קורס בגיאומטריה

כל הגיאומטריה שצריך לדעת לבגרות

Matematicourse.com

תוכן

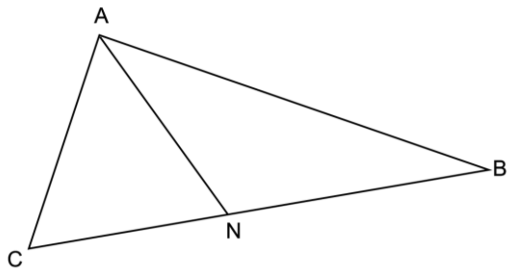
משולשים ומרובעים- משפטי בסיס (ללא חפיפה).

התרגילים הבאים כוללים שימוש במשפטים הבאים:

1. זוויות קודקודיות שוות.
2. זוויות צמודות משלימות ל-$180°$.
3. בין ישרים מקבילים, הנחתכים על ידי ישר שלישי, זוויות מתחלפות שוות.
4. בין ישרים מקבילים, הנחתכים על ידי ישר שלישי, זוויות מתאימות שוות.
5. בין ישרים מקבילים, הנחתכים על ידי ישר שלישי, זוויות חד צדדיות משלימות ל- $180°$.
6. אם בין שני ישרים הנחתכים על ידי ישר שלישי זוויות מתחלפות שוות, אז הישרים מקבילים.
7. אם בין שני ישרים הנחתכים על ידי ישר שלישי זוויות מתאימות שוות, אז הישרים מקבילים.
8. אם בין שני ישרים הנחתכים על ידי ישר שלישי זוויות חד צדדיות משלימות ל- $180°$, אז הישרים מקבילים.
9. סכום הזוויות במשולש הוא $180°$.
10. סכום הזוויות במרובע קמור הוא $360°$.
11. זווית חיצונית למשולש שווה לסכום השתיים שאינן צמודות לה.
12. במשולש שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות
13. "אם במשולש שתי זוויות שוות אז המשולש הוא שווה שוקיים" או בנוסח אחר: "במשולש מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות".
14. במשולש שווה צלעות כל הזוויות שוות $60°$
15. אם במשולש כל הזוויות שוות אז המשולש הוא שווה צלעות.

1. נתון ש-AN הוא חוצה זווית במשולש ABC. $\sphericalangle ACN = 48°$. $\sphericalangle CAN = \sphericalangle B$. חשב את זווית B.

הדרכה: סמן את $\sphericalangle CAN$ ב-x והעזר בסכום זוויות במשולש.



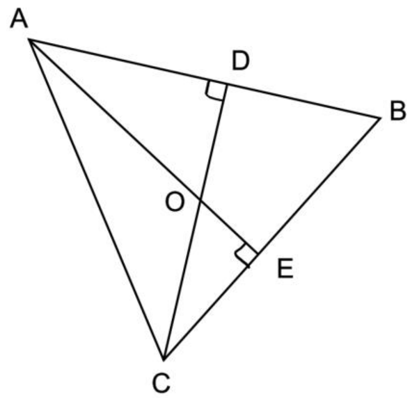
2. מנקודות A ו-C במשולש ABC הורידו גבהים הנפגשים בתוך המשולש בנקודה O.

א. נתון: $\sphericalangle B = 62°$. חשב את $\sphericalangle AOC$.

ב. **ללא קשר לנתון של סעיף א**, הוכח:

(1) $\sphericalangle COE = \sphericalangle B$

(2) $\sphericalangle OAC + \sphericalangle OCA = \sphericalangle B$

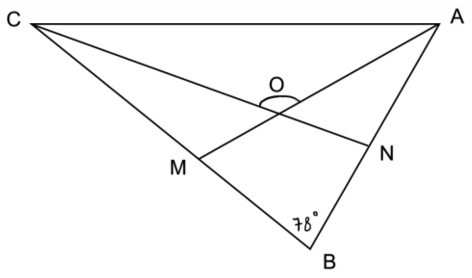


3. חוצה זווית A וחוצה זווית C נפגשים בנקודה O.

א. נתון $\sphericalangle B = 78°$. חשב את $\sphericalangle AOC$.

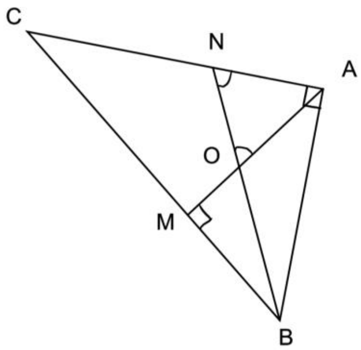
ב. ללא קשר לנתון של סעיף א'. נסמן $\sphericalangle B = x$

<u>הוכח:</u> $\sphericalangle AOC = 90° + \frac{x}{2}$



4. במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle A = 90°$) חוצה זווית B והגובה היורד מקדקוד A נפגשים בנקודה O.

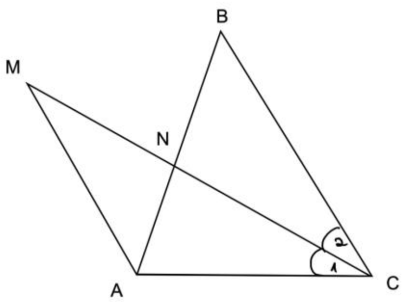
הוכח : ΔAON הוא שווה שוקיים.



5. $\sphericalangle C_1 = \sphericalangle C_2$, $\sphericalangle B = 40°$, $\sphericalangle M = 35°$, $\sphericalangle BAC = 70°$.

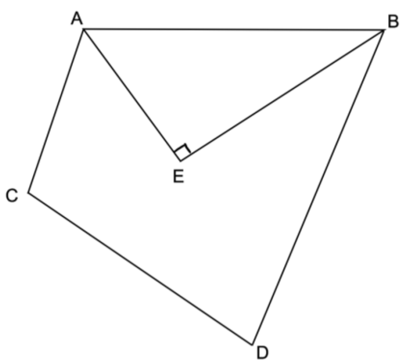
א. הוכח: $AM \parallel BC$

ב. חשב את $\sphericalangle MAN$ באמצעות מה שהוכחת בסעיף א'

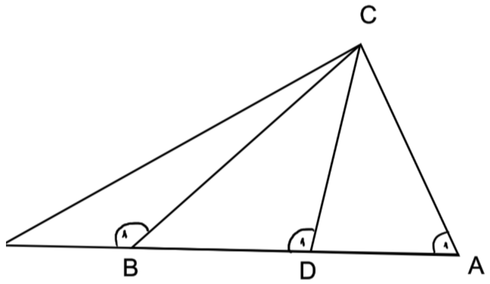


6. EB ו-AE חוצים את הזוויות B ו-A בהתאמה. $\sphericalangle E = 90°$.

הוכח: $AC \parallel BD$



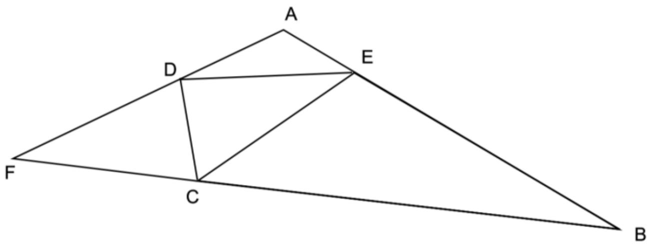
7. CD חוצה זווית ACB ב-ΔABC. הוכח באמצעות שימוש בידוע לך על זווית חיצונית למשולש ש: $\sphericalangle D_1 = \frac{\sphericalangle B_1 + \sphericalangle A_1}{2}$.



8. DE ו-DC חוצים את $\sphericalangle \mathrm{AEC}$ ו- $\sphericalangle \mathrm{FCE}$ בהתאמה.

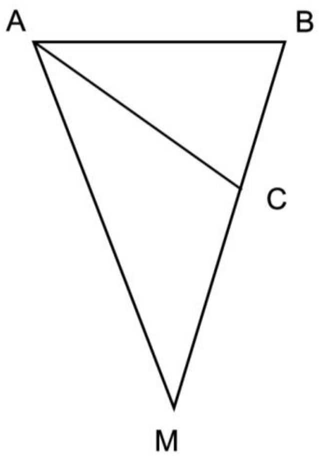
א. נתון $\sphericalangle \mathrm{B} = 20°$ חשב את $\sphericalangle \mathrm{CDE}$

ב. ללא קשר לנתון של סעיף א: סמן את $\sphericalangle \mathrm{B}$ ב-α והבע את זווית $\sphericalangle \mathrm{CDE}$ באמצעות α.



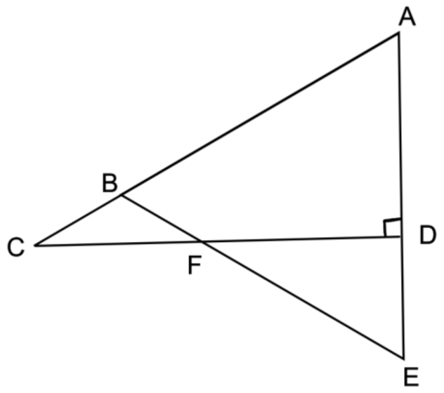
9. AC חוצה את זווית A במשולש שווה שוקיים MAB ($MA = MB$).
נתון $CA = CM$.

הוכח: $AC = AB$



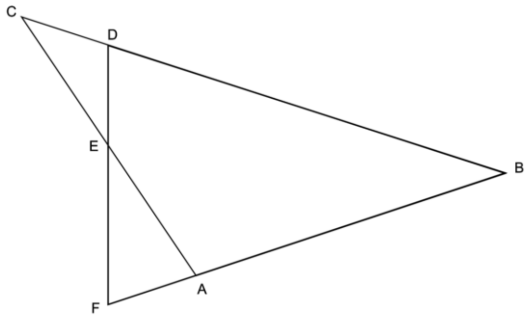
10. נתון $AB = AE$. $CD \perp AE$. המשך הישר AB והמשך הישר DF נחתכים בנקודה C. $BC = BF$.

חשב את $\sphericalangle A$



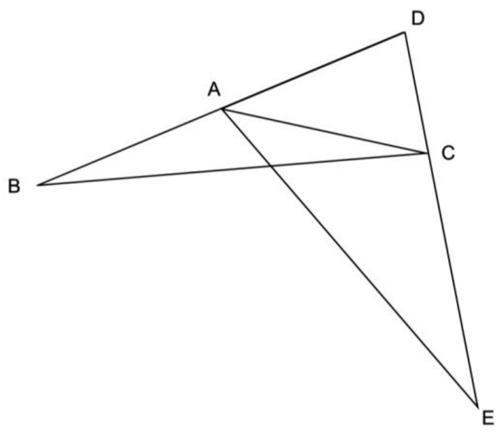
11. $BD = BF$. המשך BD והמשך AE נפגשים בנקודה C. DF ו-AC נחתכים בנקודה E. בנוסף נתון: $CD = DE$ ו-$AB = AC$.

חשב את $\sphericalangle B$



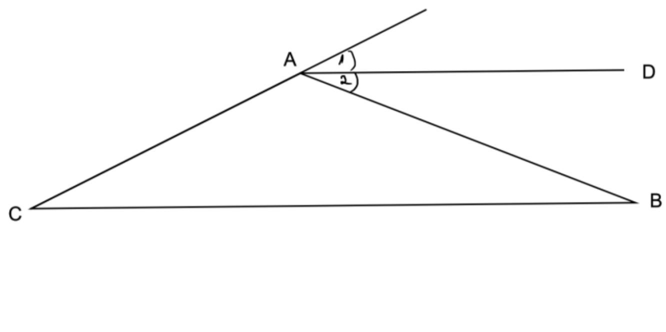
12. $AE = DE$. חוצה הזווית היוצא מקדקוד A במשולש AED נפגש עם הצלע DE בנקודה C. $\sphericalangle B = \sphericalangle E$. $AC = AB$.

חשב את $\sphericalangle E$



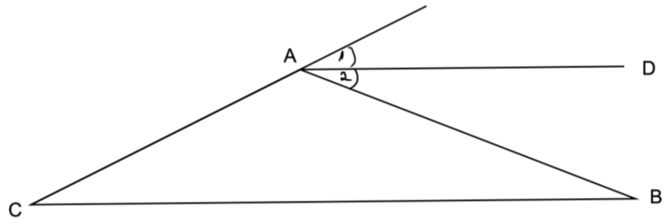
13. נתון: $AC = AB$. $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2$.

הוכח: $AD \parallel CB$.



14. נתון $AC = AB$. CB ∥ AD.

הוכח: $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2$



15. ABC הוא משולש שווה שוקיים (CA=CB). AD הוא גובה לצלע BC במשולש ABC.

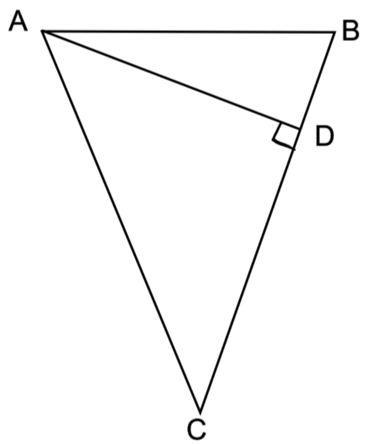
א. הנח שהגובה AD עובר בתוך המשולש ABC והוכח:

$$\sphericalangle BAD = \frac{1}{2}\sphericalangle C$$

ב. הנח שהגובה AD עובר מחוץ למשולש ABC והוכח:

$$\sphericalangle BAD = \frac{1}{2}\sphericalangle C$$

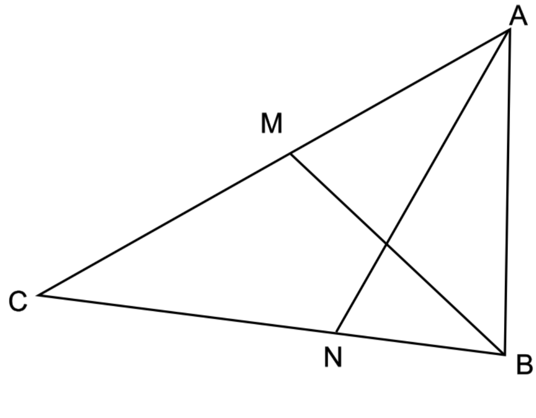
<u>הערה לסעיף ב</u>: כדי שיהיה לכם נח שרטטו א המשולש ABC שוב רק הפעם שזווית הראש היא קהה וכך הגובה עובר מחוץ למשולש



16. AN הוא חוצה זווית במשולש ABC.
$CM = BM$.

א. נתון $\sphericalangle ABM = 40°$ חשב את $\sphericalangle BNA$

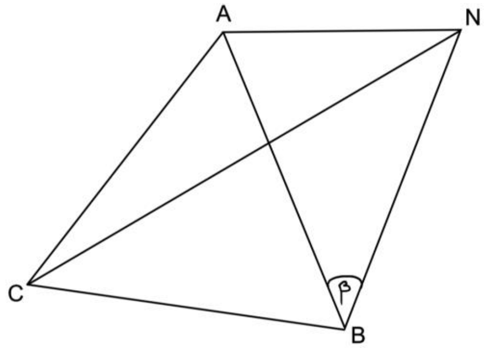
ב. ללא קשר לנתון של סעיף א, סמן $\sphericalangle ABM = \beta$ והבע את $\sphericalangle BNA$ באמצעות β.



17. ABC הוא משולש שווה צלעות. BN שווה באורכה לכל אחת מצלעות משולש ABC.

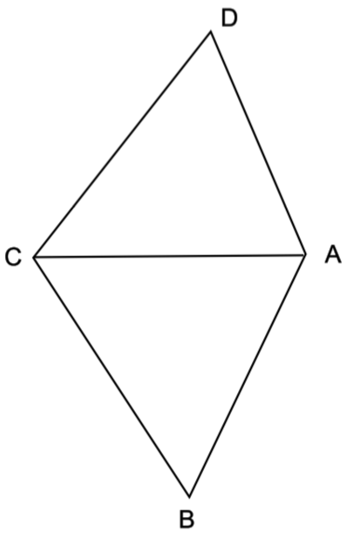
א. נסמן $\sphericalangle ABN = \beta$ הראה ש- $\sphericalangle CNA$ לא תלויה ב-β וחשב אותה.

ב. נתון שבמשולש ABN חוצה זווית הבסיס (לא משנה איזו זווית מבין השתיים) שווה באורכו לצלע הבסיס (AN). חשב את $\sphericalangle ACN$.
הערה: חוצה הזווית אינו מצויר בשרטוט



18. $\sphericalangle BAD = 110°$, $\sphericalangle D = 60°$.
הצלע AC חוצה את זווית BCD ושווה באורכה לצלע AB.

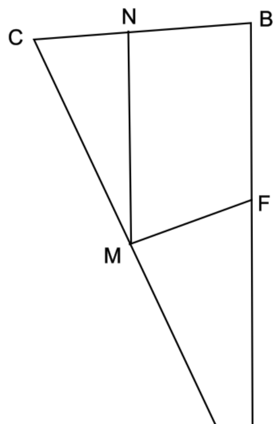
חשב את זווית CAB על ידי שימוש במשפט סכום הזוויות במרובע הוא $360°$



19. במרובע $MCBF$:
$\sphericalangle C = 60°$, $\sphericalangle FMC = \sphericalangle MNB$.
$\sphericalangle MFA = 60°$. המשך CM ו-BF נפגשים ב-A.

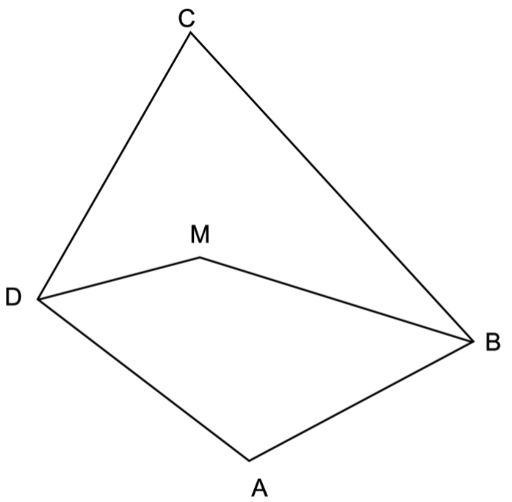
א. הוכח ש: $MN \parallel BF$ (ללא שימוש במשפט סכום הזוויות במשולש הוא $180°$)

ב. פתור שוב את סעיף א אך הפעם ללא שימוש במשפט סכום הזוויות במרובע $360°$



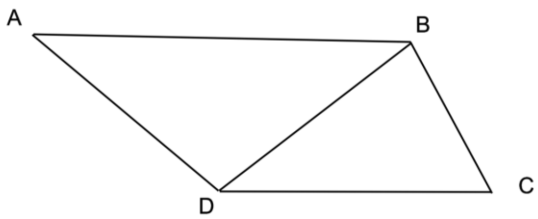
20. במרובע $ABCD$:
$\sphericalangle C = 70°$, $\sphericalangle A = 100°$. MB ו-MD
חוצים את הזוויות B ו-D בהתאמה.

חשב את זווית DMB



21. נתון:
$AD = DB = DC$
$\sphericalangle ADC = 100°$

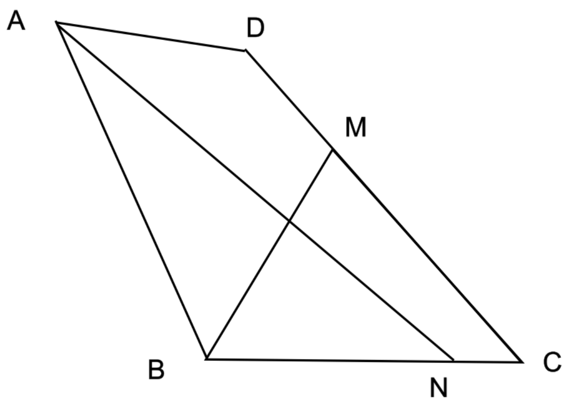
חשב את $\sphericalangle ABC$



22. $MB = MC$. AN חוצה את זווית BAD

$\sphericalangle ADC = 120°$, $\sphericalangle ABM = 50°$.

