}+x\,dx =$
6. $\int 24\sqrt{4x+1}\,dx$
7. $\int \frac{3}{2\sqrt{6x+2}}\,dx =$
8. $\int \frac{4(3x+1)^3-12}{(3x+1)^3}\,dx =$

תרגיל 3 - פתרון.

1. $(2x+2)^4+2x\ +c$
2. $\frac{1}{5}(2-x)^5-\frac{1}{2}x^2\ +c$
3. $(x+1)^5-x^3+x\ +c$
4. $\frac{8}{3(5x+1)^3}+c$
5. $-\frac{4}{5(2x+2)^2}+\frac{1}{2}x^2\ +c$
6. $4(4x+1)\sqrt{4x+1}+c = 4\sqrt{(4x+1)^3}+c$
7. $\frac{1}{2}\sqrt{6x+2}+c$
8. $4x+\frac{2}{(3x+1)^2}+c$

זיהוי הנגזרת הפנימית

$$\int f'(x)(f(x))^n\,dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{(n+1)} + c$$

<u>צפה בסרטון ההסבר שבו אני מראה איך לפתור את האינטגרלים הבאים:</u>

$\int 6x(3x^2+2)^4\,dx =$

$\int -3x^2(-x^3+2)^3\,dx =$

$\int (4x+3)(2x^2+3x-1)^2\,dx =$

$\int (x^3+7)(\frac{1}{4}x^4+7x)^4\,dx =$

$\int 8x(x^2-3)^3\,dx =$

$\int (6x^2-2)(x^3-x)^3\,dx =$

$\int (9-12x)(2x^2-3x-1)^2\,dx =$

$\int x(x^2-3)^3\,dx =$

$\int 2x^2(x^3-1)^3\,dx =$

$\int (x^3+4)(x^4+16x)^4\,dx =$

$\int 3f'(x)(f(x))^2\,dx$

$\int f'(x)f(x)\,dx$

תרגיל 4 - מצא את האינטגרלים הבאים.

1. $\int -2x(5-x^2)^5\,dx =$
2. $\int 6x^2(4+2x^3)^2\,dx =$
3. $\int (2x+1)(x^2+x-2)^7\,dx =$
4. $\int (10x^4-2)(x^5-x)^3\,dx =$
5. $\int (8x^3-12)(3x-\frac{1}{2}x^4)^3\,dx =$
6. $\int -12x(3x^2-4)^3\,dx =$
7. $\int (x-2)(x^2-4x)^6\,dx =$
8. $\int 3x^2\sqrt{x^3-1}\,dx =$
9. $\int 2x^5\sqrt{x^6+3}\,dx =$
10. $\int (\frac{1}{2\sqrt{x}}-3)(2\sqrt{x}-6x+2)^4\,dx =$
11. $\int f'(x)(f(x))^3\,dx$
12. $\int 2f'(x)f(x)\,dx$

תרגיל 4 - פתרון.

1. $\frac{1}{6}(5-x^2)^6+c$
2. $\frac{1}{3}(4+2x^3)^3+c$
3. $\frac{1}{8}(x^2+x-2)^8+c$
4. $\frac{1}{2}(x^5-x)^4+c$
5. $-(3x-\frac{1}{2}x^4)^4+c$
6. $-\frac{1}{2}(3x^2-4)^4+c$
7. $\frac{1}{14}(x^2-4x)^7+c$
8. $\frac{2}{3}(x^3-1)\sqrt{x^3-1}+c=\frac{2}{3}\sqrt{(x^3-1)^3}+c$
9. $\frac{2}{9}(x^6+3)\sqrt{x^6+3}+c=\frac{2}{9}\sqrt{(x^6+3)^3}+c$
10. $\frac{1}{10}(2\sqrt{x}-6x+2)^5+c$
11. $\frac{1}{4}f^4(x)+c$
12. $f^2(x)+c$

<u>לפני שתפתרו את תרגיל 5 צפו בסרטון ההקדמה שבו נסביר כיצד לבצע את האינטגרל הבא:</u>

$$\boxed{\int \frac{4x^3-2x}{(x^4-x^2+1)^6}dx=?}$$

תרגיל 5 - מצא את האינטגרלים הבאים.

1. $\int \frac{3x^2}{(x^3+2)^4}dx=$
2. $\int \frac{2x}{(x^2-1)^2}dx=$
3. $\int \frac{3x^2-1}{\sqrt{x^3-x+1}}dx=$
4. $\int \frac{x}{(4-3x^2)^5}dx=$
5. $\int \frac{-x^2}{\sqrt{x^3-1}}dx=$
6. $\int \frac{6f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx=$

תרגיל 5 - פתרונות.

1. $-\frac{1}{3(x^3+2)^3}+c$

2. $-\frac{1}{x^2-1}+c$

3. $2\sqrt{x^3-x+1}+c$

4. $\frac{1}{24(4-3x^2)^4}$

5. $-\frac{2}{3}\sqrt{x^3-1}+c$

6. $12\sqrt{f(x)}+c$

אינטגרלים של פונקציות טריגונומטריות

$\int sin(ax+b)\,dx = -\frac{cos(ax+b)}{a}+c$
$\int cos(ax+b)\,dx = \frac{sin(ax+b)}{a}+c$
$\int \frac{1}{cos^2(ax+b)}dx = \frac{tan(ax+b)}{a}+c$
$\int \frac{1}{sin^2(ax+b)}dx = -\frac{cot(ax+b)}{a}+c$

לפני תרגיל 1 צפה בסרטון ההסבר שבו נפתור את התרגילים הבאים:

$\int sin(2x+1)\,dx =$ $\quad\int cos(x+2)\,dx =$ $\quad\int \frac{1}{cos^2(4x-2)}dx =$ $\quad\int \frac{1}{sin^2(3x+1)}dx =$

$\int sin(1-x)\,dx =$ $\quad\int cos(0.5x)\,dx =$ $\quad\int \frac{1}{cos^2(2x-1)}dx =$ $\quad\int -\frac{1}{sin^2(x+1)}dx =$

$\int sin(2+\frac{1}{3}x)\,dx =$ $\quad\int cos(x)\,dx =$ $\quad\int \frac{3}{cos^2(-x)}dx =$ $\quad\int \frac{1}{sin^2(x)}dx =$

תרגיל 1-אינטגרלים בסיסיים של פונקציות טריגונומטריות

1. $\int sin(3x-\frac{1}{4}\pi)+4+x\,dx =$

2. $\int 3sin(-\pi-2x)+(1-2x)^3+1\,dx =$

3. $\int 2\sin x+2\pi\,dx =$

4. $\int cos(6x+2)\,dx =$

5. $\int 4cos(x+\frac{1}{3}\pi)+\sin x\,dx =$

6. $\int cos\,x-sin\,x\,dx =$

7. $\int \frac{1}{\cos^2 5x}dx =$

8. $\int \frac{3}{cos^2 x}-3sin\,x+1\,dx =$

9. $\int -\frac{1}{cos^2 x}+\cos x-1\,dx =$

10. $\int \frac{1}{sin^2(\frac{1}{3}x-\pi)}dx =$

11. $\int -\frac{1}{sin^2 x}-\pi\,dx =$

תרגיל 1-פתרון- אינטגרלים בסיסיים של פונקציות טריגונומטריות

1. $-\frac{1}{3}cos(3x-\frac{1}{4}\pi)+4x+\frac{1}{2}x^2+c$
2. $1.5\,cos(-\pi-2x)-\frac{1}{8}(1-2x)^4+x+c$
3. $-2\,cos\,x+2\pi x+c$
4. $\frac{1}{6}sin(6x+2)+c$
5. $4\,sin(x+\frac{1}{3}\pi)-cos\,x+c$
6. $sin\,x+cos\,x+c$
7. $\frac{1}{5}\tan 5x+c$
8. $3\tan x+3\cos x+x+c$
9. $-\tan x+sin\,x-x+c$
10. $-3\cot(\frac{1}{3}x-\pi)+c$
11. $\cot x-\pi x+c$