חשב את זווית ANB



פתרונות – משולשים ומרובעים משפטי בסיס (ללא חפיפה).

1. $\sphericalangle B = 44°$.	2. $\sphericalangle AOC = 118°$.	3. $\sphericalangle AOC = 129°$.	5. $\sphericalangle MAN = 40°$	8. א. $\sphericalangle CDE = 80°$
8. ב. $\sphericalangle CDE = 90° - \frac{1}{2}\alpha$	10. $\sphericalangle A = 60°$	11. $\sphericalangle B = 36°$	12. $\sphericalangle E = 20°$	16. א. $\sphericalangle BNA = 70°$
16. ב. $\sphericalangle BNA = 90° - \frac{1}{2}\beta$	17. א. $\sphericalangle CNA = 30°$ ב. $\sphericalangle ACN = 18°$	18. $\sphericalangle CAB = 53\frac{1}{3}°$		
20. $\sphericalangle DMB = 165°$	21. $\sphericalangle ABC = 130°$	22. $\sphericalangle ANB = 35°$		

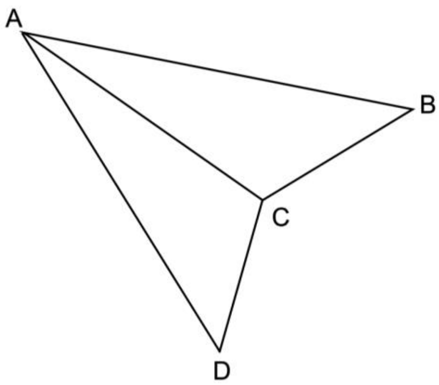
חפיפת משולשים (ללא משפט חפיפה רביעי)

התרגילים הבאים כוללים שימוש במשפטים הבאים:

1. משפט חפיפה ראשון: צלע, זווית, צלע.
2. משפט חפיפה שני: זווית, צלע, זווית.
3. משפט חפיפה שלישי: צלע, צלע, צלע.
4. משפט חפיפה רביעי נלמד בהמשך
5. חיבור גדלים שווים לגדלים שווים יוצר גדלים שווים
6. אם בשני משולשים שני זוגות של זוויות שוות אז גם הזוג השלישי שווה
7. זוויות מתאימות במשולשים חופפים שוות
8. צלעות מתאימות במשולשים חופפים שוות
9. זוויות צמודות לזוויות שוות, שוות גם הן

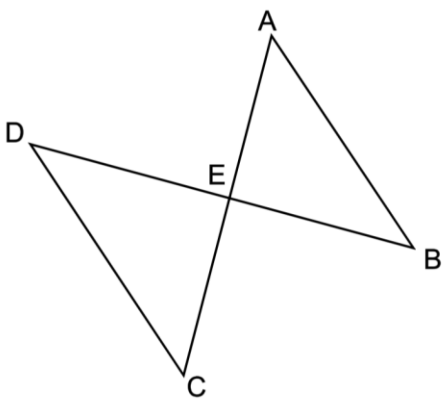
1. נתון ש-AC הוא חוצה זווית BAD.
$\mathrm{AB} = \mathrm{AD}$.

הוכח: $\sphericalangle \mathrm{B} = \sphericalangle \mathrm{D}$.



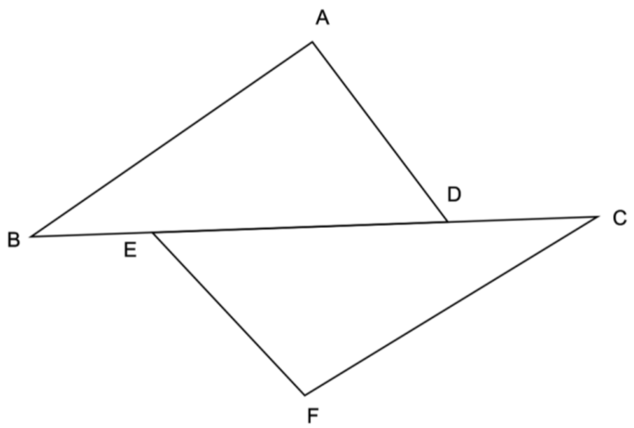
2. $\mathrm{AB} \parallel \mathrm{DC}$
הנקודה E נמצאת באמצע הקטע AC.

הוכח: $AB = DC$



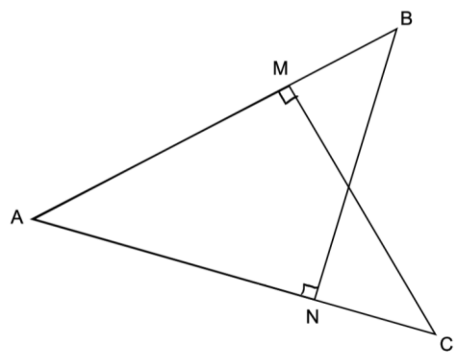
3. $AB = FC$. $\sphericalangle \mathrm{B} = \sphericalangle \mathrm{C}$.$BE = DC$.

הוכח: $AD \parallel EF$



4. $AB = AC$.$BN \perp AC$, $CM \perp AB$.

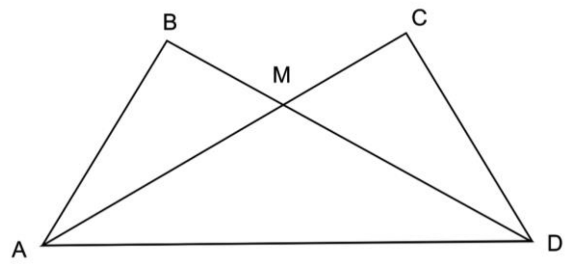
הוכח $MC = BN$.



5. AC ו-DB נחתכים בנקודה M.

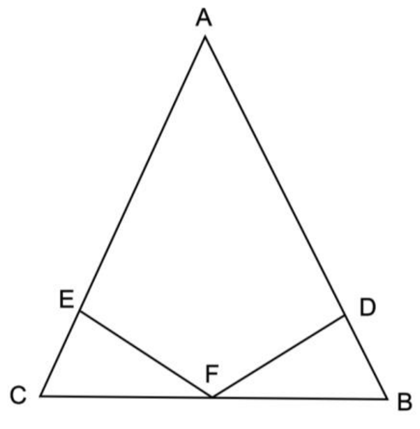
$AB = DC$, $AC = DB$.

הוכח: $\sphericalangle BAM = \sphericalangle CDM$



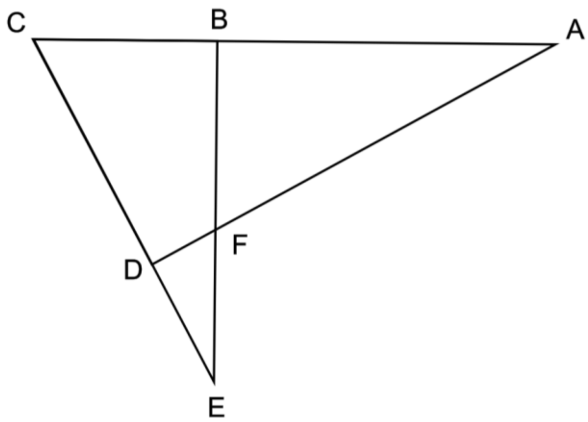
6. ABC הוא משולש שווה שוקיים
$AB = AC$.
$BF = CF$,
$\sphericalangle EFC = \sphericalangle DFB$.

הוכח: $AE = AD$



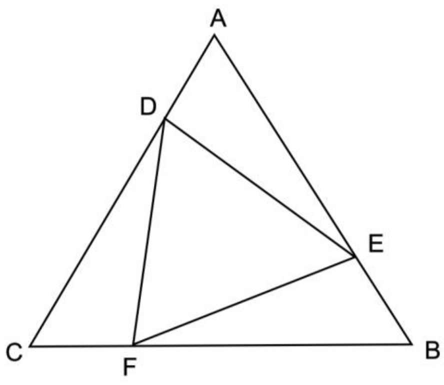
7. EB ו-AD נחתכים בנקודה F.
הנקודה B נמצאת על AC.
הנקודה D נמצאת על EC.
נתון:
$BE = AB$
$BF = BC$
$\sphericalangle FBA = 90°$

הוכח : $FD \perp EC$



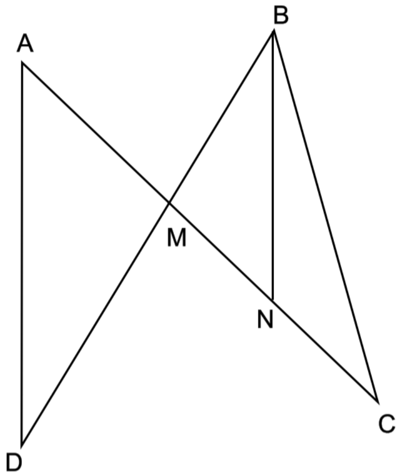
8. בתוך משולש שווה צלעות ABC
חסום משולש DEF.
נתון : $\mathrm{AD} = \mathrm{BE} = \mathrm{CF}$

הוכח:
משולש DEF הוא משולש שווה
צלעות.



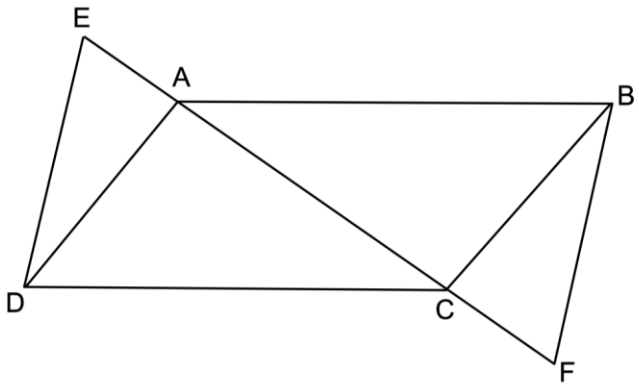
9. DB ו-AC נחתכים בנקודה M.
$\mathrm{BM} = \mathrm{AM}$.$\sphericalangle \mathrm{C} = \sphericalangle \mathrm{MBN}$,
$\mathrm{CM} = \mathrm{DM}$.

הוכח: $\mathrm{BN} \parallel \mathrm{AD}$



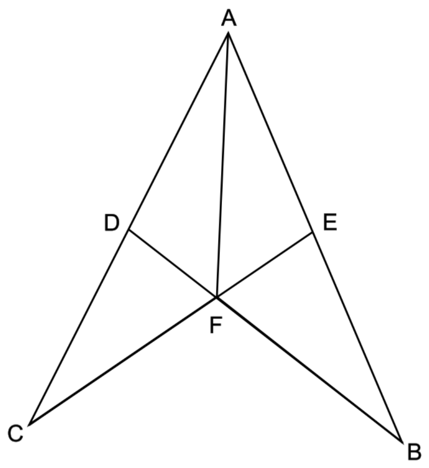
10. הנקודות F ו- E נמצאות על המשכו
של הישר AC . $\mathrm{AE} = \mathrm{CF}$.
$AD = BC$.$AB = DC$.

הוכח: $\mathrm{DE} \parallel \mathrm{BF}$



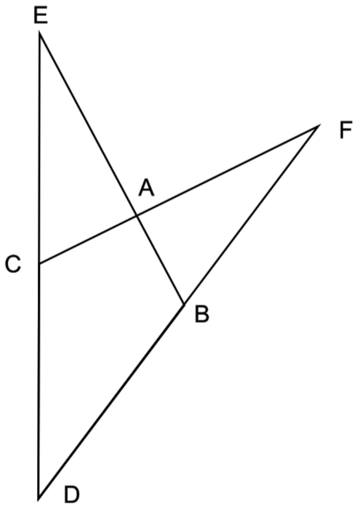
11. הקטעים CE ו-BD נפגשים בנקודה F. הנקודה D נמצאת על הקטע AC.
הנקודה E נמצאת על הקטע AB.
$\mathrm{AE} = \mathrm{AD}$, AF חוצה את זווית CAB.

הוכח:
$AC = AB$



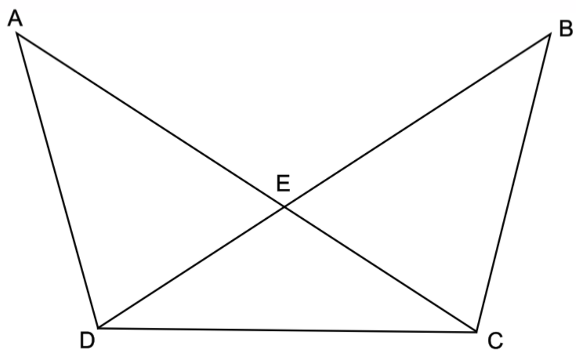
12. המשכי הישרים AE ו-FA נפגשים עם הישרים DF ו- ED בהתאמה.
$FD = ED$. $\sphericalangle \mathrm{E} = \sphericalangle \mathrm{F}$

הוכח:
$EA = FA$



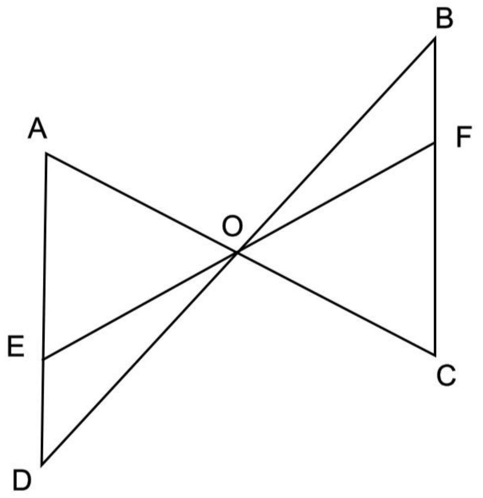
13. הישרים AC ו- BD נחתכים בנקודה E.
$\sphericalangle EDA = \sphericalangle \mathrm{ECB}$, $\sphericalangle EDC = \sphericalangle \mathrm{ECD}$.

הוכח : $AE = BE$



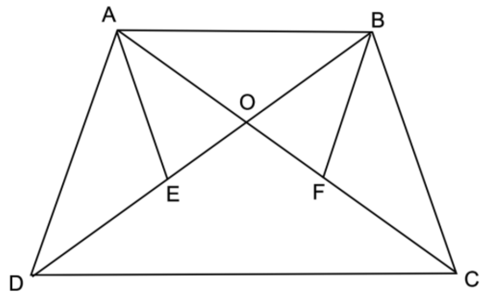
14. הקטעים AC ו-DB חוצים זה את זה.
הישר EF עובר דרך הנקודה O.
(הנקודות E ו-F נמצאות על AD ו-BC בהתאמה).

הוכח $EO = FO$



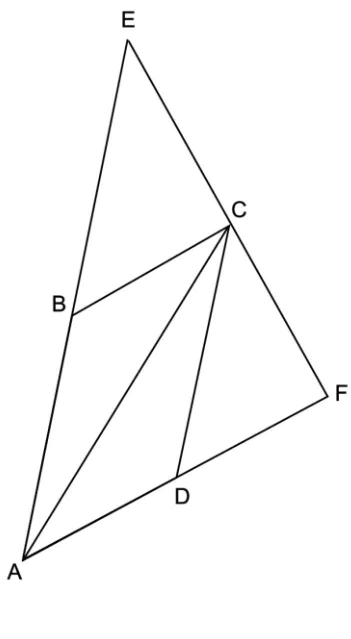
15. במרובע $ABCD$ נתון: $AD = BC$.
האלכסונים AC ו-BD שווים. $\angle EAO = \angle FBO$.

הוכח: $AE = BF$.



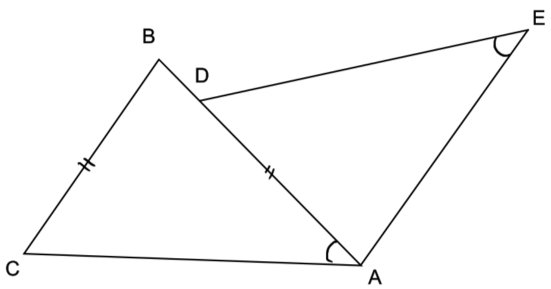
16. במרובע $ABCD$ יש 2 זוגות של צלעות נגדיות מקבילות ($AB \parallel DC$ ו- $AD \parallel BC$). $DC = BE$.

הוכח (ללא שימוש בידע קודם על מקבילית):
$EC = CF$



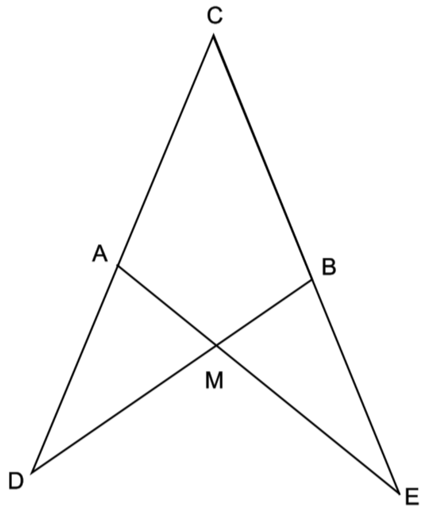
17. נתונים 2 משולשים ABC ו-ADE כך שהצלע AD מונחת על הצלע AB. נתון : $AD = BC$, $\sphericalangle E = \sphericalangle BAC$, $AE \parallel BC$.

הוכח: $AE - BD = BC$



18. הקטעים AE ו-DB נחתכים בנקודה M. המשכי הישרים AD ו-EB נחתכים בנקודה C.
נתון: $AC = BC$ ו-$AM = BM$

הוכח: $\sphericalangle D = \sphericalangle E$



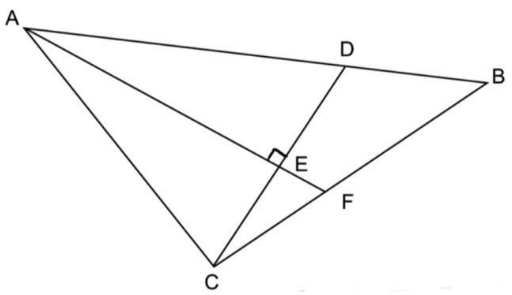
משולש שווה שוקיים ודלתון

התרגילים הבאים כוללים שימוש במשפטים הבאים:

1. במשולש שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות.
2. אם במשולש 2 זוויות שוות אז המשולש שווה שוקיים.
3. במשולש שווה שוקיים הגובה, התיכון וחוצה הזווית מתלכדים.
4. אם במשולש:
   4.1. הגובה הוא גם תיכון אז המשולש הוא שווה שוקיים.
   4.2. הגובה הוא גם חוצה זווית אז המשולש הוא שווה שוקיים.
   4.3. חוצה הזווית הוא גם תיכון אז המשולש הוא שווה שוקיים.
5. מרובע בעל 2 זוגות של צלעות סמוכות שוות נקרא דלתון.
   5.1. בדלתון האלכסון הראשי חוצה את זוויות הראש.
   5.2. בדלתון האלכסון הראשי חוצה את האלכסון המשני.
   5.3. בדלתון האלכסונים מאונכים זה לזה.