תרגיל 2-אינטגרלים אשר לפני ביצועם יש להשתמש בזהויות

1. $\int \sin^2 x-\cos^2 x\,dx=$
2. $\int 6\,cos\,x\,sin\,x\;dx=$
3. $\int (cos\,x-sin\,x)^2\,dx=$
4. $\int \cos^4 x-\sin^4 x\,dx=$
5. $\int cos\,3x\,sin\,3x\,dx=$
6. $\int \cos^2 x\,dx=$
7. $\int \sin^2 x\,dx=$
8. $\int \cos^2 3x\,dx=$

תרגיל 2-פתרון- אינטגרלים אשר לפני ביצועם יש להשתמש בזהויות

1. $-\frac{1}{2}sin\,2x+c$
2. $-1.5\,cos\,2x+c$ או $3sin^2\,x+c$
3. $x+\frac{1}{2}cos\,2x+c$
4. $\frac{1}{2}sin\,2x+c$
5. $\frac{1}{6}sin^2\,3x+c$ או $-\frac{1}{12}cos\,6x+c$
6. $\frac{1}{4}sin\,2x+\frac{1}{2}x+c$
7. $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}sin\,2x+c$
8. $\frac{1}{12}sin\,6x+\frac{1}{2}x+c$

תרגיל 3-זיהוי הנגזרת הפנימית בפונקציות טריגונומטריות.

1. $\int \cos x \sin^3 x \, dx =$
2. $\int (1-sinx)(cosx+x)^2 \; dx =$
3. $\int 3\cos 3x \sin^4 3x \, dx =$
4. $\int \frac{tan^2 x}{cos^2 x} dx =$
5. $\int \frac{tanx+1}{cos^2 x} dx =$
6. $\int sin\, x\, cos^3 x \, dx =$
7. $\int \frac{sin\, x}{\sqrt{cos\, x}} dx =$

תרגיל 3-פתרון - זיהוי הנגזרת הפנימית בפונקציות טריגונומטריות.

1. $\frac{1}{4} sin^4 x + c$
2. $\frac{1}{3}(cosx+x)^3 + c$
3. $\frac{1}{5} sin^5 3x + c$
4. $\frac{1}{3} tan^3 x + c$
5. $\frac{1}{2}(tanx+1)^2 + c$
6. $-\frac{1}{4} cos^4 x + c$
7. $-\; 2\sqrt{cos\, x} + c$

זיהוי הנגזרת הפנימית של הזווית

$\int f'(x)\, sin(f(x))\, dx = -cos\big(f(x)\big) + c$
$\int f'(x)\, cos(f(x))\, dx = sin\big(f(x)\big) + c$
$\int \frac{f'(x)}{cos^2(f(x))} dx = tan\big(f(x)\big) + c$
$\int \frac{f'(x)}{sin^2(f(x))} dx = -cot\big(f(x)\big) + c$

תרגיל 4-זיהוי הנגזרת הפנימית של הזווית.

1. $\int 2x \sin(x^2)\, dx$
2. $\int (2x+3)\sin(x^2+3x)\; dx$
3. $\int x^4 \sin(x^5)\; dx$
4. $\int -2x\cos(-x^2)\; dx$
5. $\int 3\pi x^2 \cos(\pi x^3 - \pi)\; dx$
6. $\int (4x-8)\cos(4x-x^2)\; dx$
7. $\int \frac{1-x}{cos^2(x-\frac{1}{2}x^2)} dx$
8. $\int \frac{x^6}{sin^2(x^7)} dx$

תרגיל 4-פתרון-זיהוי הנגזרת הפנימית של הזווית.

1. $-cos(x^2)+c$

2. $-cos(x^2+3x)+c$

3. $-\frac{1}{5}\,cos(x^5)+c$

4. $sin(-x^2)+c$

5. $sin(\pi x^3-\pi)+c$

6. $-2sin(4x-x^2)+c$

7. $tan(x-\frac{1}{2}x^2)+c$

8. $-\frac{1}{7}\cot(x^7)+c$

מציאת פונקציה קדומה כולל מציאת קבוע האינטגרציה

1. מצא את הפונקציה $f(x)$ שנגזרתה היא $f'(x)=-3x^2-4x$, אם ידוע שהיא (הפונקציה) עוברת בנקודה $(-3,6)$.

<u>תשובה</u>: $f(x)=-x^3-2x^2-3$

2. מצא את הפונקציה $f(x)$ שנגזרתה היא $f'(x)=6(2x+2)^3+2x-1$, אם ידוע שהיא (הפונקציה) עוברת בנקודה $(-1,4)$

<u>תשובה</u>: $f(x)=\frac{3}{4}(2x+2)^4+x^2-x+2$

3. מצא את הפונקציה $f(x)$ שנגזרתה היא $f'(x)=6x(2x^2-4)^2+x$, אם ידוע שהיא (הפונקציה) עוברת בנקודה $(1,-3.5)$.

<u>תשובה</u>: $f(x)=\frac{1}{2}(2x^2-4)^3+\frac{1}{2}x^2$.

4. נתונה הנגזרת **השנייה** של הפונקציה $f(x)$: $f''(x)=1+x$. מצא את הנגזרת **הראשונה** $f'(x)$ אם ידוע שהישר $y=-3x+1$ משיק לפונקציה בנקודה שבה $x=2$.

<u>תשובה</u>: $f'(x)=\frac{1}{2}x^2+x-7$.

5. נתונה הנגזרת **השנייה** של הפונקציה $f(x)$: $f''(x)=(2-x)(x^2-4x)^2-1$. מצא את הנגזרת **הראשונה** $f'(x)$ אם ידוע שהישר $y=\frac{1}{2}x$ משיק לפונקציה בנקודה שבה $x=1$.

<u>תשובה</u>: $f'(x)=-\frac{1}{6}(x^2-4x)^3-x-3$.

6. נתונה הנגזרת **השנייה** של הפונקציה $f(x)$:
$f''(x) = 3 - 2x$. ידוע שהישר $y = -x - 17.5$ משיק לפונקציה בנקודה שבה $x = -3$.
א. מצא את הנגזרת **הראשונה** $f'(x)$.
ב. מצא את הפונקציה $f(x)$.

<u>תשובה</u>: א. $f'(x) = -x^2 + 3x + 17$.
ב. $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 1.5x^2 + 17x + 14$

7. נתונה הנגזרת **השנייה** של הפונקציה $f(x)$:
$f''(x) = 2 - 4x$. שיפוע המשיק לפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא $\frac{1}{2}$ ושיעור ה-y של נקודת הפיתול הוא $1\frac{1}{3}$.
א. מצא את הנגזרת **הראשונה** $f'(x)$.
ב. מצא את הפונקציה $f(x)$.