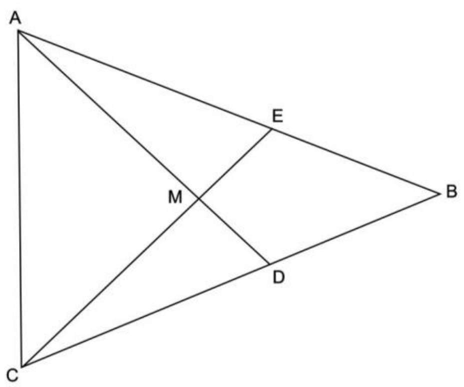
1. נתון $CB = AC$, $CD \perp AF$.
AF חוצה את זווית A.

הוכח (ללא שימוש בחפיפה):
$CB = AD$



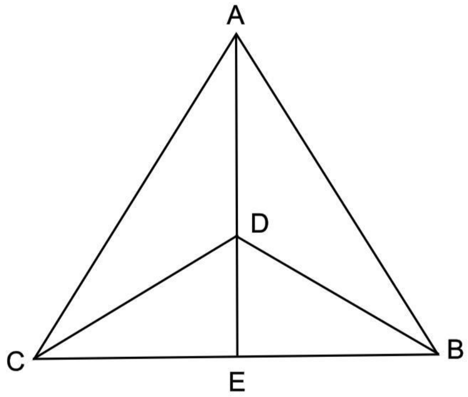
2. נתון ש-ABC הוא משולש שווה שוקיים
אשר בסיסו הוא AC. $\sphericalangle MAC = \sphericalangle MCA$.

הוכח:
$EB = BD$



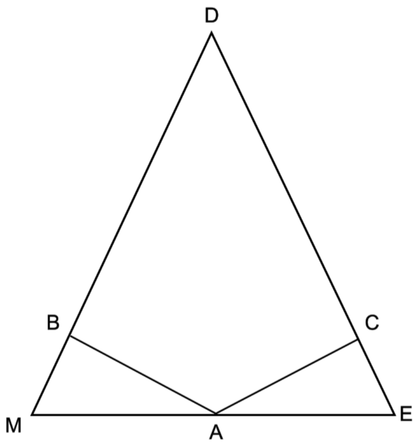
3. משולש ABC הוא שווה שוקיים ($BA = CA$). AE חוצה את זווית BAC. הנקודה D נמצאת על הקטע AE.

הוכח (ללא שימוש בחפיפה בכלל):
משולש CBD הוא שווה שוקיים.



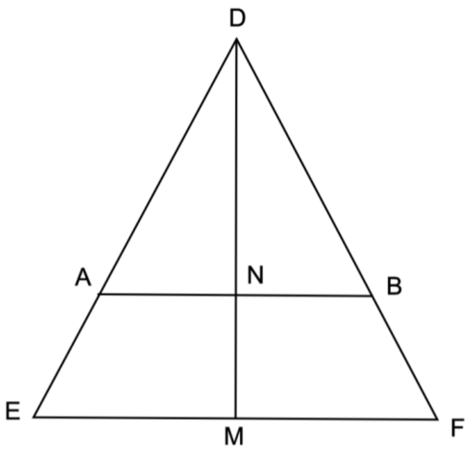
4. משולש MED הוא משולש שווה שוקיים אשר בסיסו הוא ME.
$BA \perp MD$, $CA \perp DE$.
$BA = CA$.

הוכח:
$MA = EA$.



5. $DE = DF$, $\sphericalangle DAB = \sphericalangle DBA$.
$EF \perp DM$.

הוכח (ללא שימוש בחפיפה בכלל):
$AN = NB$



6. משולש FED הוא משולש שווה שוקיים אשר בסיסו הוא DE. CE ו-DH הם חוצי זוויות הבסיס במשולש FED.

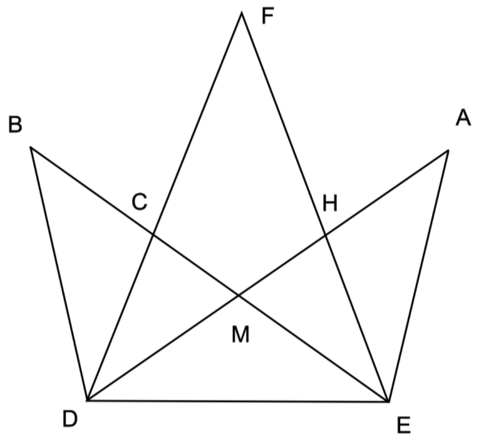
המשיכו את חוצי הזווית CE ו-DH עד לנקודות B ו-A בהתאמה כך ש:

$\measuredangle FDE = 2\measuredangle BDF$

$BC = AH$

הוכח:

$\measuredangle F = \measuredangle A$



7. במשולש DEF הנקודות A, B ו-C נמצאות על צלעות המשולש כך ש:

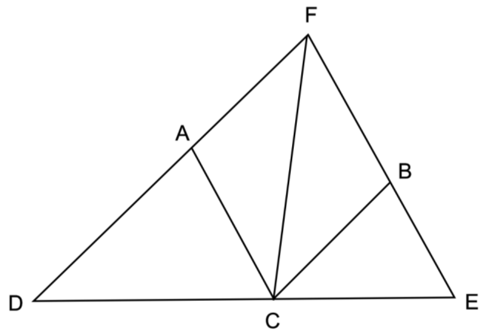
$BC \parallel DF$.

$FE \parallel AC$.

$BC = AC$.

הוכח (ללא שימוש בידע קודם על מקבילית):

CF חוצה את זווית F.

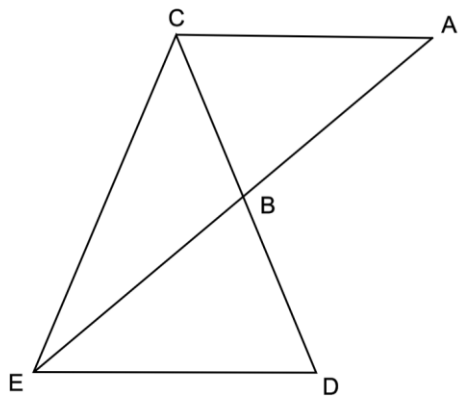


8. AE ו-DC חוצים זה את זה. נסמן את נקודת החיתוך שלהם ב-B.

$\measuredangle CED = \measuredangle ACB$

הוכח:

$EC = CD$.

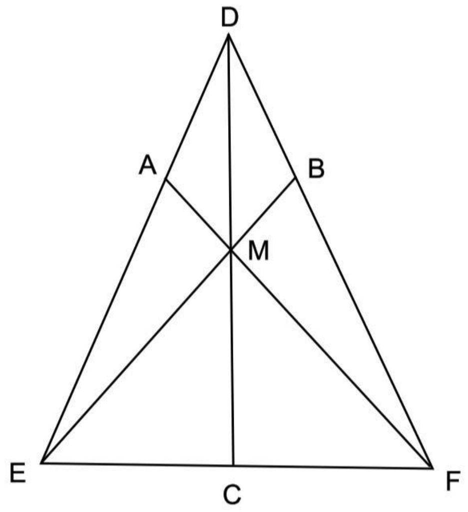


9. משולש FED הוא משולש שווה שוקיים אשר בסיסו הוא FE.

$AD = DB$.
$AM = MB$.

הוכח (ללא שימוש בחפיפה בכלל):
$\sphericalangle DCF = 90°$.

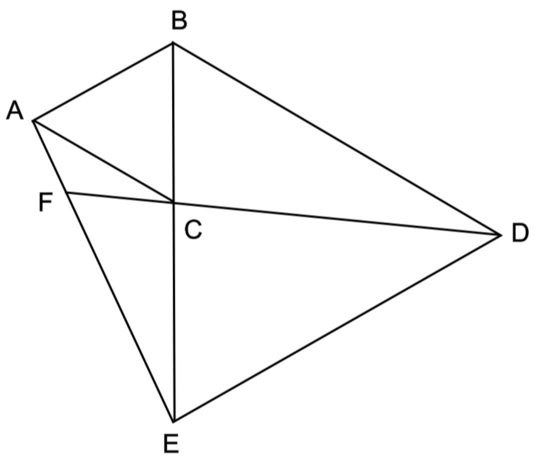
רמז: קרא את המשפטים בתחילת הנושא.



10. ΔDEB ו-ΔABC הם משולשים שווי צלעות.

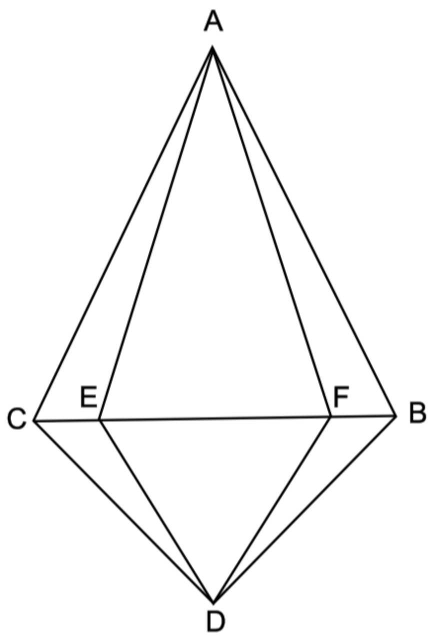
הוכח:

א. $CD = AE$.
ב. $\sphericalangle CFE = 60°$.



11. מרובע $AEDF$ הוא דלתון ($AE = AF$, $DF = DE$).
המשיכו את EF לשני הצדדים כך ש- $CE = BF$.

הוכח (ללא שימוש בחפיפה בכלל):
מרובע $ABDC$ הוא דלתון.



אי שיוויונים במשולש

התרגילים הבאים כוללים שימוש במשפטים הבאים:

1. במשולש (אם יש 2 צלעות שאורכן שונה) אז הזווית שמול הצלע הגדולה מבין השתיים, גדולה מהזווית שמול הצלע הקטנה מבין השתיים. או בקיצור:

"במשולש מול הצלע הגדולה מבין השתיים מונחת הזווית הגדולה מבין השתיים."

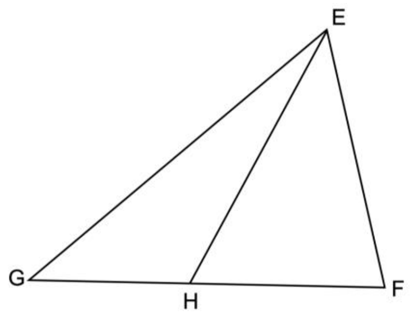
2. משפט הפוך: במשולש (אם יש 2 זוויות שגודלן שונה) אז הצלע שמול הזווית הגדולה מבין השתיים, גדולה מהצלע שמול הזווית הקטנה מבין השתיים. או בקיצור:

"במשולש מול זווית הגדולה מבין השתיים מונחת הצלע הגדולה מבין השתיים."

3. במשולש סכום כל 2 צלעות גדול מהצלע השלישית.

1. הנקודה H נמצאת על הצלע GF כך ש:
$GE > GF$ ו- $\sphericalangle HEF = \sphericalangle EGH$

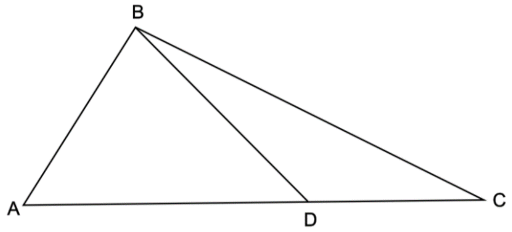
הוכח :
$\sphericalangle F > \sphericalangle G$



2. הוכח:
היתר במשולש ישר זווית היא הצלע
הגדולה ביותר במשולש

3. הוכח: במשולש ABC אם נחבר את קודקוד B לנקודה כלשהי D הנמצאת על AC. אז הקטע BD יהיה בהכרח קצר לפחות מאחת משתי הצלעות היוצרות את זווית B.
כלומר

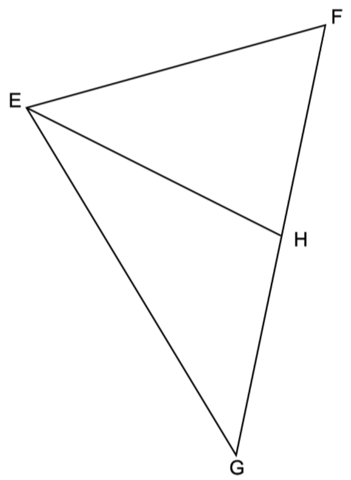
$BD < AB$ או $BD < BC$



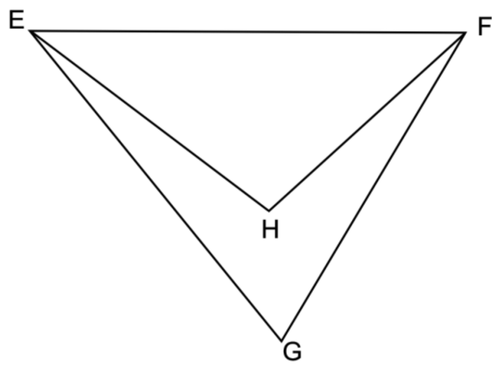
הבחן בין שני מקרים
1. הגובה היורד מקודקוד B פוגע בצלע AC.
2. הגובה היורד מקודקוד B פוגע בהמשך הצלע AC (גובה חיצוני).

4. EH הוא תיכון במשולש GEF.
$EH > HF$.

הוכח: $\sphericalangle GEF < \sphericalangle G + \sphericalangle F$.

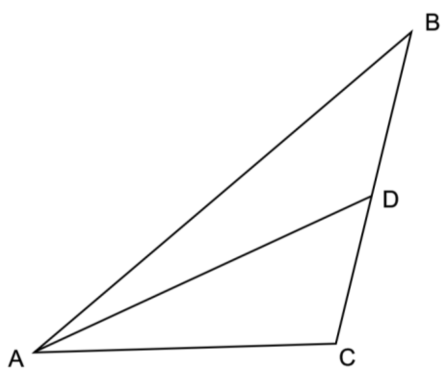


5. הנקודה H היא נקודה כלשהי בתוך המשולש EGF.
הדרכה: המשך את EH וסמן את נקודת המפגש שלו עם GF ב-M.
הוכח:
$$EH + FH < GE + GF$$



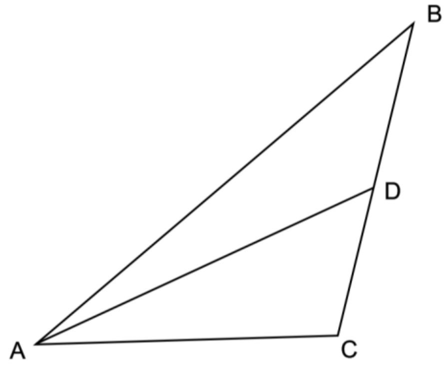
6. AD הוא תיכון במשולש ABC. נתון $AD = 7$,
$BC = 12$.

הוכח:
$$\sphericalangle BAC < \sphericalangle B + \sphericalangle C$$



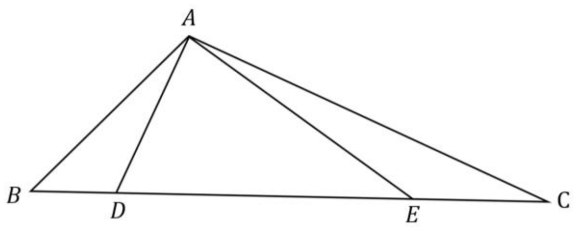
7. AD הוא תיכון במשולש ABC. נתון:
$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BC}} > \frac{1}{2}$.

הוכח:
$\sphericalangle\mathrm{BAC} < \sphericalangle\mathrm{B} + \sphericalangle\mathrm{C}$



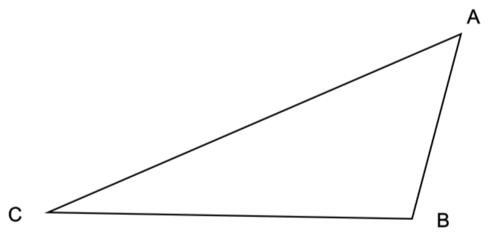
8. אורכי צלעות המשולש חד הזווית ADE הן:
$\mathrm{AD} = 6$, $AE = 8$, $DE = 9$.
הנקודה C נמצאת על המשך הצלע DE
מצידו של קדקוד E. הנקודה B נמצאת על
המשך הצלע DE מצידו של קדקוד D.

הוכח:
א. $\mathrm{AE} < \mathrm{AC}$
ב. $\mathrm{AB} + \mathrm{AC} > 14$



9. היקף המשולש ABC הוא 18.

הוכח:
$\mathrm{AB} < 9$.



10. נתון אורך הצלע AC במשולש ABC הוא 5.

הוכח: היקף המשולש ABC גדול מ-10.

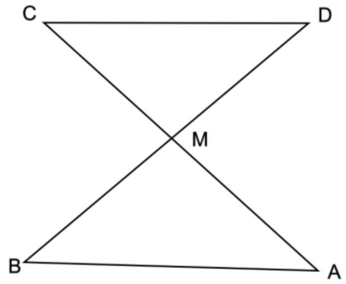
משפט חפיפה רביעי

התרגילים הבאים כוללים שימוש במשפטים הבאים:

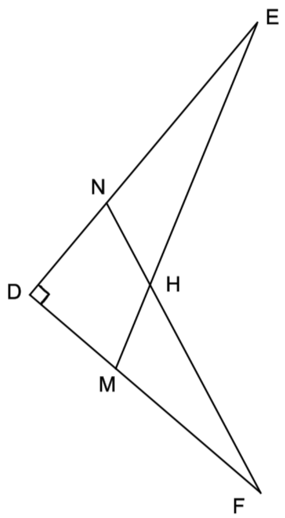
1. משפט חפיפה רביעי צלע, צלע והזווית שמול הצלע הגדולה.
2. ניתן להשתמש במשפט העזר: במשולש ישר זווית היתר היא הצלע הגדולה ביותר במשולש.
3. במשולש שווה שוקיים זוויות הבסיס הן חדות.
4. זווית צמודה לזווית חדה היא זווית קהה (והפוך).

1. BD חוצה את AC.
$CD = AB$, $AC \perp BD$

הוכח :
$MB = MD$

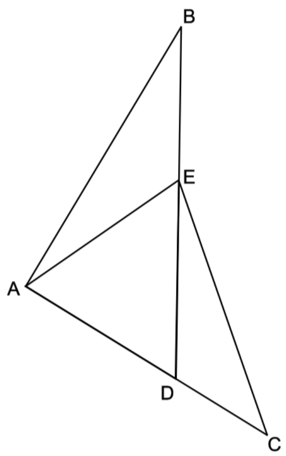


2. $ED \perp DF$, $EM = FN$, $\mathrm{DM} = \mathrm{DN}$.
הוכח :
$FH = HE$



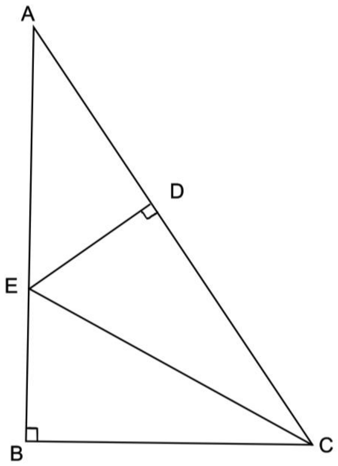
3. ADE הוא משולש שווה שוקיים ($\mathrm{AE} = \mathrm{AD}$),
בנוסף נתון $\mathrm{BE} = \mathrm{DC}$, $\mathrm{AB} = \mathrm{EC}$.

מצא את זווית הראש במשולש שווה השוקיים ADE.