<u>תשובה</u>: א. $f'(x) = -2x^2 + 2x$.
ב. $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 1\frac{1}{6}$

8. נתונה הנגזרת **השנייה** של הפונקציה $f(x)$:
$f''(x) = 42(-x + 1)^5$. שיפוע המשיק לפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא 3 ושיעור ה-y של נקודת הפיתול הוא 2.
א. מצא את הנגזרת **הראשונה** $f'(x)$.
ב. מצא את הפונקציה $f(x)$.

<u>תשובה</u>: א. $f'(x) = -7(-x + 1)^6 + 3$.
ב. $f(x) = (-x + 1)^7 + 3x - 1$

9. נתונה הנגזרת **השנייה** של הפונקציה $f(x)$:
$f''(x) = -sin\,x + \frac{1}{2}$. לפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול בתחום $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.
שיפוע המשיק לפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא $\frac{5}{12}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$ ושיעור ה-y של נקודת הפיתול הוא $\frac{25}{144}\pi^2 + 1.5$.
א. מצא את הנגזרת **הראשונה** $f'(x)$.
ב. מצא את הפונקציה $f(x)$.

<u>תשובה</u>: א. $f'(x) = cosx + \frac{1}{2}x$.
ב. $f(x) = \sin x + \frac{1}{4}x^2 + 1$

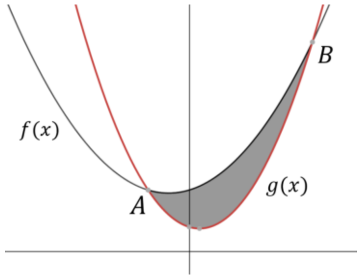
מציאת שטחים באמצעות אינטגרלים

לפני שתתחיל\י לפתור את התרגילי הבאים צפה\צפי **בסרטון ההסבר** על מציאת שטחים.

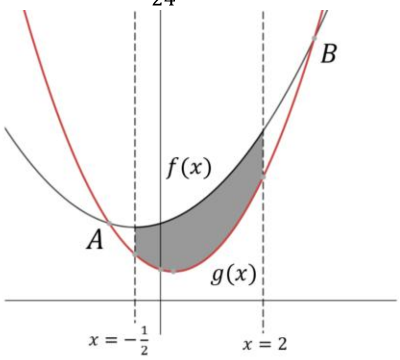
תרגילים-מציאת שטחים

1. נתונות הפונקציות $g(x) = 2x^2 - x + 2$ ו-$f(x) = x^2 + x + 5$ הנחתכות בנקודות A ו- B.

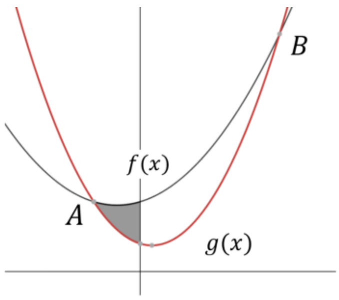
א. מצא את השטח הכלוא בין הפונקציות (השטח האפור בשרטוט). <u>תשובה</u>: $10\frac{2}{3}$ יח"ר.



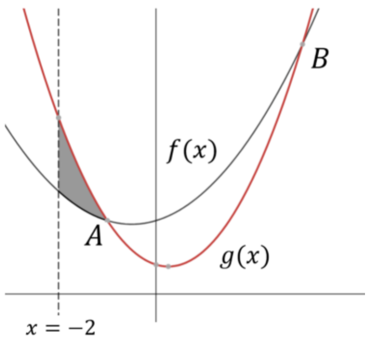
ב. מצא את השטח הכלוא בין הפונקציות ובין הישרים $x = 2$,$x = -\frac{1}{2}$ (השטח האפור בשרטוט). <u>תשובה</u>: $8\frac{13}{24}$ יח"ר.



ג. מצא את השטח הכלוא בין הפונקציות וציר ה-y ברביע השני. <u>תשובה</u>: $1\frac{2}{3}$ יח"ר.

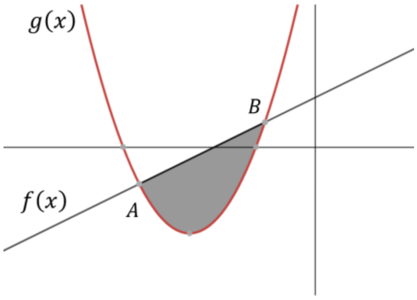


ד. מצא את השטח הכלוא בין הפונקציות ובין הישר $x = -2$ <u>תשובה</u>: $2\frac{1}{3}$ יח"ר.

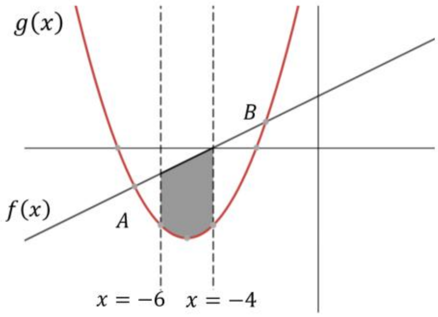


2. נתונות הפונקציות $g(x) = x^2 + 10x + 18$ ו- $f(x) = x + 4$ הנחתכות בנקודות A ו- B.

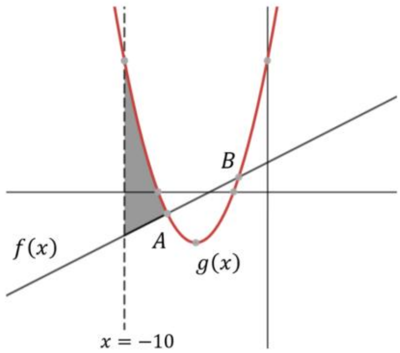
א. מצא את השטח הכלוא בין הפונקציות (השטח האפור בשרטוט). <u>תשובה</u>: $20\frac{5}{6}$ יח"ר.



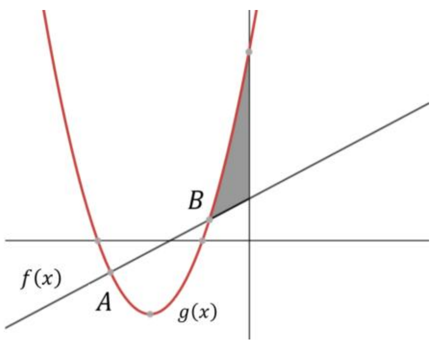
ב. מצא את השטח הכלוא בין הפונקציות ובין הישרים $x = -4$, $x = -6$ (השטח האפור בשרטוט). <u>תשובה</u>: $11\frac{1}{3}$ יח"ר.



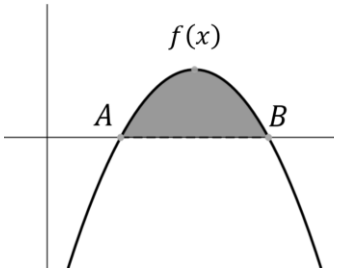
ג. מצא את השטח הכלוא בין הפונקציות ובין הישר $x = -10$. <u>תשובה</u>: $31\frac{1}{2}$ יח"ר.



ד. מצא את השטח הכלוא בין הפונקציות ובין ציר ה-y <u>תשובה</u>: $12\frac{2}{3}$ יח"ר.