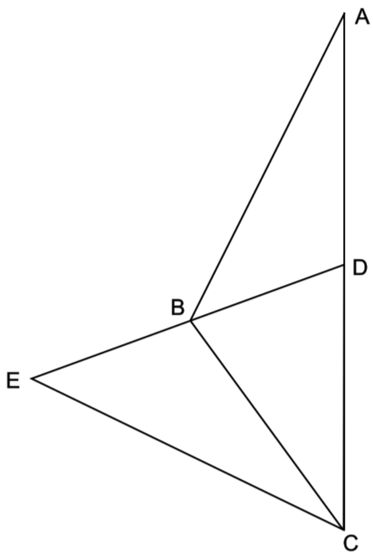
4. ABC הוא משולש ישר זווית.
$\sphericalangle ABC = 90°$.
$ED \perp AC$.
$BC = DC$.

הוכח:
$\sphericalangle AED = 2\sphericalangle ECB$



5. $BC = DC$, $EC = AB$.
B אמצע ED.

הוכח:
D אמצע AC.



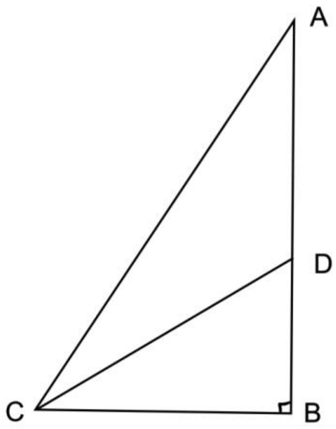
תכונות במשולש ישר זווית

התרגילים הבאים כוללים שימוש במשפטים הבאים:

5. במשולש ישר זווית הניצב שמול ה-30 שווה למחצית היתר.
6. אם במשולש ישר זווית הניצב שווה למחצית היתר אז הזווית שמול הניצב הזה שווה ל-30.
7. במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר.
8. אם במשולש התיכון לצלע שווה למחציתה אז המשולש הוא ישר זווית.

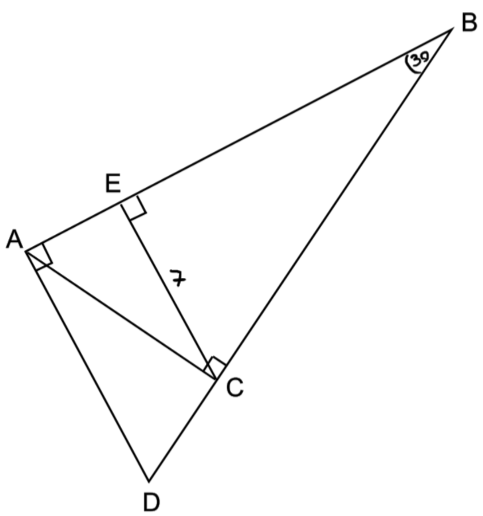
1. CD חוצה את $\sphericalangle ACB$ $\sphericalangle A = 30°$.
$\sphericalangle B = 90°$.

הוכח :
$AB = 3BD$



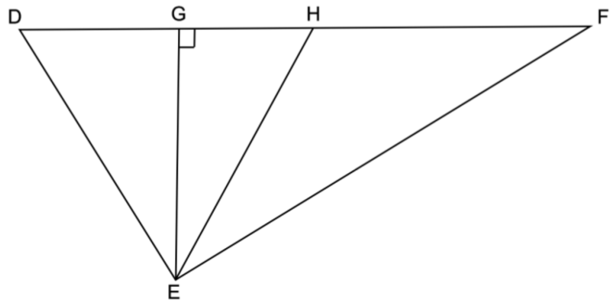
2. ABD משולש ישר זווית
$\sphericalangle DAB = 90°$ בנוסף ידוע ש:
$AC \perp BD$
$EC \perp AB$
$\sphericalangle B = 30°$
$EC = 7$

מצא את אורכו של BD.



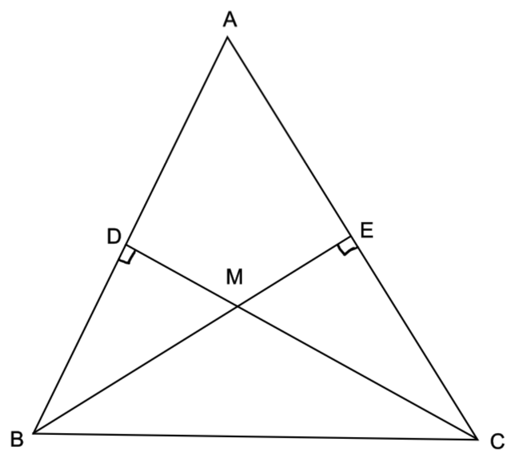
3. נתון:
$EG \perp DF$
$ED = 2DG$
$EG = \frac{1}{2}EF$
$HF = HE$

הוכח:
$HF = 2HG$



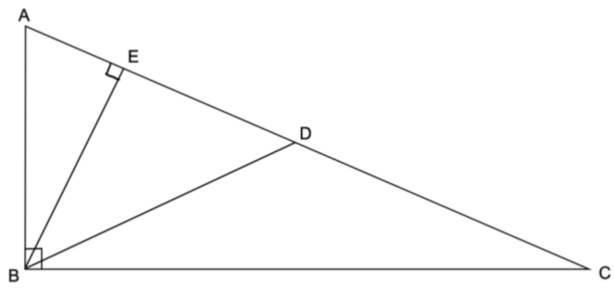
4. נתון:
$CD \perp AB$
$EB \perp AC$
משולש ABC הוא שווה שוקיים $AB = AC$.
$BE = 3ME$

הוכח:
משולש ABC הוא שווה צלעות



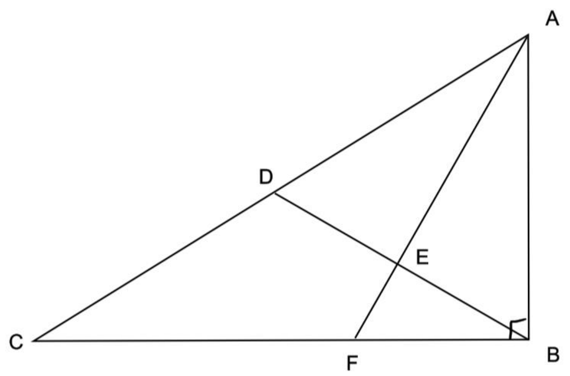
5. ABC הוא משולש ישר זווית.
$\sphericalangle ABC = 90°$
$\sphericalangle ABE = 21°$
$EB \perp AC$
BD הוא תיכון במשולש ABC .

חשב את זווית EBD.



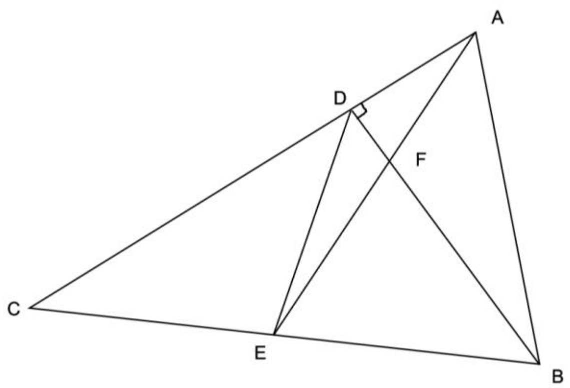
6. משולש ABC הוא משולש ישר זווית ($\sphericalangle ABC = 90°$). BD הוא תיכון במשולש ABC. AF הוא חוצה זווית במשולש ABC. $\sphericalangle ACB = 28°$.

חשב את זווית FEB.



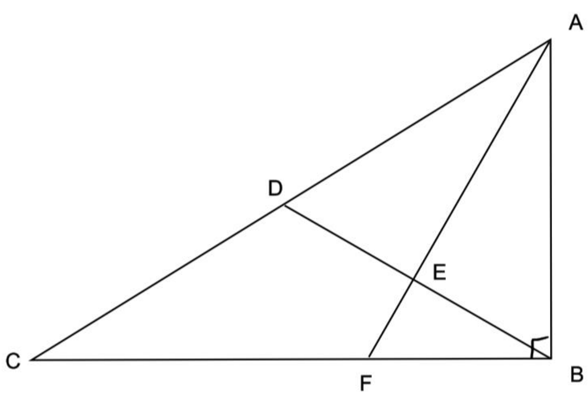
7. BD הוא גובה במשולש ABC.
AE הוא תיכון במשולש ABC.

הוכח:
משולש CDE הוא משולש שווה שוקיים.



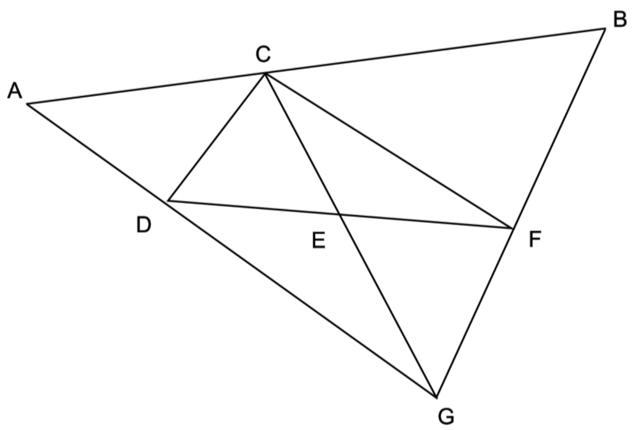
8. משולש ABC הוא משולש ישר זווית ($\sphericalangle ABC = 90°$). BD הוא תיכון במשולש ABC. AF הוא חוצה זווית במשולש ABC.
הנקודה E היא אמצע הקטע BD.

הוכח:
משולש ABD הוא שווה צלעות.



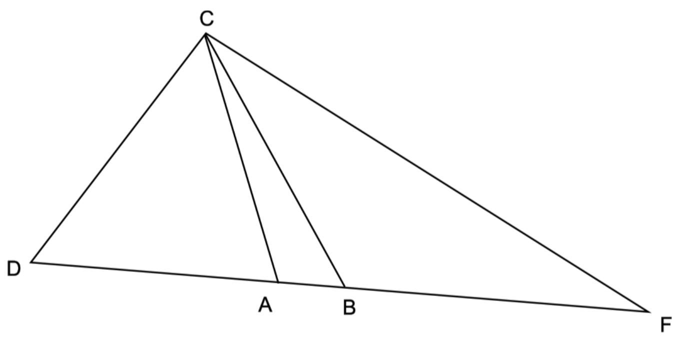
9. CD הוא חוצה זווית ACG.
CF הוא חוצה זווית BCG.
E אמצע DF.
$GE = 1.25CE$.

מצא את היחס $\frac{GE}{DF}$.



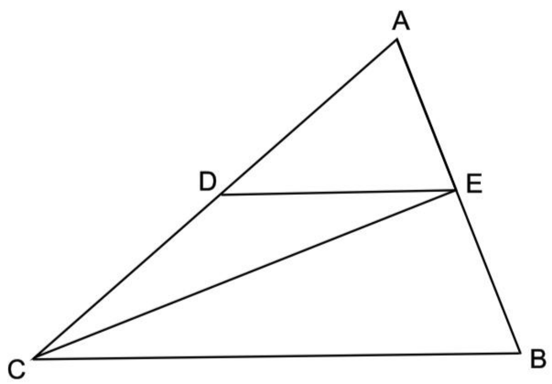
10. BC הוא תיכון במשולש DCF.
CA חוצה את זווית DCF.
$\sphericalangle CFB = 29°$
$\sphericalangle ABC = 58°$

חשב את $\sphericalangle CAB$



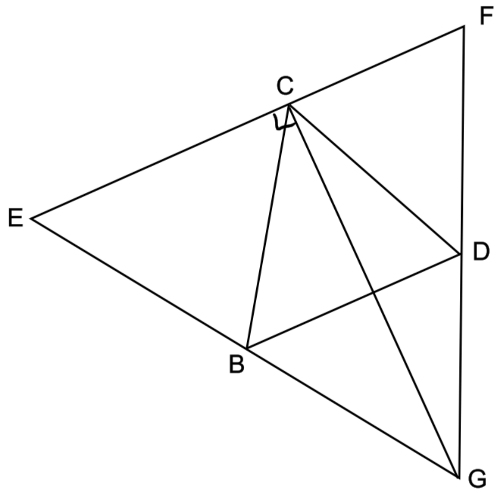
11. נתון:
$AD = ED$,$DE \parallel BC$.
$\sphericalangle BCE = \sphericalangle DCE$.

הוכח:
$AC = BC$



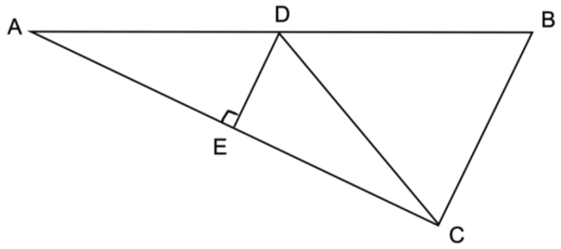
12. נתון:
הנקודה C נמצאת על צלע EF במשולש GEF
כך ש-$\sphericalangle GCE = 90°$.
D אמצע GF, B אמצע EG.

הוכח:
$GC \perp BD$



13. נתון:
E אמצע AC, D אמצע AB.
$\sphericalangle AED = 90°$.

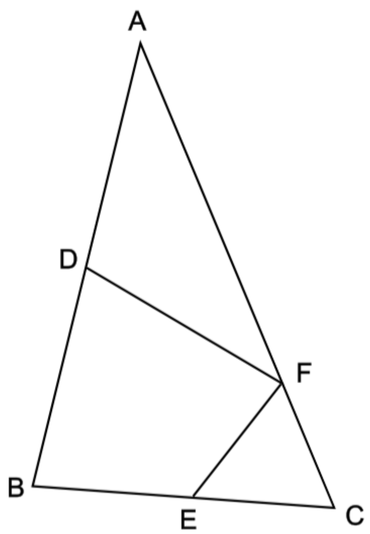
הוכח:
משולש ABC הוא ישר זווית.



14. נתון:
הנקודות D ו-E הן אמצעי
הקטעים AB ו-BC בהתאמה.
$EF = \frac{1}{2}BC$

הוכח:

$DF = \frac{1}{2}AB$



מרובעים-מקבילית

<u>משפטים חדשים-מקבילית :</u>

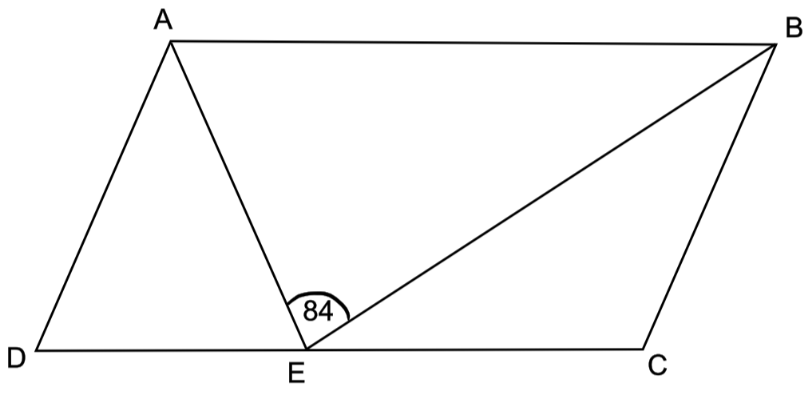
1. במקבילית צלעות נגדיות מקבילות
2. במקבילית צלעות נגדיות שוות
3. במקבילית זוויות נגדיות שוות
4. במקבילית זוויות סמוכות משלימות ל-180
5. במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה.

<u>איך מוכיחים שמרובע הוא מקבילית.</u>

1. מרובע המורכב משני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות נקרא מקבילית.(זאת למעשה הגדרת המקבילית)
2. אם במרובע שני זוגות של צלעות נגדיות שוות אז המרובע הוא מקבילית.
3. אם במרובע זוג צלעות נגדיות שוות ומקבילות אז המרובע הוא מקבילית.
4. אם במרובע שני זוגות של זוויות נגדיות שוות אז המרובע הוא מקבילית.
5. אם במרובע האלכסונים חוצים זה את זה אז המרובע הוא מקבילית

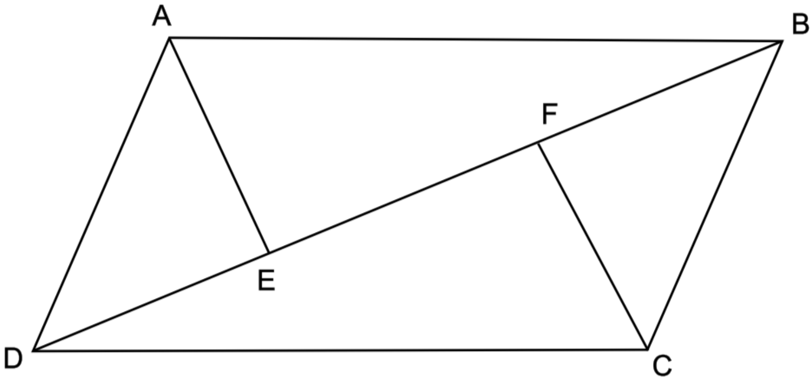
1. מרובע $ABCD$ הוא מקבילית.
$\sphericalangle AEB = 84°$
$CE = CB$,$AD = AE$.

חשב את זווית D.



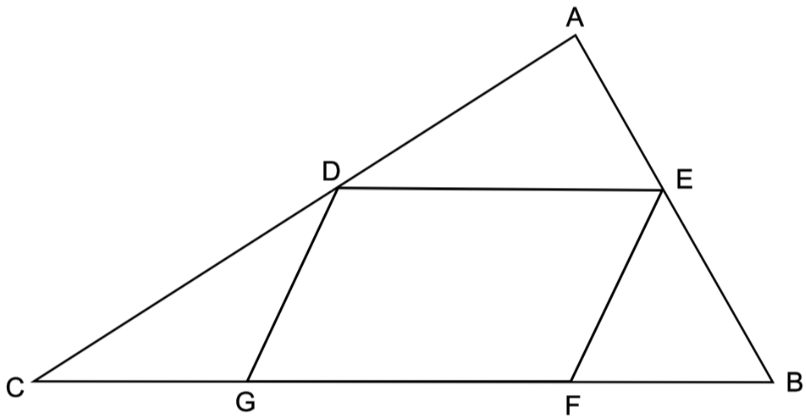
2. הוכח: בכל מקבילית הקדקודים הנגדיים נמצאים במרחקים שווים מהאלכסון שאינו עובר דרכם

תזכורת: מרחק נקודה מישר הוא המרחק הקצר ביותר כך שנוצרת זווית של $90°$.



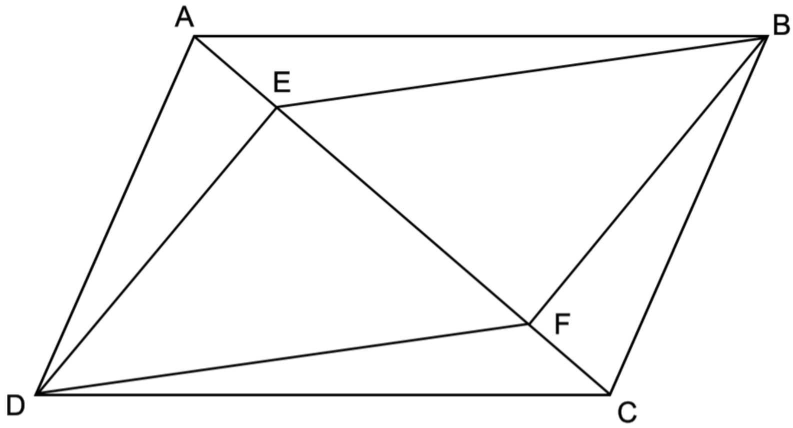
3. מרובע $DEFG$ הוא מקבילית.
$GC = GD = BF$.
הנקודות C ו-B נמצאות על המשך הצלע GF. הנקודה A היא מפגש המשכי הקטעים BE ו-CD.

הוכח:
זווית A היא זווית ישרה.



4. מרובע $ABCD$ הוא מקבילית.
$AE = CF$.

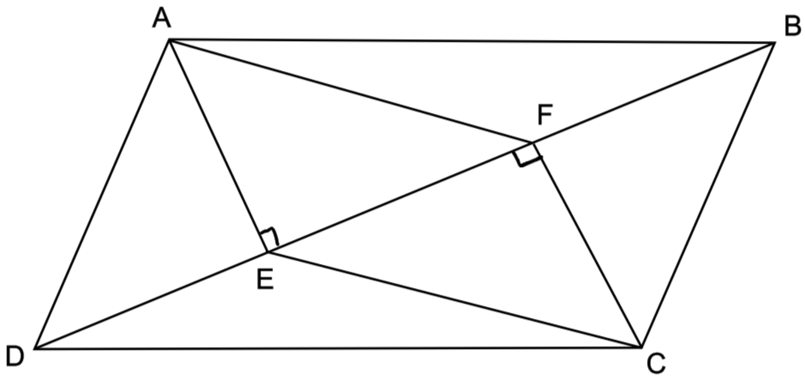
הוכח: מרובע $DEBF$ הוא מקבילית.
(נסה להוכיח בשתי דרכים שונות).



5. מרובע $ABCD$ הוא מקבילית.
$AE \perp BD$,
$CF \perp BD$.

הוכח:

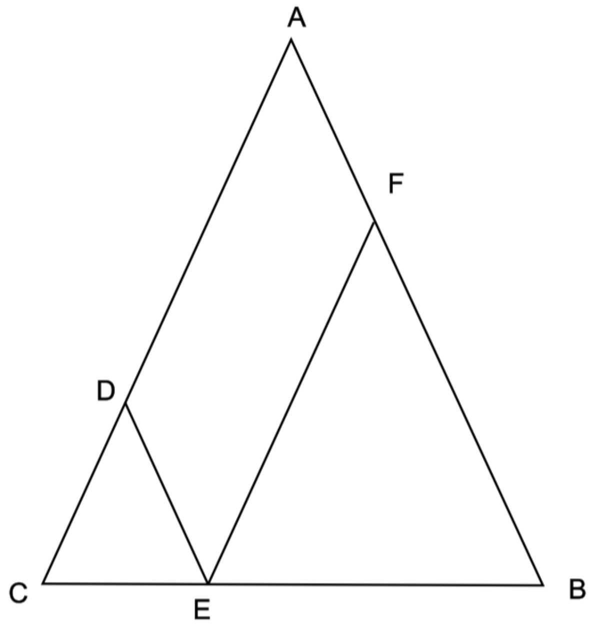
מרובע $AFCE$ הוא מקבילית.



6. משולש ABC הוא משולש שווה שוקיים ($AC = AB$).המרובע $ADEF$ הוא מקבילית.

הוכח:

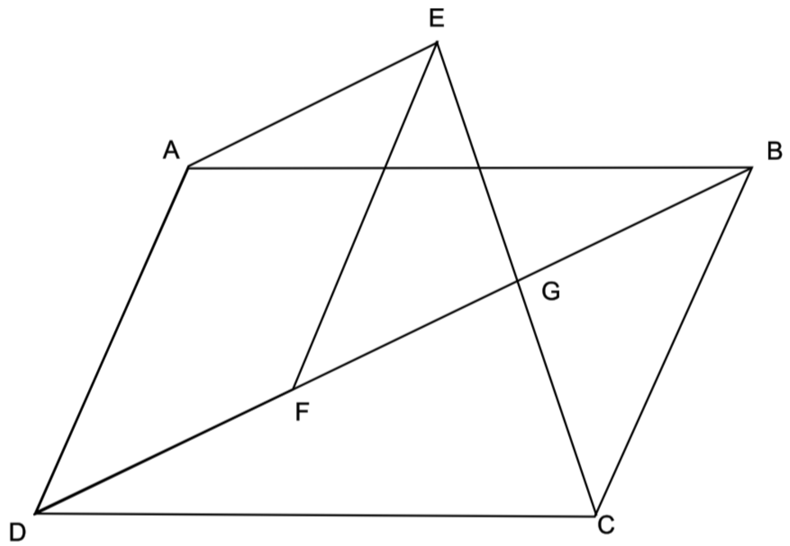
$$AC = DE + EF$$



7. נתונות שתי מקביליות $AEFD$ ו-$ABCD$. BD הוא אלכסון המקבילית $ABCD$. הנקודה F נמצאת על BD. EC חותך את BD בנקודה G.

הוכח:

$$FG = GB$$

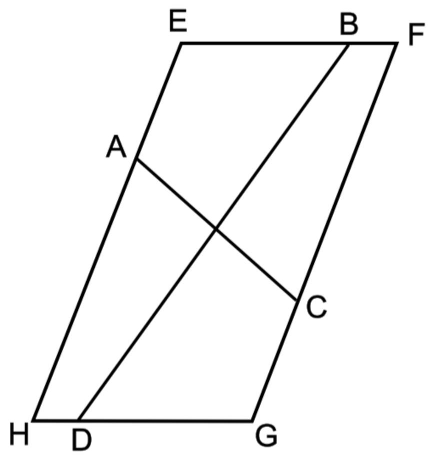


8. מרובע $EFGH$ הוא מקבילית.
$AE = CG$,
$BF = HD$.

הוכח:

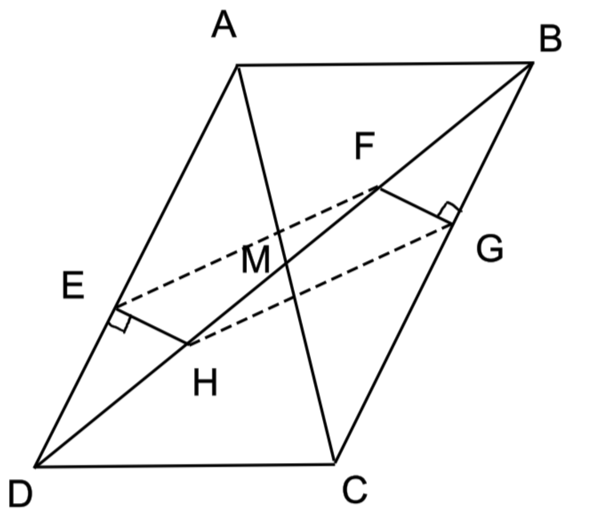
א. BD ו-AC חוצים זה את זה.

ב. אלכסוני המקבילית $EFGH$ עוברים בנקודת החיתוך של הישרים BD ו-AC.



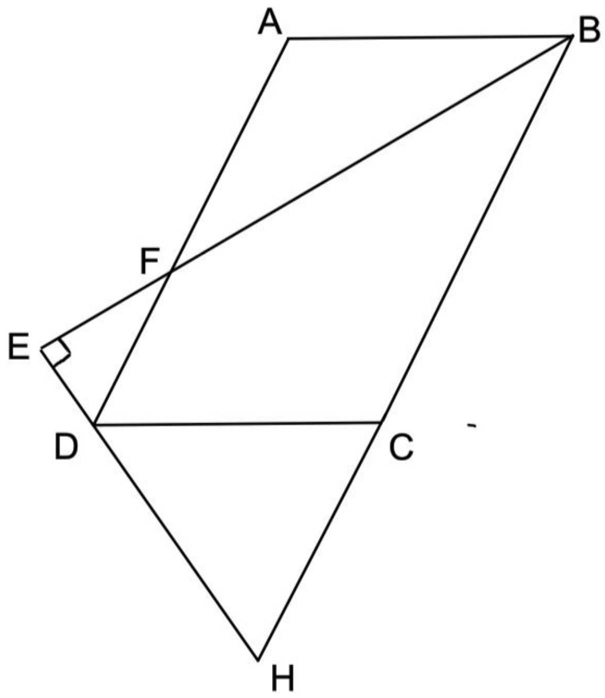
9. מרובע $ABCD$ הוא מקבילית. אלכסוני המקבילית נחתכים בנקודה M. הנקודות F ו-H נמצאות על אלכסון המקבילית BD כך ש-$\mathrm{HM} = \mathrm{MF}$. מהנקודות F ו-H הורידו גבהים לצלעות BC ו-AD בהתאמה.

הוכח:
מרובע $EFGH$ הוא מקבילית.



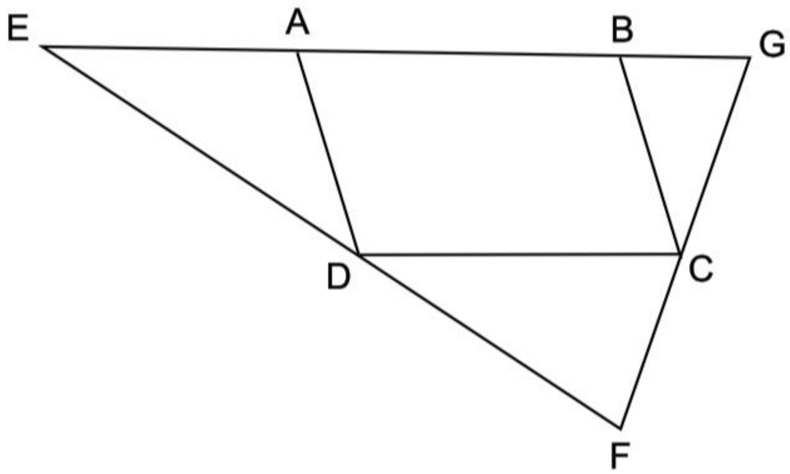
10. מרובע $ABCD$ הוא מקבילית. הנקודה H נמצאת על המשך הצלע BC כך ש-$HC = CD$. הנקודה E נמצאת על המשך הצלע HD כך ש-BE מאונך ל-HE.
הקטע BE חותך את הצלע AD בנקודה F.

הוכח:
$AF = HC$.



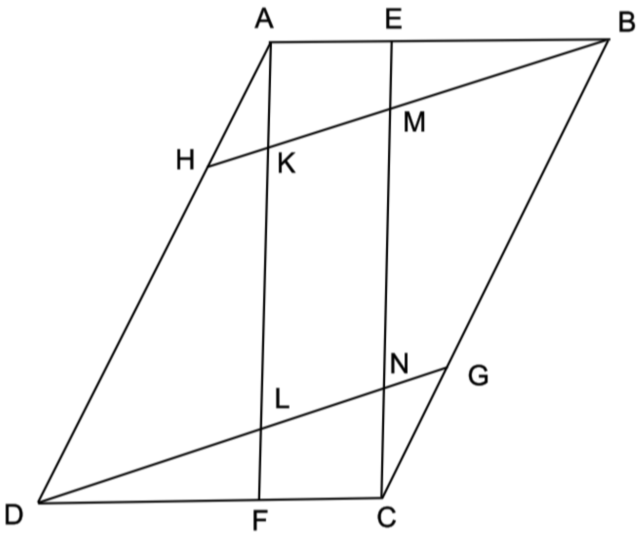
11. בתוך משולש שווה שוקיים EFG ($EG = EF$) חסומה מקבילית $ABCD$. נתון: $AE = CB = CG$.

מצא את זווית F.



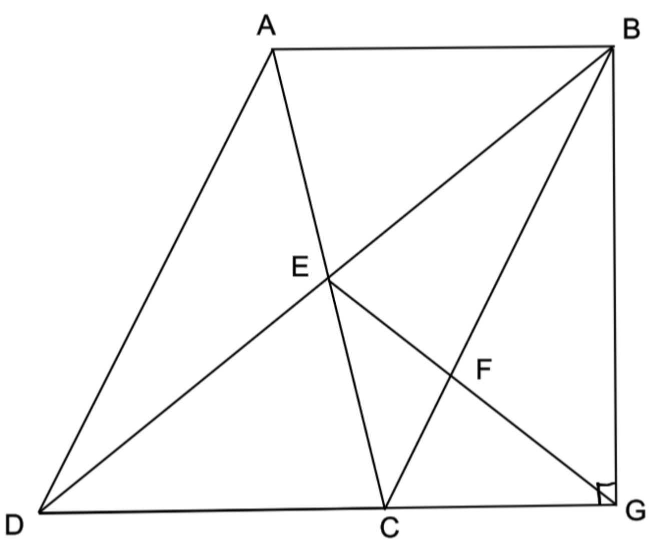
12. מרובע $ABCD$ הוא מקבילית. הנקודות E, G, F ו-H נמצאות על צלעות המקבילית כך ש: $AH = CG$, $EB = DF$.
הקטעים AF ו-EC חותכים את הקטע BH בנקודות M ו-K ואת הקטע DG בנקודות L ו-N.

הוכח המרובע $KMNL$ הוא מקבילית.



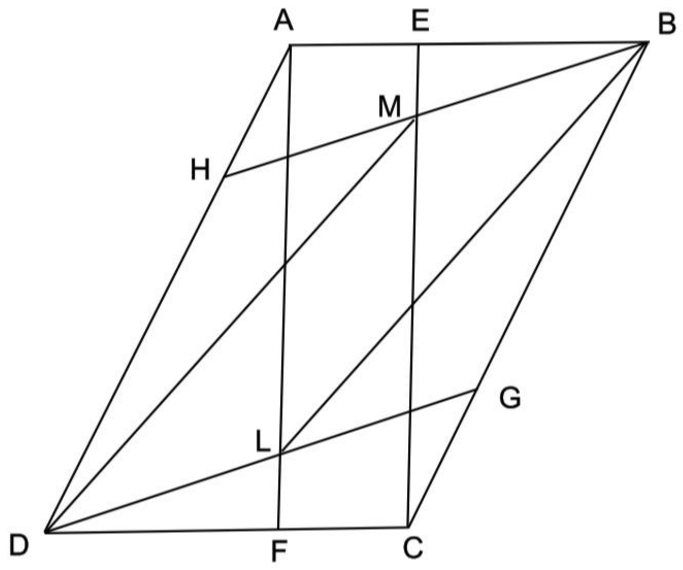
13. מרובע $ABCD$ הוא מקבילית. הנקודה G נמצאת על המשך הצלע DC כך ש-$DG \perp BG$.
אלכסוני המקבילית נחתכים בנקודה E.
מחברים את הנקודה E עם הנקודה G.

הוכח:
משולש EBG הוא שווה שוקיים.



14. מרובע $ABCD$ הוא מקבילית. הנקודות E, G, F
ו-H נמצאות על צלעות המקבילית כך ש:
$AF \parallel EC$, $BH \parallel DG$.
הקטע EC חותך את הקטע BH בנקודה M .
הקטע AF חותך את הקטע DG בנקודה L.

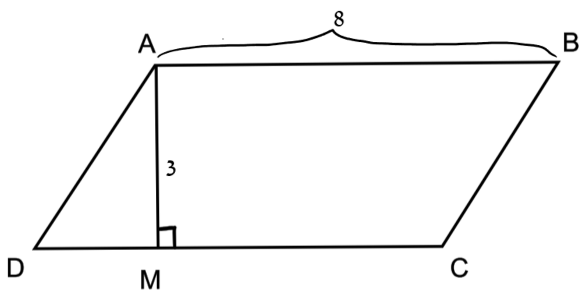
הוכח: המרובע $MBLD$ הוא מקבילית.



שטח מקבילית

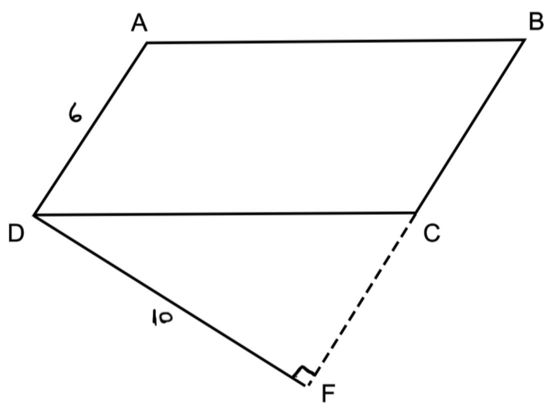
1. מרובע $ABCD$ הוא מקבילית. AM
הוא גובה לצלע DC.
$AB = 8$
$AM = 3$

חשב את שטח המקבילית



2. מרובע $ABCD$ הוא מקבילית.AF
הוא גובה חיצוני לצלע BC.
$AD = 6$
$DF = 10$

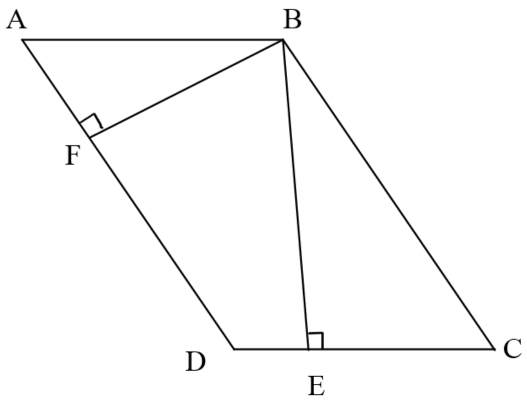
חשב את שטח המקבילית



3. מרובע $ABCD$ הוא מקבילית. BF הוא גובה לצלע AD. BE הוא גובה לצלע DC.
$AB = 13$ ס"מ.
$BF = 12$ ס"מ.
$BC = 26$ ס"מ.

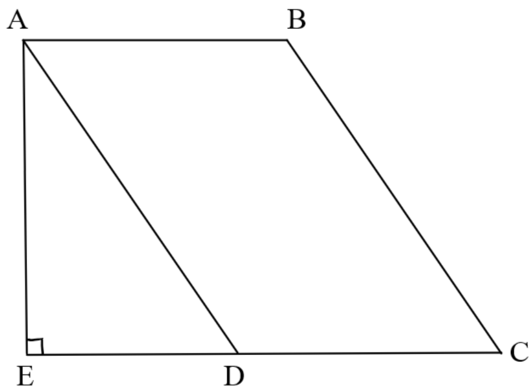
א. חשב את שטח המקבילית

ב. חשב את אורכו של BE.



4. מרובע $ABCD$ הוא מקבילית.
הנקודה E על המשך הצלע DC כך שהקטע AE מאונך ל-EC.
$EC = 20$ ס"מ.
$AE = 15$ ס"מ.
שטח המקבילית הוא 180 סמ"ר.

חשב את היקף המקבילית.



מרובעים- מלבן

<u>הגדרת המלבן</u>: מלבן הוא מקבילית בעלת זווית ישרה.

<u>משפטים חדשים-מלבן :</u>
למעשה כל מה שאמרנו על מקבילית ניתן לומר על מלבן

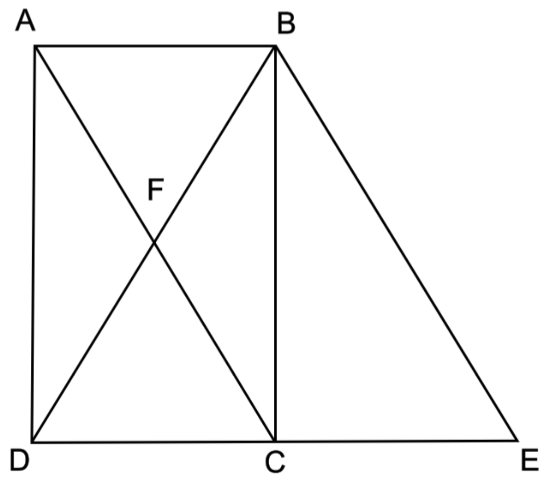
1. במלבן צלעות נגדיות מקבילות
2. במלבן צלעות נגדיות שוות
3. במלבן כל הזוויות ישרות.
4. במלבן האלכסונים שווים זה לזה
5. במלבן האלכסונים חוצים זה את זה

<u>איך מוכיחים שמרובע הוא מלבן</u>

1. אם במקבילית זווית אחת ישרה אז המקבילית היא מלבן (זאת למעשה הגדרת המלבן)
2. אם במקבילית האלכסונים שווים זה לזה אז המקבילית היא מלבן.
3. אם במרובע 3 זוויות ישרות אז המרובע הוא מלבן. (זאת הגדרה נוספת למלבן- בנוסף ל-6)

<u>שאלה 1</u>
מרובע $ABCD$ הוא מלבן ומרובע $ABEC$ הוא מקבילית.