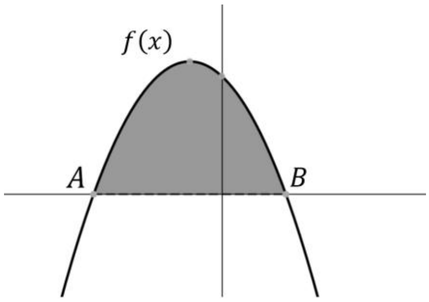


3. נתונה הפונקציה $f(x) = -x^2 + 8x - 12$ החותכת את ציר ה-x בנקודות A ו- B.
מצא את השטח המוגבל על ידי הפונקציה $f(x)$ וציר ה-x. (השטח האפור בשרטוט).



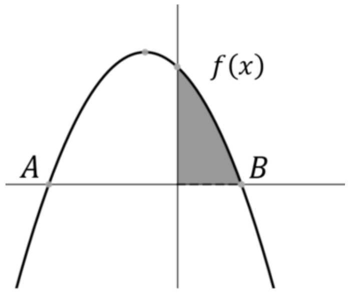
<u>תשובה</u> : $10\frac{2}{3}$ יח"ר.

4. נתונה הפונקציה $f(x) = -x^2 - 2x + 8$ החותכת את ציר ה-x בנקודות A ו- B.
   א. מצא את השטח המוגבל על ידי הפונקציה $f(x)$ וציר ה-x. (השטח האפור בשרטוט)



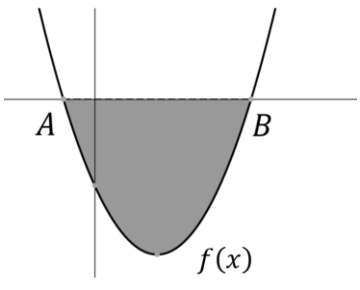
<u>תשובה</u>: 36 יח"ר.

   ב. מצא את השטח המוגבל על ידי הפונקציה $f(x)$ והצירים ברביע הראשון. (השטח האפור בשרטוט).



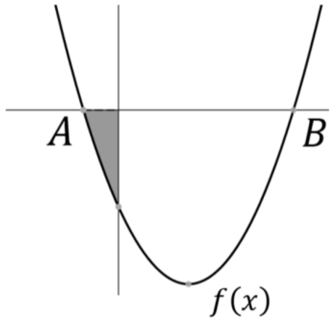
<u>תשובה</u>: $9\frac{1}{3}$ יח"ר.

5. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 - 4x - 5$ החותכת את ציר ה-x בנקודות A ו- B.
   א. מצא את השטח המוגבל על ידי הפונקציה $f(x)$ וציר ה-x. (השטח האפור בשרטוט)



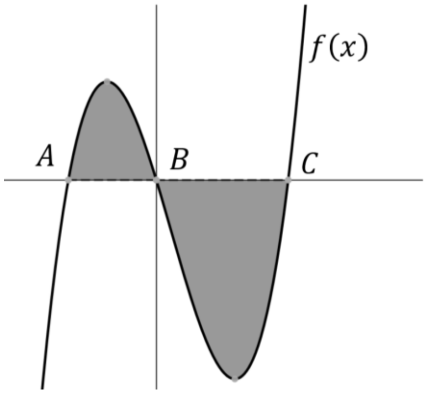
<u>תשובה</u>: 36 יח"ר.

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי הפונקציה $f(x)$ והצירים ברביע השני. (השטח האפור בשרטוט).



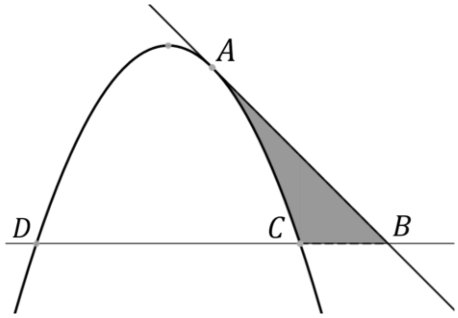
<u>תשובה</u>: $2\frac{2}{3}$ יח"ר.

6. נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$ החותכת את ציר ה-x בנקודות A, B ו- C.
מצא את השטח המוגבל על ידי הפונקציה $f(x)$ וציר ה-x. (השטח האפור בשרטוט)



<u>תשובה</u>: $21\frac{1}{12}$ יח"ר.

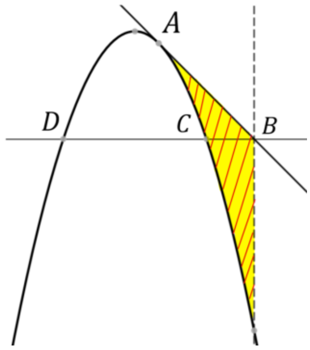
7. א. נתונה הפונקציה $f(x) = -x^2 + 7x - 10$ החותכת את ציר ה-x בנקודות C ו-D. העבירו משיק לפונקציה בנקודה A ששיעור ה-x שלה הוא 4. מצא את השטח הכלוא בין הפונקציה $f(x)$, המשיק וציר ה-x (השטח האפור בציור).



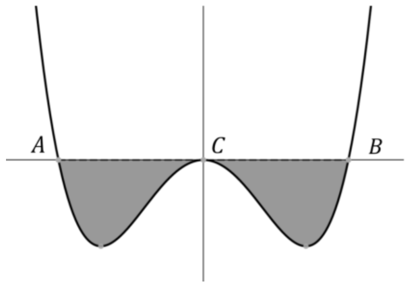
<u>תשובה</u>: $\frac{5}{6}$ יח"ר.

ב. הוסף לאיור את השטח המתקבל בעבור האינטגרל $\int_4^6 (-x+6) - (-x^2 + 7x - 10)\, dx$
(קווקו את השטח שאינטגרל מייצג- אין צורך לחשב את השטח).

<u>תשובה</u>: בעמוד הבא:

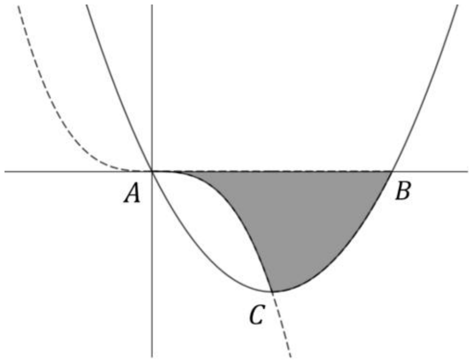


8. נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 4x^2$.
מצא את השטח המוגבל על ידי הפונקציה $f(x)$ וציר ה-x. (השטח האפור בשרטוט)



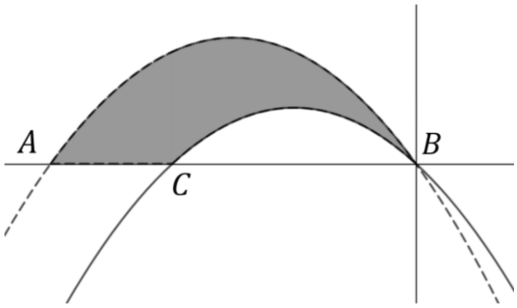
<u>תשובה</u>: $8\frac{8}{15}$ יח"ר.

9. נתונות הפונקציות $f(x) = -x^3$ ו-$g(x) = x^2 - 2x$ הנחתכות בנקודות A ו-C. מצא את השטח הכלוא בין הפונקציות וציר ה-x ברביע הרביעי. (השטח האפור בשרטוט).



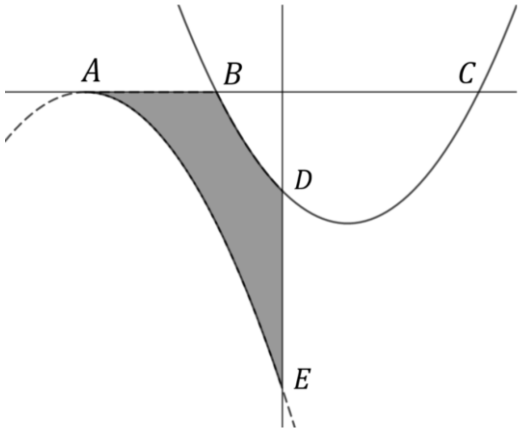
<u>תשובה</u>: $\frac{11}{12}$ יח"ר.

10. נתונות הפונקציות $f(x) = -x^2 - 3x$ ו-$g(x) = -x^2 - 2x$. מצא את השטח הכלוא בין הפונקציות וציר ה-x ברביע השני. (השטח האפור בשרטוט).



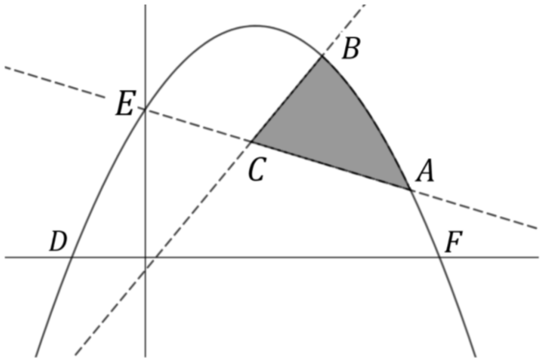
<u>תשובה</u>: $3\frac{1}{6}$ יח"ר.

11. נתונות הפונקציות $f(x) = x^2 - 2x - 3$ ו-$g(x) = -(x+3)^2$. מצא את השטח הכלוא בין הפונקציות והצירים ברביע הרביעי. (השטח האפור בשרטוט).



<u>תשובה</u>: $7\frac{1}{3}$ יח"ר.

12. נתונות הפונקציות $f(x) = -x^2 + 5x + 11$, $g(x) = 4x - 1$ ו- $h(x) = -x + 11$. מצא את השטח הכלוא בין שלושת הפונקציות בין הנקודות A ו-C. (השטח האפור בשרטוט).



<u>תשובה</u>: $15\frac{11}{15}$ יח"ר.

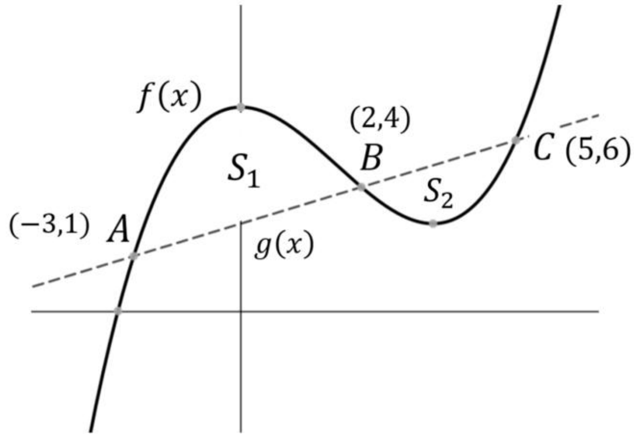
תרגילים-שאלות העוסקות ב-ערך האינטגרל

<u>לפני התרגילים צפה\י בסרטון הסבר המופיע באתר</u>

התשובות מופיעות לאחר התרגילים

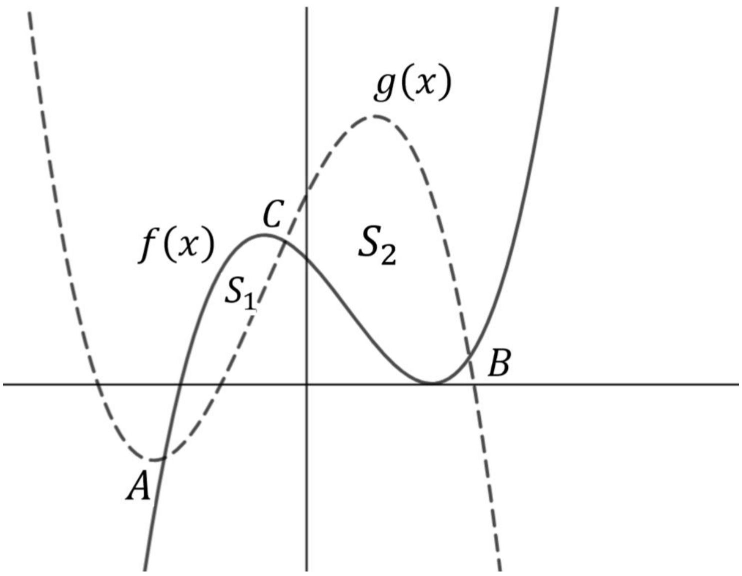
1. נתונים הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ (גרף הפונקציה $g(x)$ משורטט בקו מקווקו) הנחתכים בנקודות A,B ו-C המופיעות בשרטוט. השטח הכלוא בין הפונקציות בין הנקודות A ו-B (S_1) שווה 8 יח"ר והשטח הכלוא בין הפונקציות בין הנקודות B ו-C (S_2) שווה 3 יח"ר. מצא את ערך האינטגרל:

$$\int_{-3}^{5} f(x) - g(x)\, dx$$



2. נתונים הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ (גרף הפונקציה $g(x)$ משורטט בקו מקווקו) הנחתכים בנקודות A,B ו-C המופיעות בשרטוט. השטח הכלוא בין הפונקציות בין הנקודות A ו-C (S_1) שווה 4 יח"ר והשטח הכלוא בין הפונקציות בין הנקודות B ו-C (S_2) שווה 6 יח"ר. מצא את ערך האינטגרל:

$$\int_{x_A}^{x_B} f(x) - g(x)\, dx$$

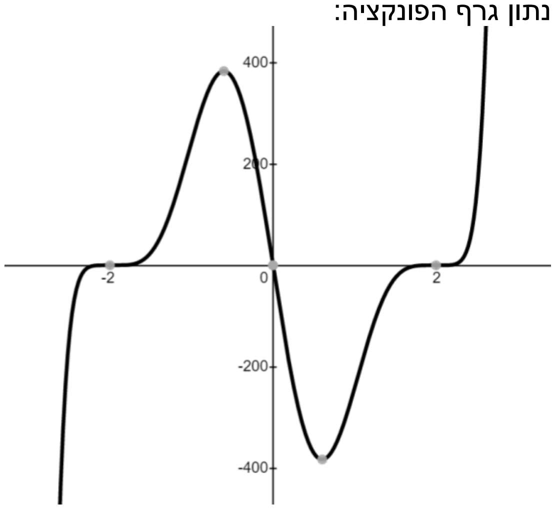


3. נתונה הפונקציה $f(x) = x(x^2-4)^5$.

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x.

ב. הוכח שהפונקציה היא אי זוגית.