הוכח: משולש DBE הוא משולש שווה שוקיים.



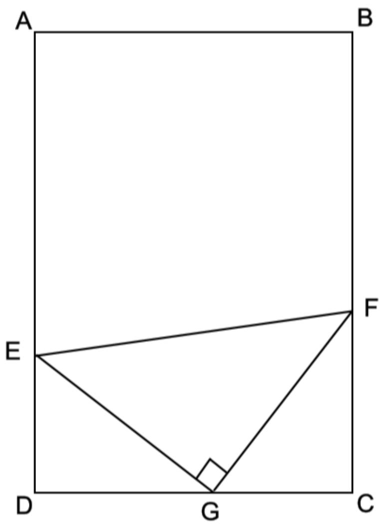
<u>שאלה 2</u>

מרובע $ABCD$ מלבן

$\sphericalangle EGF = 90°$

$ED = GC$

חשב את זווית GEF



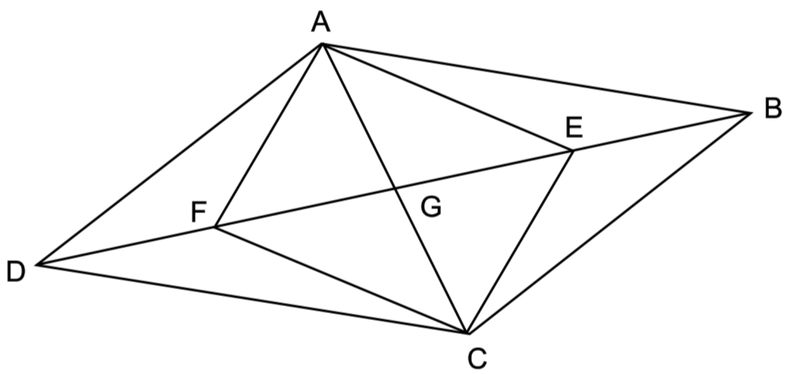
<u>שאלה 3</u>

מרובע $ABCD$ הוא
מקבילית. הנקודות E
ו-F הן אמצעי הקטעים
BG ו-DG בהתאמה.

$BD = 2AC$

הוכח:

מרובע $AECF$ הוא מלבן.

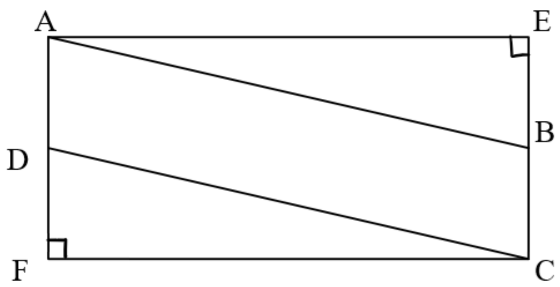


<u>שאלה 4</u>

מרובע $ABCD$ הוא מקבילית. הנקודות E ו-F
נמצאות על המשכי הצלעות BC ו-DA
בהתאמה כך ש-$AE \perp EC$ ו- $AF \perp CF$.

הוכח:

מרובע $AECF$ הוא מלבן.



מרובעים- מעוין

<u>הגדרת המעוין</u>: מקבילית בעלת שתי צלעות סמוכות שוות נקראת מעוין.

<u>משפטים חדשים-מעוין :</u>
למעשה כל מה שאמרנו על מקבילית ניתן לומר על מעוין

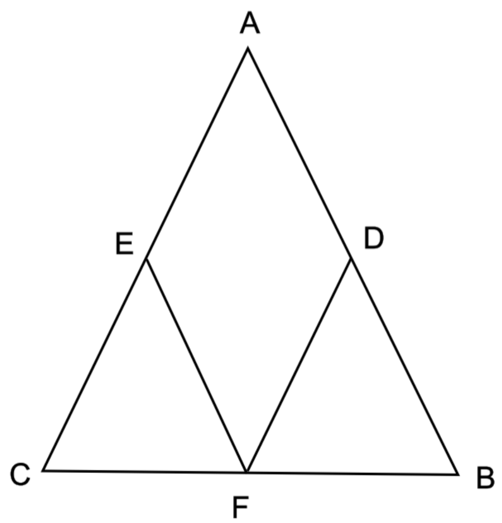
1. במעוין כל הצלעות שוות
2. במעוין צלעות נגדיות מקבילות
3. במעוין זוויות נגדיות שוות
4. במעוין האלכסונים חוצים זה את זה
5. במעוין האלכסונים חוצים את זוויות המעוין
6. במעוין האלכסונים מאונכים זה לזה

<u>איך מוכיחים שמרובע הוא מעוין</u>

1. אם במקבילית שתי צלעות סמוכות שוות אז המקבילית היא מעוין
2. אם במקבילית האלכסונים מאונכים זה לזה אז המקבילית היא מעוין
3. אם במקבילית האלכסון חוצה זווית אז המקבילית היא מעוין
4. אם במרובע כל הצלעות שוות אז המרובע הוא מעוין.

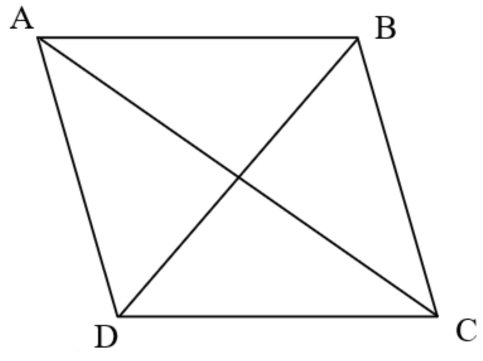
<u>שאלה 1</u>
מרובע $ADFE$ הוא מעוין.
$AB = AC$.

הוכח:
E אמצע הקטע AC.



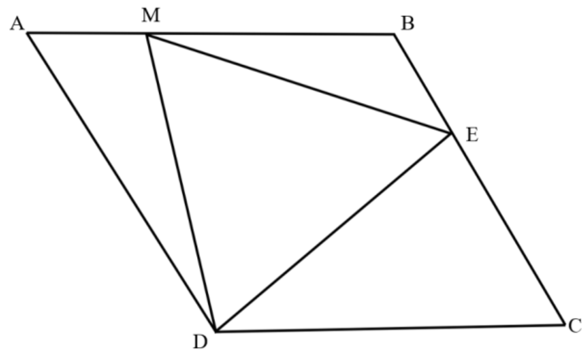
<u>שאלה 2</u>
מרובע $ABCD$ הוא מעוין.
נתון שהיקף המשולש ABD קטן ב-2 ס"מ מהיקף המשולש ABC. שטח המעוין הוא 24 סמ"ר.

חשב את היקף המעוין.



<u>שאלה 3</u>
מרובע $ABCD$ הוא מעוין.
.$\sphericalangle C = 60°$, $AM = BE$

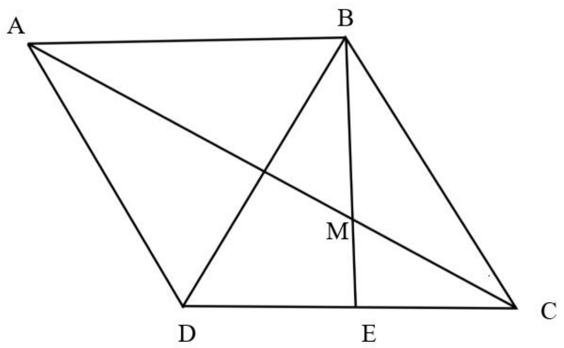
הוכח:
א) $DM = DE$
ב) משולש DME שווה צלעות.



<u>שאלה 4</u>
מרובע $ABCD$ הוא מעוין.
BE הוא חוצה זווית DBC.
.$MB = \mathrm{MC}$

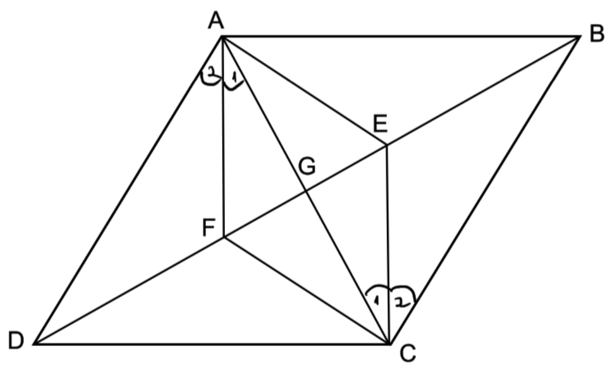
הוכח:

$EB \perp \mathrm{DC}$



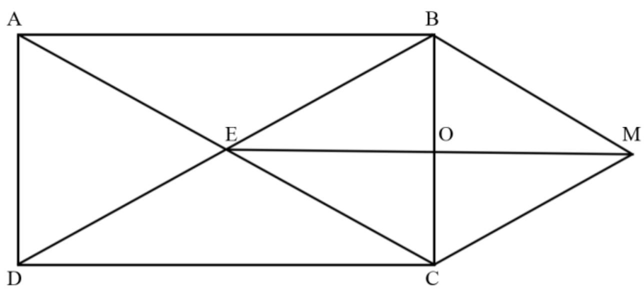
<u>שאלה 5</u>
מרובע $ABCD$ הוא מעוין.
AF חוצה את זווית DAG
EC חוצה את זווית GCB

הוכח:
מרובע $AECF$ מעוין.



<u>שאלה 6</u>
מרובע $ABCD$ הוא מלבן.
מרובע $EMCD$ הוא מקבילית.

הוכח: מרובע $EBMC$ הוא מעוין.



מרובעים- ריבוע

<u>הגדרת הריבוע</u>:

<u>הגדרה 1</u>: מלבן בעל 2 צלעות סמוכות שוות נקרא ריבוע

<u>הגדרה 2</u>: מעוין בעל זווית ישרה נקרא ריבוע

<u>הגדרה 3</u>: מרובע שכל זוויותיו וכל צלעותיו שוות נקרא ריבוע.

<u>משפטים חדשים-ריבוע :</u>

למעשה כל מה שאמרנו על מקבילית, מלבן ומעוין ניתן לומר על ריבוע

1. בריבוע כל הצלעות שוות
2. בריבוע צלעות נגדיות מקבילות
3. בריבוע האלכסונים חוצים זה את זה
4. בריבוע האלכסונים שווים זה לזה
5. בריבוע האלכסונים מאונכים זה לזה
6. בריבוע האלכסונים חוצים את זוויות הריבוע
7. בריבוע כל הזוויות ישרות.

<u>איך מוכיחים שמרובע הוא ריבוע:</u>

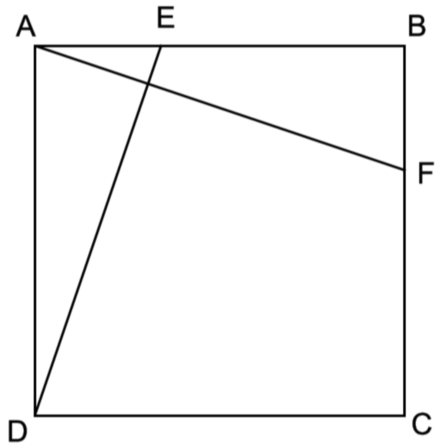
1. אם במלבן שתי צלעות סמוכות שוות אז המלבן הוא ריבוע
2. אם במלבן האלכסון חוצה זווית אז הוא ריבוע
3. אם במלבן האלכסונים מאונכים זה לזה אז המלבן הוא ריבוע.
4. אם במעוין זווית אחת ישרה אז המעוין הוא ריבוע
5. אם במעוין האלכסונים שווים זה לזה אז המעוין הוא ריבוע.

<u>שאלה 1</u>

מרובע $ABCD$ הוא ריבוע. הנקודות E ו-F נמצאות צלעות הריבוע AB ו-BC בהתאמה כך ש-$CF = EB$.

הוכח:

$DE \perp AF$

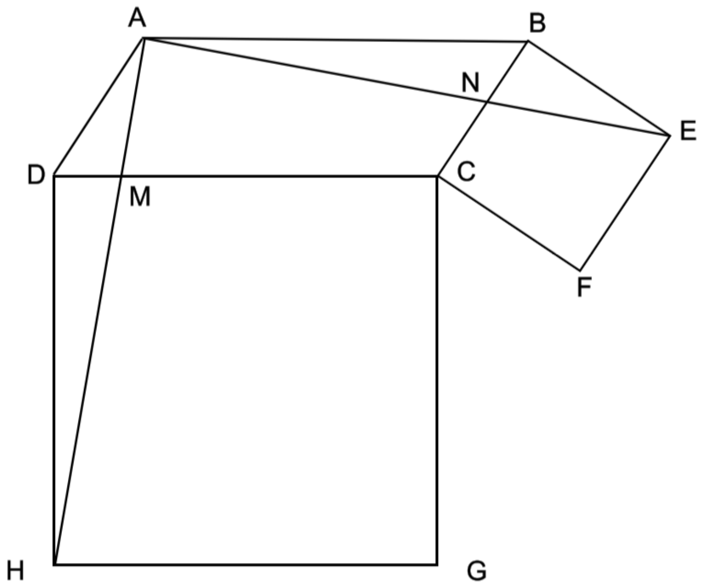


<u>שאלה 2</u>

על צלעותיה של מקבילית $ABCD$ בנו שני ריבועים: $DCGH$ ו-$BEFC$.

הוכח:

$\sphericalangle HAE = 90^\circ$

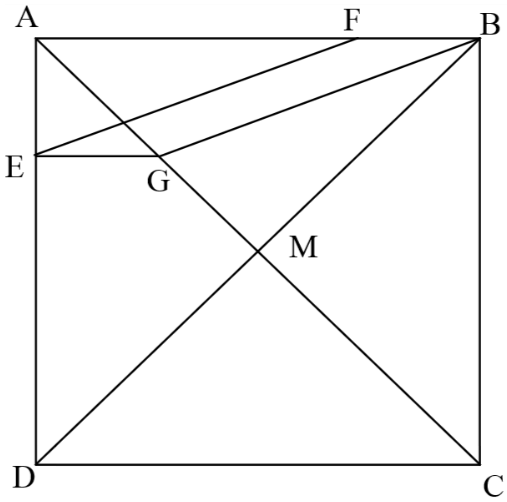


<u>שאלה 3</u>

מרובע $ABCD$ הוא ריבוע. אלכסוני הריבוע נחתכים בנקודה M.
הנקודה G נמצאת על אלכסון AC כך ש-BG חוצה את זווית ABD.
$AE = GM$,$AF = MB$.

הוכח:

מרובע $EFBG$ מקבילית

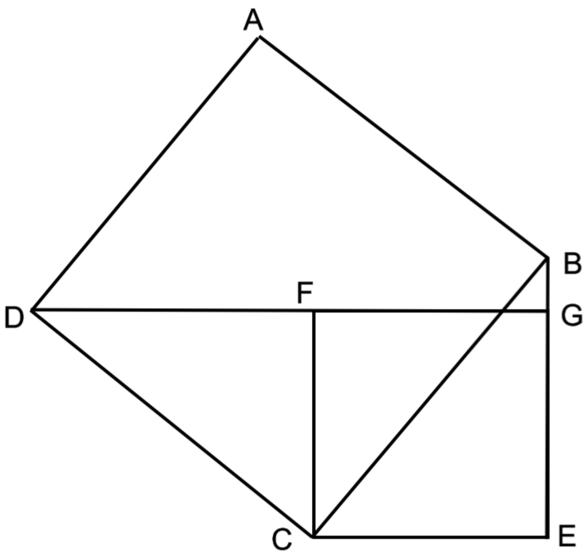


<u>שאלה 4</u>

המרובע $ABCD$ הוא ריבוע. על הצלע BC של הריבוע בנו משולש ישר זווית CBE ($\sphericalangle BEC = 90^\circ$) מהקודקוד D של הריבוע העבירו ישר המקביל ל-CE וחותך את BE בנקודה G. מהקודקוד C של הריבוע העבירו ישר המקביל ל-BE וחותך את GD בנקודה F.

הוכח:

$CFGE$ הוא ריבוע (היעזר בחפיפת משולשים).



טרפז

1. טרפז הוא מרובע בעל זוג אחד של צלעות נגדיות מקבילות וזוג אחד של צלעות נגדיות לא מקבילות.
2. אם במרובע זוג אחד של צלעות נגדיות מקבילות ולא שוות אז המרובע הוא טרפז.
3. טרפז ישר זווית הוא טרפז שבו אחת השוקיים מאונכת לבסיס
4. טרפז שווה שוקיים הוא טרפז ששוקיו שוות.
5. בטרפז שווה שוקיים הזוויות ליד כל בסיס שוות.
6. בטרפז שווה שוקיים האלכסונים שווים זה לזה.

<u>כדי להוכיח טרפז שווה שוקיים יש 3 דרכים</u>:

1. טרפז ששוקיו שוות נקרא טרפז שווה שוקיים.
2. אם בטרפז זוויות הבסיס שוות אז הטרפז הוא שווה שוקיים. (לא משנה אם זה הבסיס הקטן או הגדול).
3. אם בטרפז האלכסונים שווים אז הטרפז הוא שווה שוקיים

<u>הוכחת טרפז</u>:

<u>אפשרות אחת</u>:

$AB \parallel DC$

וגם

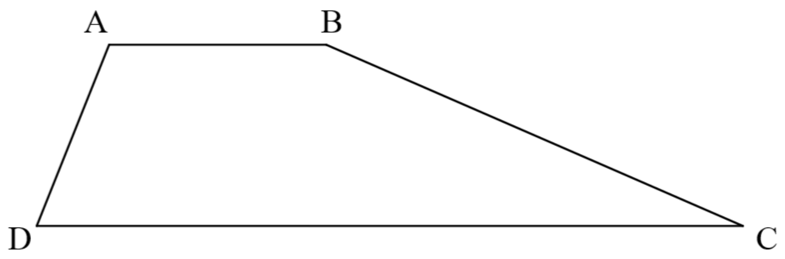
$AB \neq DC$

<u>אפשרות שניה</u>:

$AB \parallel DC$

וגם

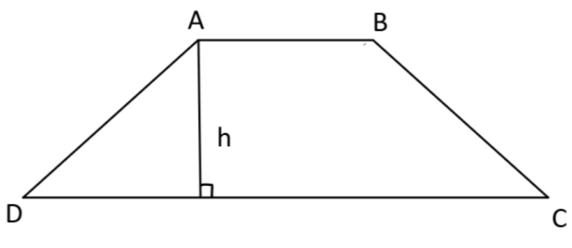
$AD \nparallel BC$



חישוב שטח טרפז

$$S_{\text{טרפז}} = \frac{\text{גובה} \cdot (\text{סכום הבסיסים})}{2}$$

$$S_{\text{טרפז}} = \frac{(AB + DC\ ) \cdot h}{2}$$

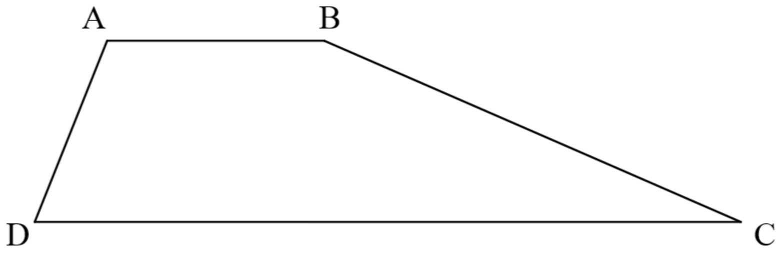


<u>הערות</u> :

א. בנית עזר נפוצה בטרפז היא להוריד שני גבהים ולקבל מלבן ושני משולשים. בטרפז שווה שוקיים המשולשים שנוצרו יהיו חופפים.

ב. בנית עזר נפוצה בטרפז היא להעביר מהקדקוד של הבסיס הקטן ישר שמקביל לאחת השוקיים ולקבל מקבילית ומשולש.

שאלה 1



נתון טרפז ABCD

$(AB \parallel DC)$. $AB = AD$

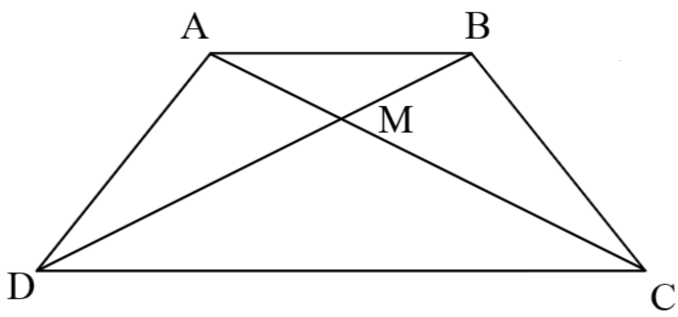
$\sphericalangle ADC = 60^\circ$,

$\sphericalangle ABC = 150^\circ$

הוכח :

$$AD = \frac{1}{3}CD$$

שאלה 2



נתון טרפז שווה שוקיים

$ABCD$ $(AB \parallel DC)$.

הוכח:

האלכסונים בכל טרפז שווה שוקיים מחלקים זה את זה ל-4 קטעים כך שכל זוג קטעים שקרוב לבסיס שווים זה לזה.

כלומר :

$$MD = MC$$

וגם

$$MA = MB$$

קטע אמצעים במשולש (ק.א.)

1. הגדרה: קטע במשולש המחבר אמצעי שתי צלעות נקרא קטע אמצעים במשולש
2. קטע אמצעים במשולש (המחבר אמצעי שתי צלעות) מקביל לצלע השלישית
3. קטע אמצעים במשולש (המחבר אמצעי שתי צלעות) שווה למחצית הצלע השלישית

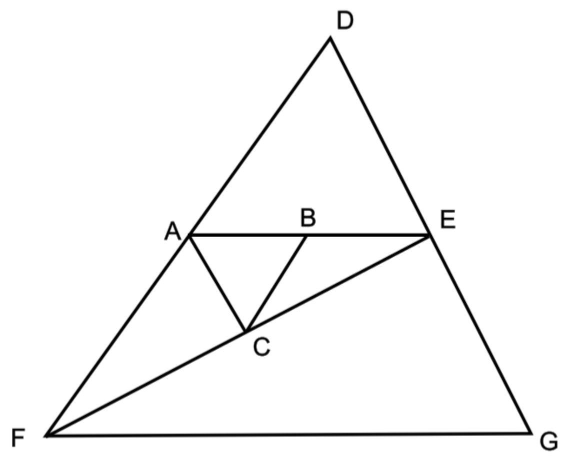
<u>כדי להוכיח קטע אמצעים במשולש יש 3 דרכים</u>

1. קטע במשולש המחבר אמצעי שתי צלעות נקרא קטע אמצעים במשולש (זוהי ההגדרה).
2. קטע במשולש היוצא מאמצע צלע אחת ומקביל לאחרת הוא קטע אמצעים במשולש
3. קטע במשולש המחבר שתי צלעות, מקביל לשלישית ושווה למחציתה הוא קטע אמצעים במשולש.

<u>שאלה 1</u>

נתון משולש שווה צלעות ABC שאורך צלעו הוא 7 ס"מ. בנוסף:
$EG = ED$, $AF = AD$.
B אמצע הקטע AE.
BC מקביל לצלע FD.

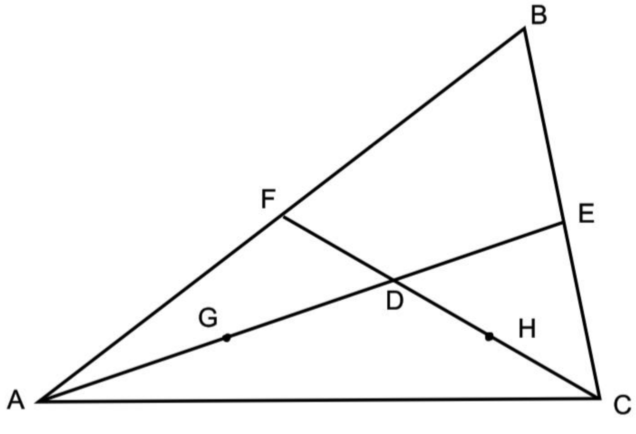
מצא את היקף המשולש FDG.



<u>שאלה 2</u>

במשולש ABC התיכונים לצלעות BC ו-AB נחתכים בנקודה D.
G ו-H הן אמצעי הקטעים AD ו-DC בהתאמה.

הוכח:
$GF = HE$

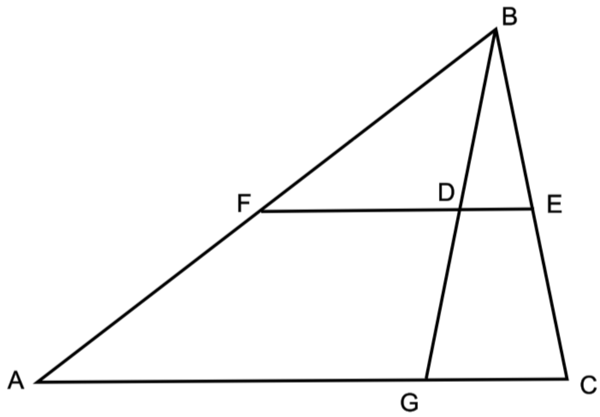


שאלה 3

הוכח: אם קטע אמצעים במשולש מחבר שתי צלעות ונחבר קו היוצא מהקדקוד המשותף לצלעות אלו אז הקטע אמצעים יחצה אותו.

ניסוח קצר של השאלה:
נתון: FE קטע אמצעים במשולש ABC

הוכח: $BD = DG$

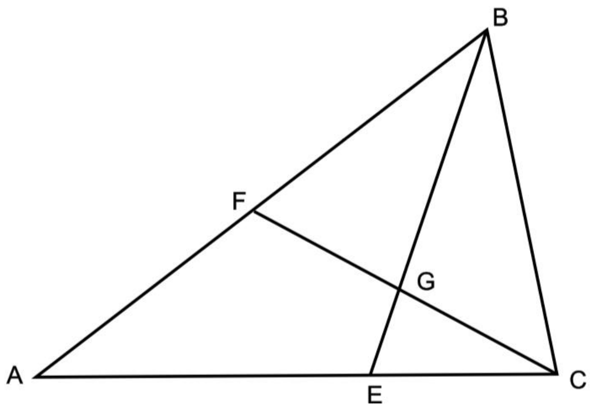


שאלה 4

נתון : CF תיכון במשולש $.ABC$ BG תיכון במשולש $.BFC$

הוכח:
AC ארוך פי 3 מ- $.EC$

רמז: העבר בניית עזר היוצרת ק.א.



קטע אמצעים בטרפז (ק.א.)

1. הגדרה: קטע בטרפז המחבר את אמצעי השוקיים נקרא קטע אמצעים בטרפז
2. קטע אמצעים בטרפז מקביל לבסיסי הטרפז.
3. קטע אמצעים בטרפז שווה למחצית סכום בסיסי הטרפז.

כדי להוכיח קטע אמצעים בטרפז יש 3 דרכים

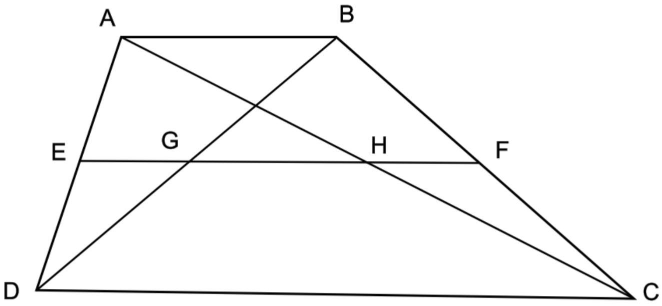
4. קטע בטרפז המחבר את אמצעי השוקיים הוא ק.א. בטרפז (זהה ל-1)
5. קטע בטרפז היוצא מאמצע שוק אחת ומקביל לבסיסים הוא ק.א. בטרפז.
6. קטע בטרפז המחבר את השוקיים, מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם הוא ק.א. בטרפז.

<u>שאלה 1</u>

הוכח:
קטע אמצעים בטרפז חוצה את אלכסוני הטרפז.

<u>כלומר:</u>
נתון:
$ABCD$ טרפז $(AB \parallel DC)$
EF הוא קטע אמצעים בטרפז.

הוכח: G אמצע DB ו- H אמצע AC.

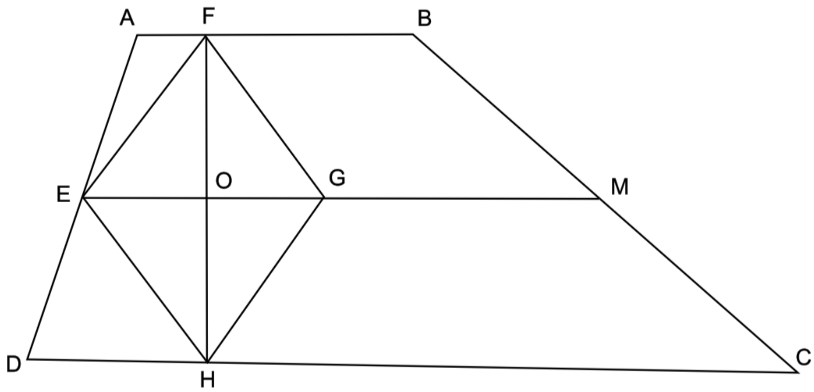


<u>שאלה 2</u>

נתון:
$ABCD$ טרפז $(AB \parallel DC)$
EM הוא קטע אמצעים בטרפז.
$FH \perp DC$. $OG = OE$.

הוכח: המרובע EFGH הוא מעוין.

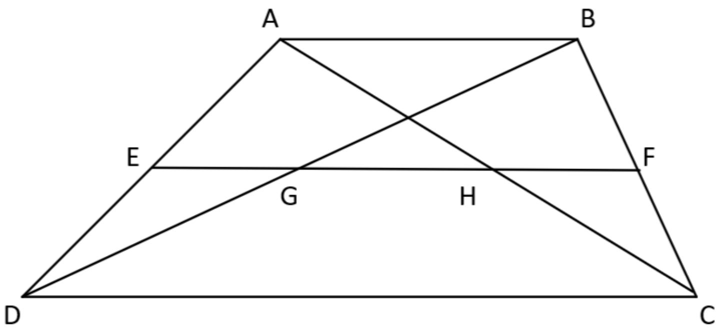
* בהוכחה התייחס ל-2 מקרים
1. אף אחת משוקי הטרפז אינה מקבילה ל-FH
2. אחת משוקי הטרפז מקבילה ל-FH (אם זה עוזר לכם שרטטו מחדש).



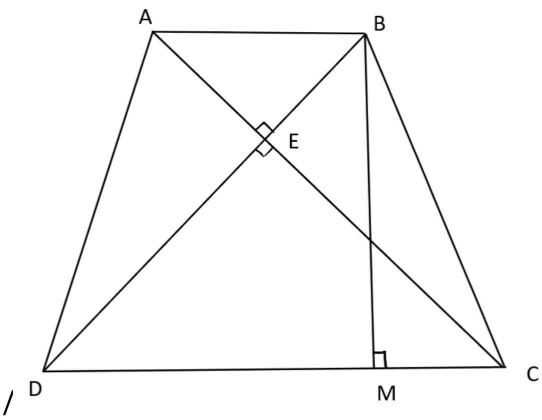
<u>שאלה 3</u>

נתון:
ABCD טרפז $(AB \parallel DC)$
EF הוא קטע אמצעים בטרפז.
$DC = 22$, $AB = 10$.

חשב את GH.



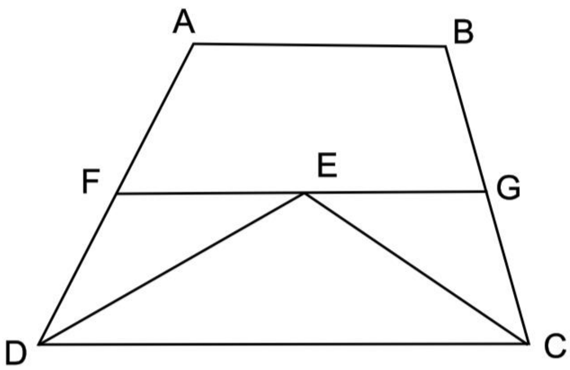
<u>שאלה 4</u>



נתון:
ABCD טרפז שווה שוקיים $(AB \parallel DC)$.
אלכסוני הטרפז מאונכים זה לזה ונחתכים בנקודה E.
$BM \perp DC$.

<u>הוכח:</u> BM שווה לקטע האמצעים בטרפז.
*רמז: העבר גובה נוסף דרך נקודת מפגש האלכסונים.

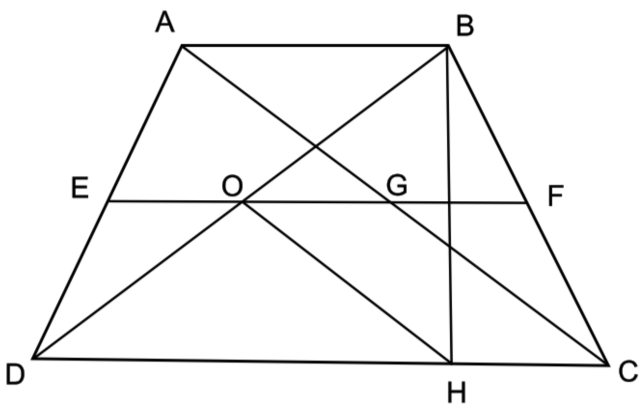
<u>שאלה 5</u>



ABCD טרפז $(AB \parallel DC)$.
FG הוא קטע אמצעים בטרפז.
הנקודה E נמצאת על קטע האמצעים כך ש-EC חוצה את זווית C ו-DE חוצה את זווית D.
נתון שהיקף הטרפז הוא 20 ס"מ.

חשב את אורכו של קטע האמצעים.

<u>שאלה 6</u>



נתון:
ABCD טרפז שווה שוקיים $(AB \parallel DC)$
EF הוא קטע אמצעים בטרפז. אלכסוני הטרפז חותכים את קטע האמצעים בנקודות O ו-G.
$BH \perp DC$.

הוכח:
המרובע $OGCH$ הוא מקבילית.

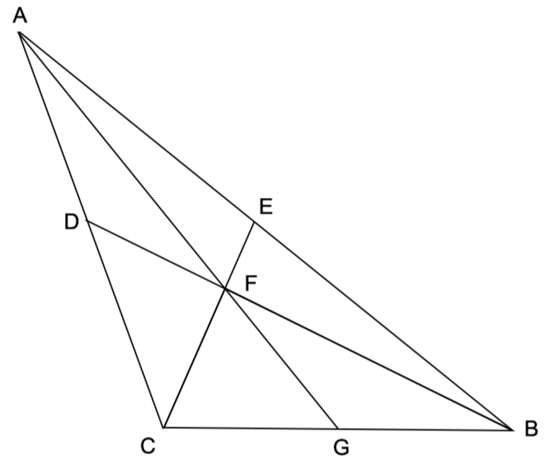
נקודת מפגש התיכונים במשולש

1. שלושת התיכונים במשולש נפגשים בנקודה אחת שנקראת נקודת מפגש התיכונים במשולש.
2. נקודת מפגש התיכונים במשולש מחלקת כל תיכון ביחס של 2:1 (כך שהחלק הארוך יותר הוא זה הקרוב לקדקוד).
3. נקודה שנמצאת על תיכון ומחלקת אותו ביחס של 2:1 , כך שהחלק הגדול יותר קרוב לקודקוד, היא נקודת מפגש התיכונים.

<u>שאלה 1</u>

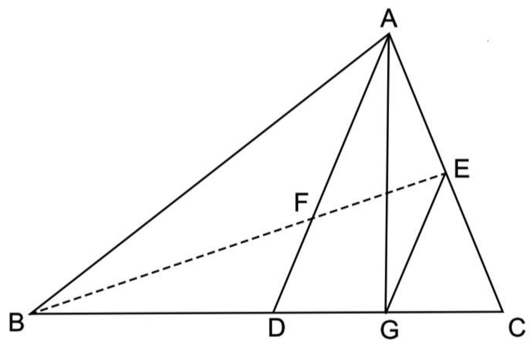
שלושת התיכונים במשולש ABC נפגשים בנקודה F. התיכונים היוצאים מהקודקודים C ו -B מאונכים זה לזה

הוכח:
$AF = BC$



<u>שאלה 2</u>

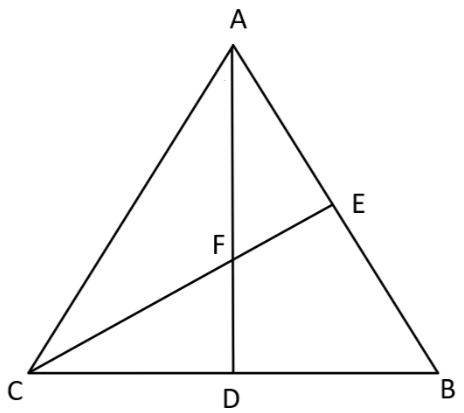
התיכונים AD ו-BE במשולש ABC נחתכים בנקודה F. AG הוא הגובה במשולש. $GE \parallel AF$.
מצא את היחס : $\frac{EC}{FD}$.



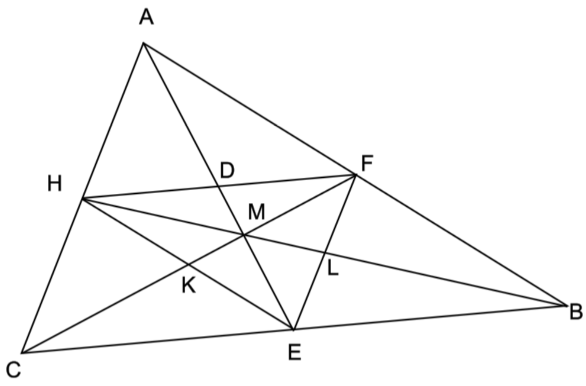
<u>שאלה 3</u>

משולש ABC הוא משולש שווה שוקיים $(AC = AB)$.AD ו-CE הם תיכונים במשולש הנפגשים בנקודה F. $\sphericalangle ECB = 30°$.