נתון גרף הפונקציה:



ג. מצא את ערך האינטגרל:

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$$

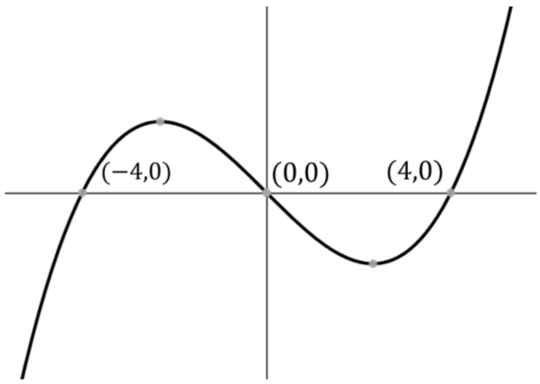
ד. מצא את ערך האינטגרל:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

ה. מצא את ערך האינטגרל:

$$\int_{-2.1}^{2.1} f(x)\,dx$$

4. הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה אי-זוגית החותכת את ציר ה-x בנקודות המופיעות בשרטוט ובהן בלבד. נתון גרף הפונקציה. קבע איזו מהטענות הבאות (א, ב או ג) היא הטענה הנכונה:



א. $\int_{-4}^{5} f(x)\,dx < 0$

ב. $\int_{-4}^{5} f(x)\,dx > 0$

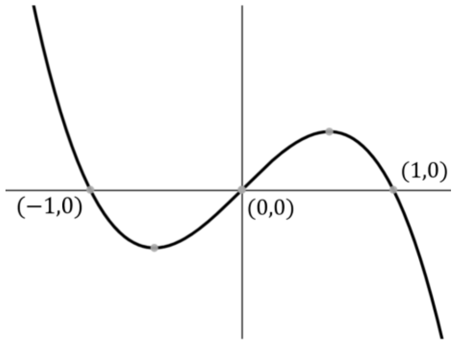
ג. $\int_{-4}^{5} f(x)\,dx = 0$

5. הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה אי-זוגית החותכת את ציר ה-x בנקודות המופיעות בשרטוט ובהן בלבד. נתון גרף הפונקציה. קבע איזו מהטענות הבאות (א, ב או ג) היא הטענה הנכונה:

א. $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx < 0$

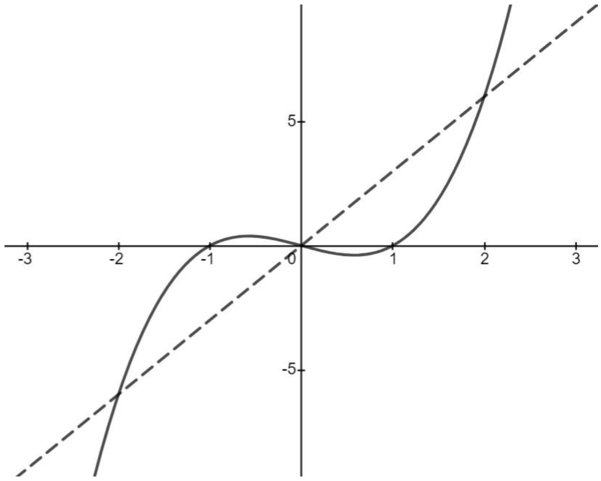
ב. $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx > 0$

ג. $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = 0$



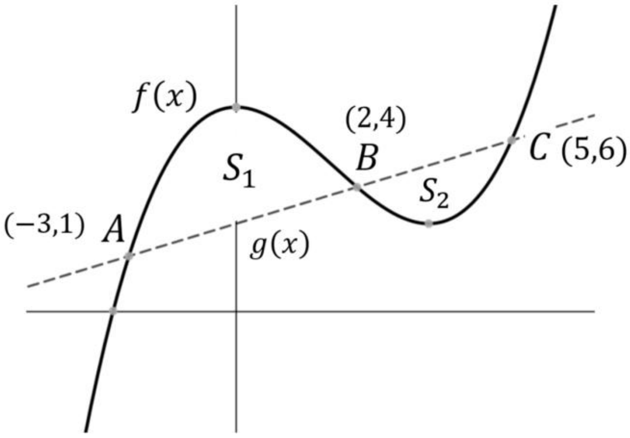
6. נתונות הפונקציות $f(x) = 3x$ ו- $g(x) = x^3 - x$
   א. הוכח הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ הן פונקציות אי זוגיות.
   ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות
   ג. נתונים הגרפים של 2 הפונקציות. מצא את ערך האינטגרל:

$$\int_{-2}^{2} f(x) - g(x)\,dx$$



7. נתונים הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ (גרף הפונקציה $g(x)$ משורטט בקו מקווקו) הנחתכים בנקודות B,A ו-C המופיעות בשרטוט. השטח הכלוא בין הפונקציות בין הנקודות A ו-B (S_1) שווה 9 יח"ר. בנוסף נתון: $\int_{-3}^{5} f(x) - g(x)\,dx = 7$. מצא את השטח הכלוא בין הפונקציות

בין הנקודות B ו-C (S_2).

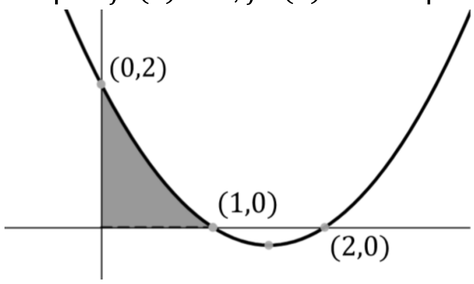


<u>תשובות</u>:

1. 5 .
2. -2 .
3. א. $(-2,0)$, $(2,0)$ ו- $(0,0)$. ג. 0. ד. 0 ה. 0.
4. ב. היא הטענה הנכונה.
5. א. היא הטענה הנכונה.
6. 0.
7. 2.

תרגילים-שאלות העוסקות באומדן שטחים

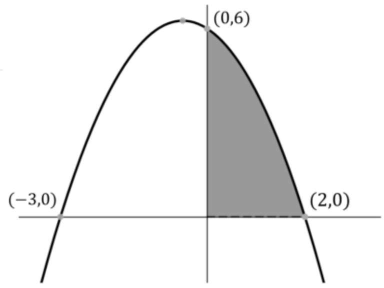
1. הפונקציה $f(x)$ חותכת את הצירים בנקודות $(1,0)$, $(2,0)$ ו- $(0,2)$. בתחום $0 < x < 1$ מתקיים: $f'(x) < 0, f''(x) > 0$. גרף הפונקציה מופיע למטה.



לפניכם 3 טענות. רק אחת מהן אפשרית. קבע איזו (א, ב או ג):

א. $\int_0^1 f(x)\,dx = 1.1$ ב. $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$ ג. $\int_0^1 f(x)\,dx = 0.9$

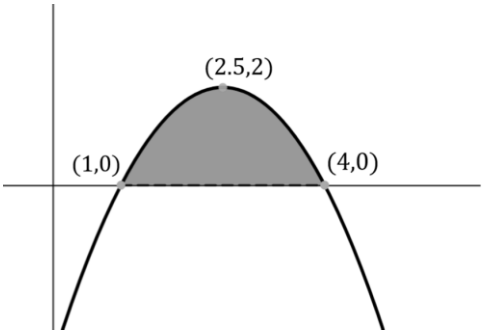
2. הפונקציה $f(x)$ חותכת את הצירים בנקודות $(2,0)$, $(-3,0)$ ו- $(0,6)$.
בתחום $0 < x < 2$ מתקיים: $f'(x) < 0,\ f''(x) < 0$. גרף הפונקציה מופיע למטה.



לפניכם 3 טענות. רק אחת מהן אפשרית. קבע איזו (א,ב או ג):

א. $\int_0^2 f(x)\,dx = 7.5$ ב. $\int_0^2 f(x)\,dx = 5.5$ ג. $\int_0^2 f(x)\,dx = 12.5$

3. הפונקציה $f(x)$ חותכת את הצירים בנקודות $(1,0)$, $(4,0)$ ו- $(0,-4)$.
לפונקציה יש נקודת קיצון יחידה מסוג מקסימום בנקודה $(2.5,2)$ והיא קעורה כלפי מטה בכל תחום הגדרתה. גרף הפונקציה מופיע למטה.



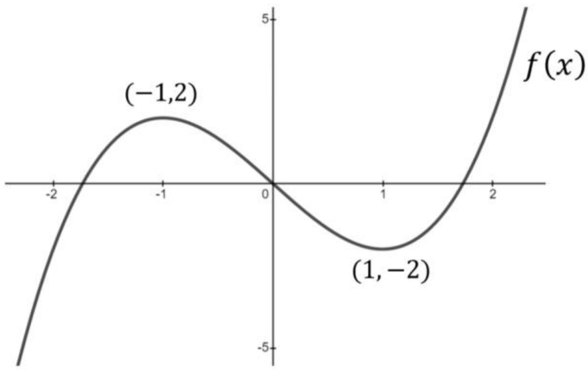
לפניכם 3 טענות. רק אחת מהן אפשרית. קבע איזו (א,ב או ג):

א. $\int_1^4 f(x)\,dx = 2.5$ ב. $\int_1^4 f(x)\,dx = 6.5$ ג. $\int_1^4 f(x)\,dx = 3.5$

<u>תשובות</u>:
1. ג.
2. א.
3. ג.

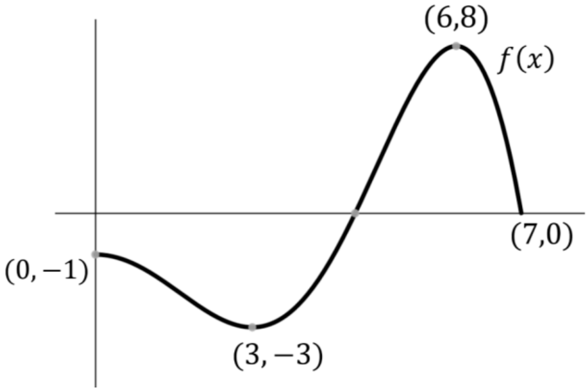
תרגילים-שימוש בערכי הפונקציה לחישוב האינטגרל של הנגזרת.

1. לפניך גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת וגזירה לכל x. הוסף לשרטוט את גרף הנגזרת וחשב את השטח שמוגבל בין גרף <u>הנגזרת</u> לציר ה-x.



2. לפניך גרף הפונקציה $f(x)$. גרף <u>הנגזרת</u> עובר בראשית הצירים ובנקודה $(7,-5)$. הוסף לשרטוט את גרף הנגזרת וחשב את השטח שמוגבל בין גרף <u>הנגזרת</u> לציר ה-x ברביע

הראשון.

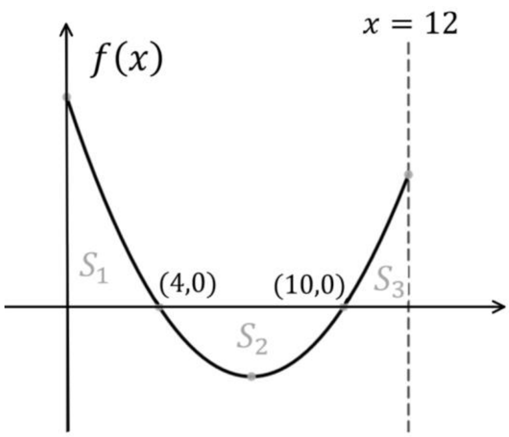


תשובות:

1. 4 יח"ר.
2. 11 יח"ר.

תרגילים-"פונקצית האינטגרל"

1. נתון גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 12$.



S_1 הוא השטח שכלוא בין הפונקציה ובין הצירים בתחום $0 \leq x \leq 4$. יח"ר $S_1 = 14$.

S_2 הוא השטח שכלוא בין הפונקציה ובין ציר ה-x בתחום $4 \leq x \leq 10$. יח"ר $S_2 = 10$.

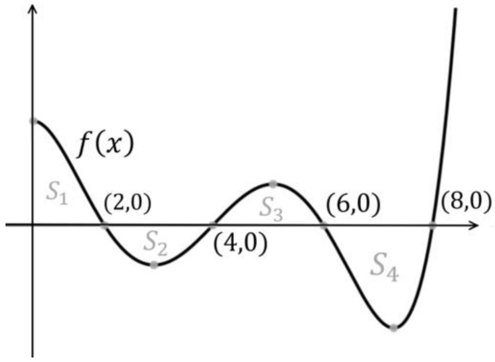
S_3 הוא השטח שכלוא בין הפונקציה, ציר ה-x ובין הישר $x = 12$. יח"ר $S_3 = 6$.

בנוסף נתונה הפונקציה $S(x)$ המוגדרת באופן הבא:

$$S(x) = \int_0^x f(t)dt$$

שרטט את הפונקציה $S(x)$ בתחום $0 \leq x \leq 12$.

2. נתון גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום $x \geq 0$.



S_1 הוא השטח שכלוא בין הפונקציה ובין הצירים בתחום $0 \leq x \leq 2$. יח"ר $S_1 = 2.5$.

S_2 הוא השטח שכלוא בין הפונקציה ובין ציר ה-x בתחום $2 \leq x \leq 4$. יח"ר $S_2 = 1.5$.

S_3 הוא השטח שכלוא בין הפונקציה ובין ציר ה-x בתחום $4 \leq x \leq 6$. יח"ר $S_3 = 1.5$.

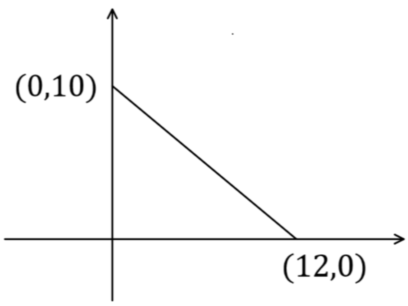
S_4 הוא השטח שכלוא בין הפונקציה ובין ציר ה-x בתחום $6 \leq x \leq 8$. יח"ר $S_4 = 3.5$.

בנוסף נתונה הפונקציה $g(x)$ המוגדרת באופן הבא:

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt$$

שרטט את הפונקציה $g(x)$ בתחום $0 \leq x \leq 8$.

3. נתון גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 12$.

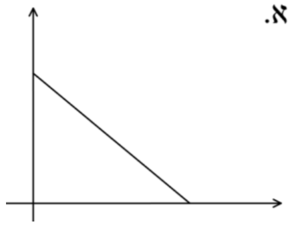


בנוסף נתונה הפונקציה $g(x)$ המוגדרת באופן הבא:

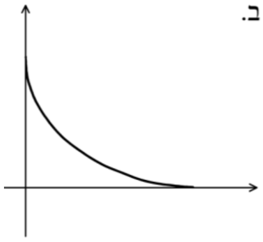
$$g(x) = \int_0^x f(t)dt$$

אילו מהגרפים הבאים מתאר את הפונקציה $g(x)$?

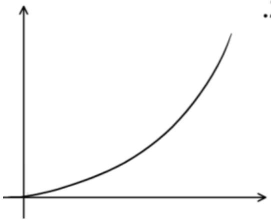
א.



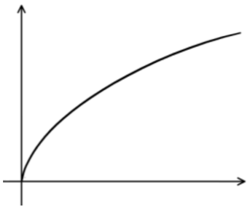
ב.



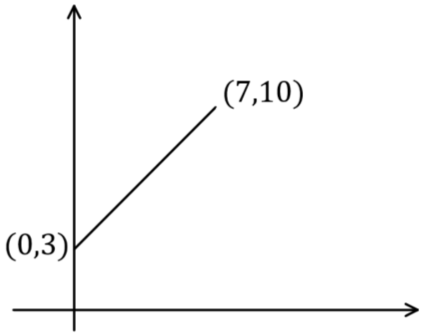
ג.



ד.



4. נתון גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 7$.

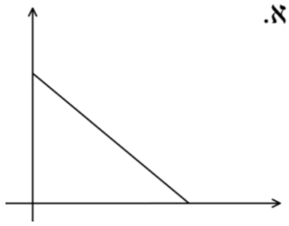


בנוסף נתונה הפונקציה $g(x)$ המוגדרת באופן הבא:

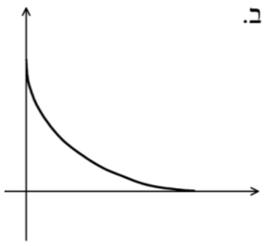
$$g(x) = \int_{0}^{x} f(t)dt$$

אילו מהגרפים הבאים מתאר את הפונקציה $g(x)$?

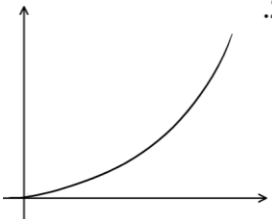
א.



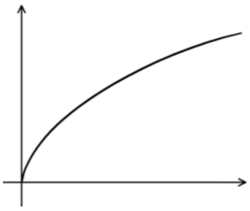
ב.



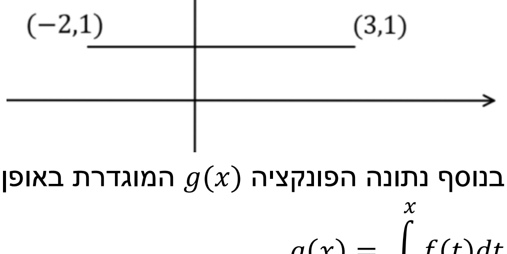
ג.



ד.



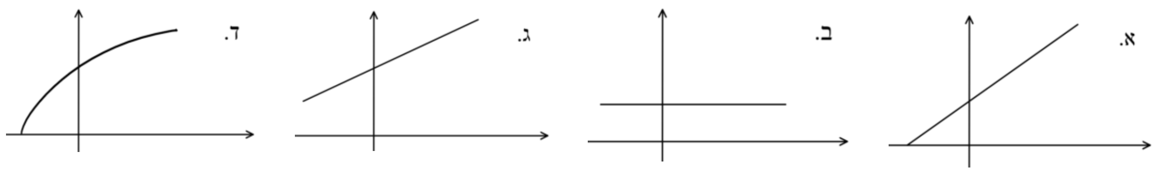
5. נתון גרף הפונקציה **הקבועה** $f(x)$ המוגדרת בתחום $-2 \leq x \leq 3$.



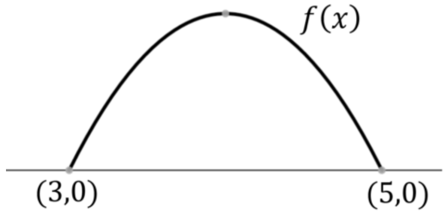
בנוסף נתונה הפונקציה $g(x)$ המוגדרת באופן הבא:

$$g(x) = \int_{-2}^{x} f(t)dt$$

אילו מהגרפים הבאים מתאר את הפונקציה $g(x)$?



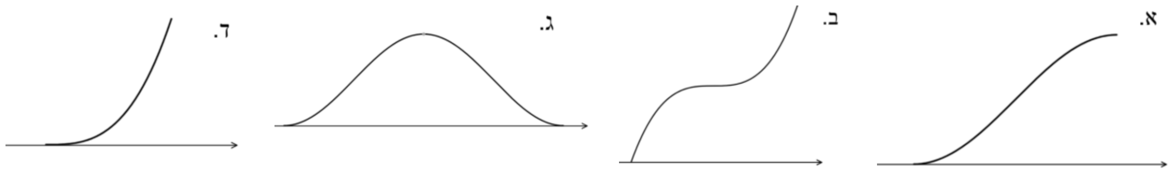
6. נתון גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום $3 \le x \le 5$.



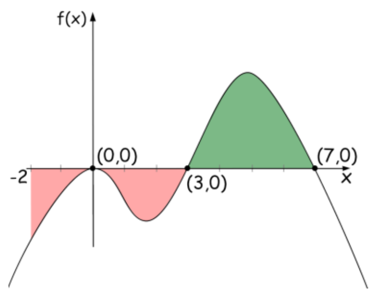
בנוסף נתונה הפונקציה $g(x)$ המוגדרת באופן הבא:

$$g(x) = \int_3^x f(t)dt$$

אילו מהגרפים הבאים מתאר את הפונקציה $g(x)$?



7. נתון גרף פונקצית הפולינום $f(x)$ המוגדרת לכל x אשר נקודות האפס שלה הן $(0,0)$, $(3,0)$ ו-$(7,0)$ כמתואר בשרטוט. נתון:
השטח המוגבל בין גרף הפונקצייה, ציר ה-x והישר $x = -2$ בתחום $-2 \le x \le 3$ (השטח הוורוד), שווה לשטח המוגבל בין גרף הפונקצייה וציר ה-x בתחום $3 \le x \le 7$ (השטח הירוק). נסמן את השטח הירוק ב-S.



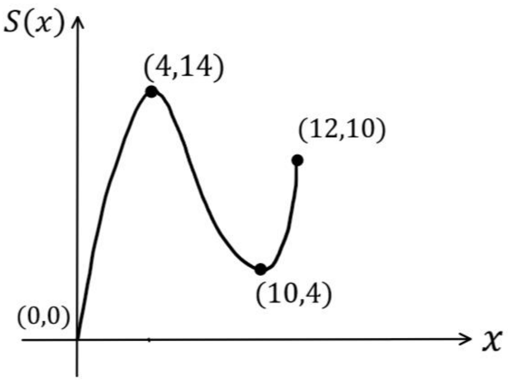
הפונקצייה $g(x)$ מוגדרת בתחום $-2 \le x \le 7$ ומקיימת: $g(x) = \int_x^7 f(t)\ dt$

מצאו את נקודות הקיצון של הפונקצייה $g(x)$. הביעו בעזרת S במידת הצורך.

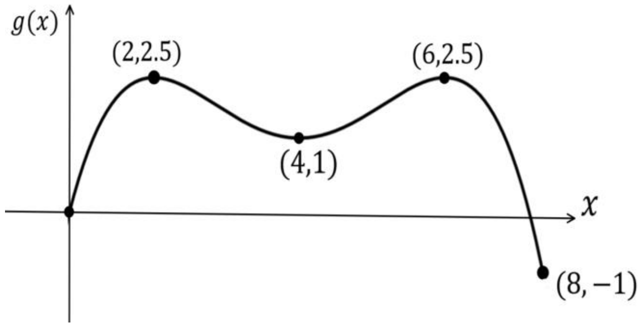
.

תשובות – פונקציה צוברת שטח

1. שרטוט



2. שרטוט:



3. גרף ד.
4. גרף ג.
5. גרף א.
6. גרף א.