<u>הוכח</u>: משולש ABC הוא משולש שווה צלעות



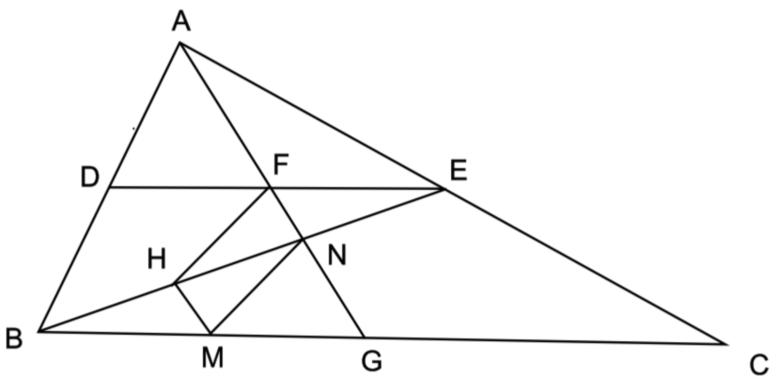
<u>שאלה 4</u>



במשולש ABC התיכונים AE, CF ו-BH נפגשים בנקודה M.

הוכח:
הנקודה M היא נקודת מפגש התיכונים במשולש HFE

<u>שאלה 5</u>



נתון:
AG ו-BE הם תיכונים במשולש ABC.
$FE \parallel GC$.
הנקודות H ו-M הן אמצעי הקטעים BN ו-BG בהתאמה.

הוכח:
המרובע $HFNM$ הוא מקבילית.

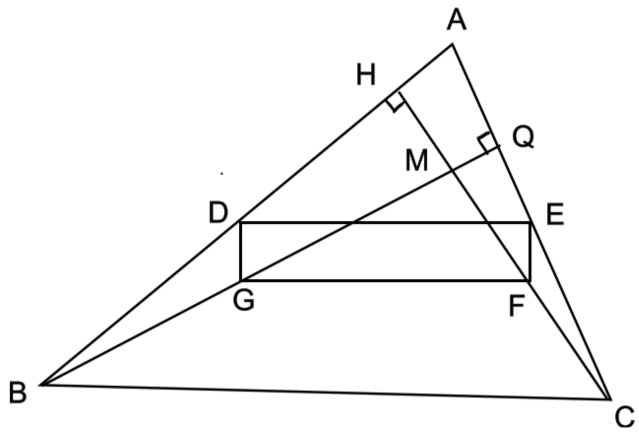
נקודת מפגש הגבהים במשולש

1. שלושת הגבהים במשולש נפגשים בנקודה אחת שנקראת נקודת מפגש הגבהים במשולש.

<u>שאלה 1</u>

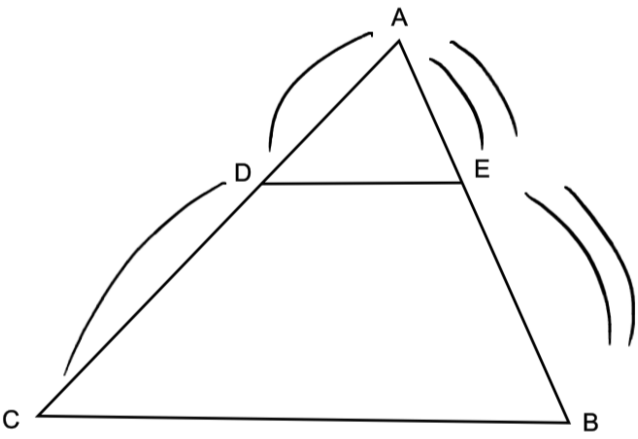
נתון:
BQ ו-CH הם גבהים במשולש ABC. הנקודות G ו-F הן אמצעי הקטעים BM ו-CM בהתאמה. DE הוא קטע אמצעים במשולש ABC.

הוכח:
המרובע $DEFG$ הוא מלבן.



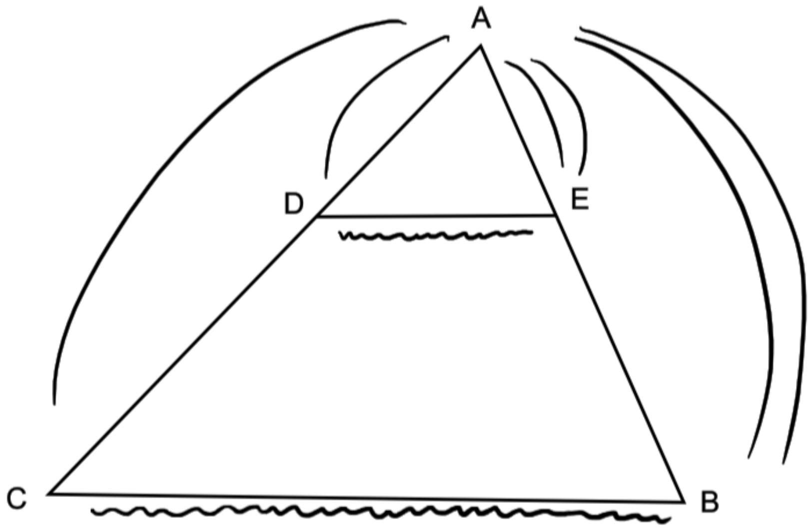
משפטי תלס

1 משפט תלס
אם
DE ∥ BC
אז
$$\frac{AD}{DC} = \frac{AE}{EB}$$



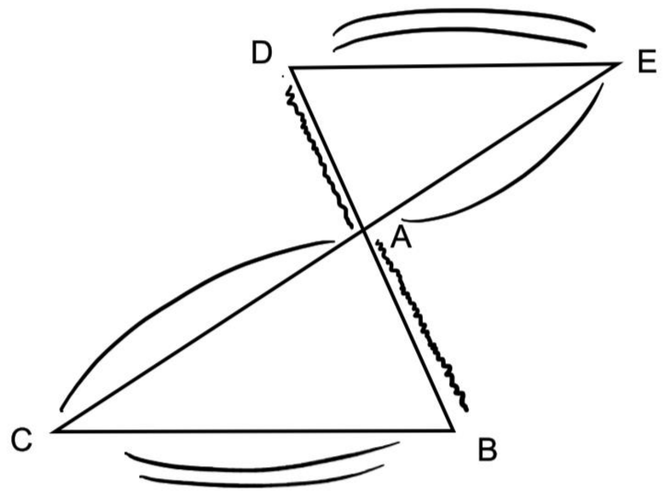
2 משפט תלס ההפוך
אם
$$\frac{AD}{DC} = \frac{AE}{EB}$$
אז
DE ∥ BC

3 משפט תלס (הרחבה 1)
אם DE ∥ BC
אז
$$\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{DE}{CB}$$



4 משפט תלס ההפוך (הרחבה 1)
אם
$$\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$$
אז
DE ∥ BC

5 משפט תלס (הרחבה 2)
אם
DE ∥ BC
אז
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{CB}$$



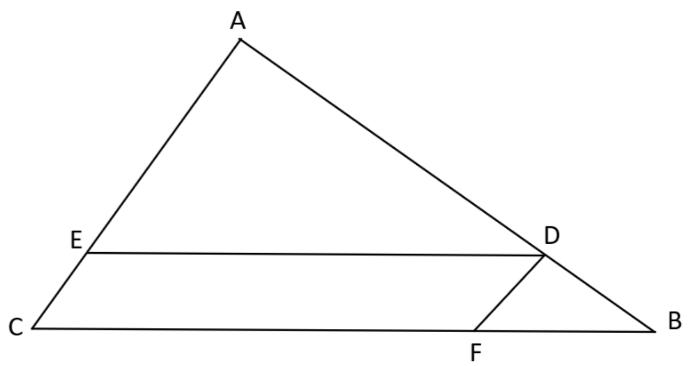
6 משפט תלס ההפוך (הרחבה 2)
אם
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

אז
DE ∥ BC

שאלה 1

בתוך משולש ABC חסומה מקבילית $EDFC$. נתון: $BD = 3$, $AD = 12$, $AC = 10$, $BC = 20$.

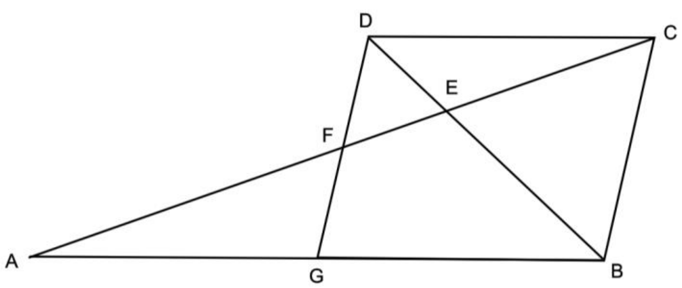
מצא את צלעות המקבילית.



תשובה:
$ED = 16$
$FD = 2$

שאלה 2

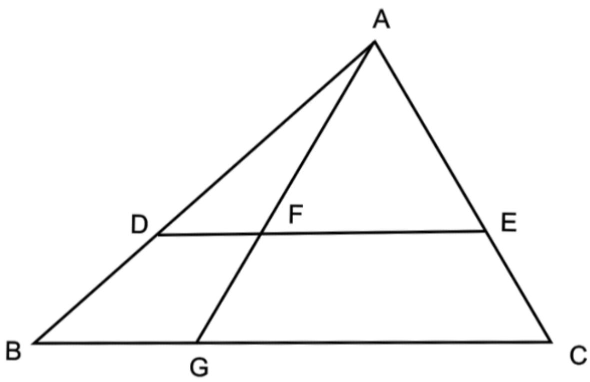
המרובע $DCBG$ הוא מקבילית. נקודה F נמצאת על הקטע DG (ואינה מתלכדת עם הנקודות D או G). המשכי הקטעים CF ו-BG נפגשים בנקודה A.



א. הוכח: $\frac{AE}{EC} = \frac{EC}{FE}$

ב. הוכח: $\frac{BG}{AG} = \frac{DF}{FG}$

שאלה 3



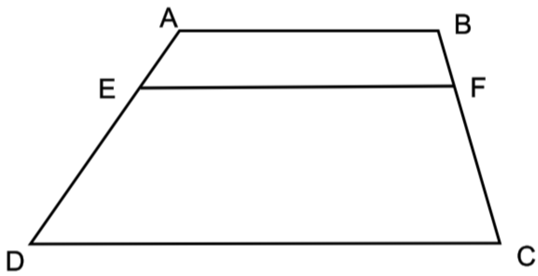
הנקודות D ו-E נמצאות על צלעות המשולש ABC כמתואר בשרטוט.
$DE \parallel BC$. ישר היוצא מקודקוד A חותך את DE בנקודה F ואת BC בנקודה G.

$DF = 3$
$BG = 5$
$GC = 10$

מצא את FE

תשובה:
$EF = 6$

שאלה 4

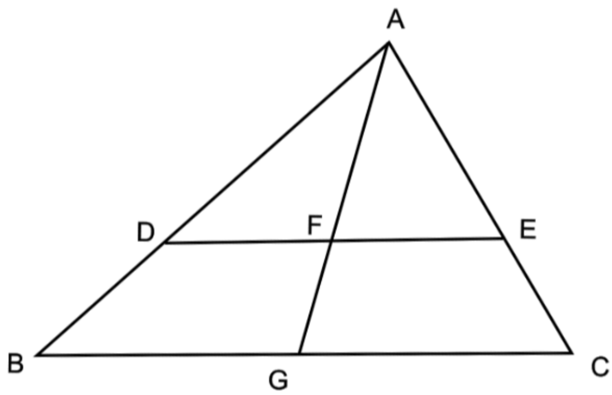


מרובע $ABCD$ הוא טרפז $(AB \parallel DC)$
הישר EF המחבר את שוקי הטרפז מקביל לבסיסים.

הוכח:

$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$$

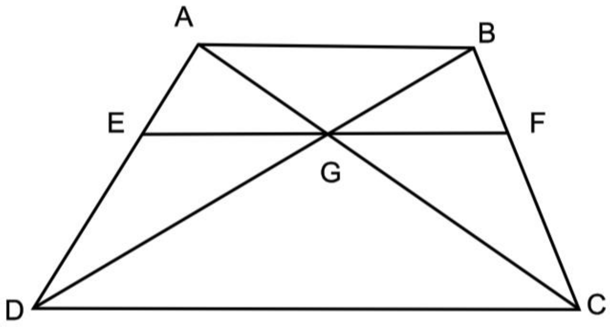
שאלה 5



הנקודות D ו-E נמצאות על צלעות המשולש ABC כמתואר בשרטוט.
$DE \parallel BC$. התיכון לצלע BC במשולש ABC חותך את הקטע DE בנקודה F.

הוכח:
AF הוא תיכון במשולש ADE.

שאלה 6



מרובע $ABCD$ הוא טרפז ($AB \parallel DC$). אלכסוני הטרפז נחתכים בנקודה G. דרך הנקודה G העבירו מקביל לבסיסים החותך את AD ו-BC בנקודות E ו-F בהתאמה.

הוכח:

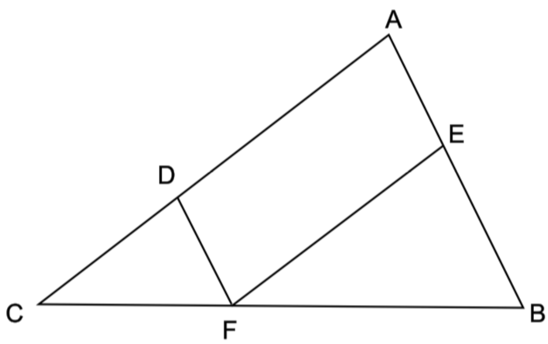
א. הוכח: $\frac{AG}{AC} = \frac{BG}{BD}$

ב. הוכח: $EG = FG$

ג. נתון: $DC = 40$, $AB = 24$
חשב את EF.

<u>תשובה</u>:
ג. $EF = 30$

שאלה 7

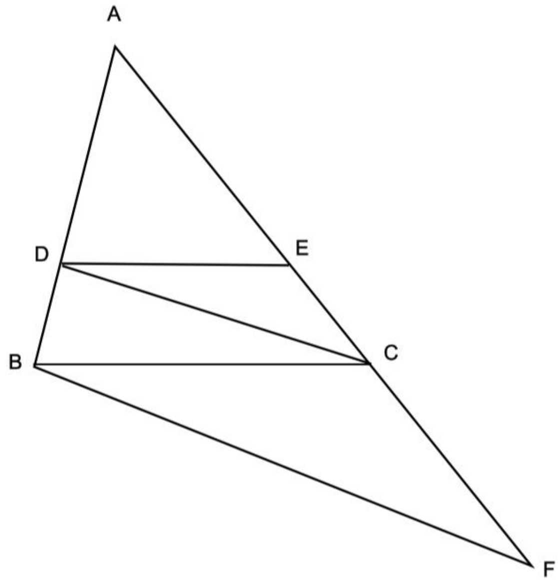


$AEFD$ היא מקבילית. דרך קדקוד F מעבירים ישר החותך את המשכי הצלעות AE ו-AD בנקודות B ו-C בהתאמה.

הוכח:

$$\frac{EB}{AB} = 1 - \frac{DC}{AC}$$

שאלה 8



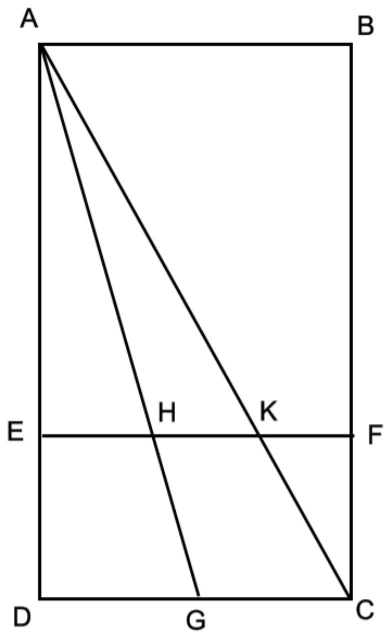
הנקודות D, E ו-C נמצאות על צלעות המשולש ABF כך ש: $DE \parallel BC$.
$AE = 12$, $BD = 3$, $AD = 9$
$CF = 5\frac{1}{3}$

הוכח: $DC \parallel BF$

שאלה 9

מרובעים $ABCD$ ו-$EFCD$ הם מלבנים.
$KF = HK$. AG הוא תיכון במשולש ADC.

מצא את היחס: $\frac{AE}{ED}$

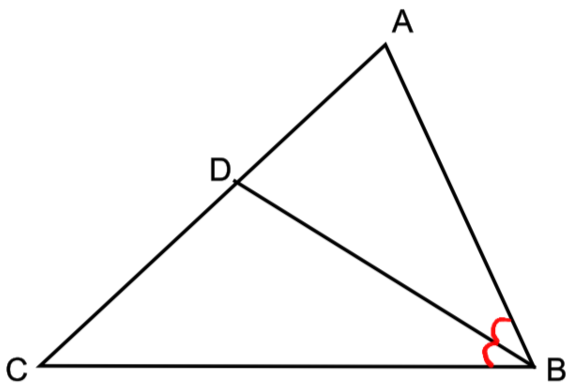


משפט חוצה זווית

1 משפט חוצה זווית

אם DB חוצה זווית
במשולש ABC
אז

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$$



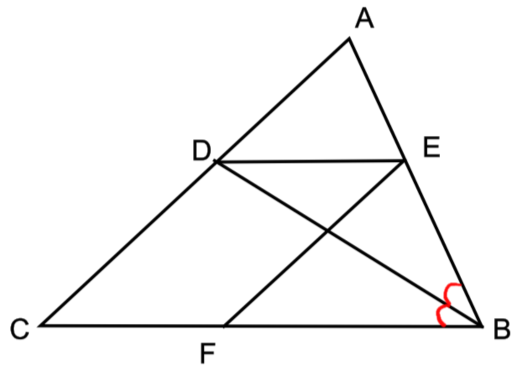
2 משפט חוצה זווית
ההפוך:

אם

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$$

אז
DB חוצה זווית במשולש
ABC

<u>שאלה 1</u>

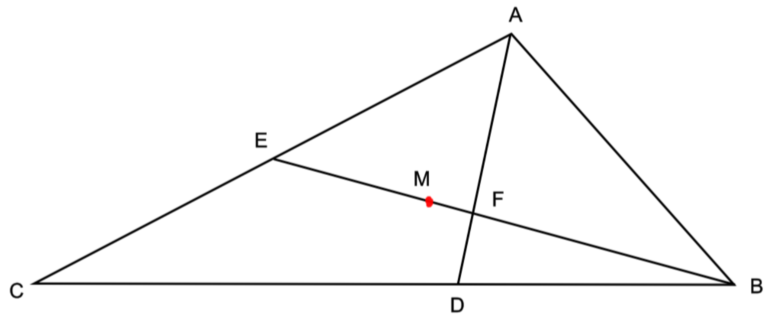


DB חוצה זווית במשולש ABC.
הנקודות D, E ו- F נמצאות על צלעות המשולש כמתואר בשרטוט כך שמרובע $DEFC$ הוא מקבילית.
$BC = 6$, $AB = 4$, $AC = 5$.

מצא את צלעות המקבילית.

תשובה:
$DE = 2.4$
$DC = 3$

<u>שאלה 2</u>

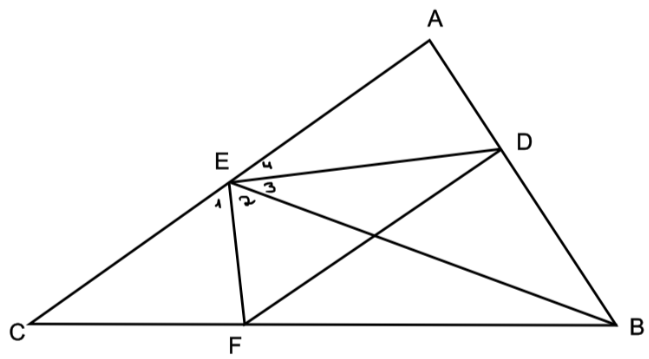


EB תיכון במשולש ABC.
AD חוצה זווית במשולש ABC.
נסמן ב-F את נקודת המפגש של התיכון וחוצה הזווית ואת נקודת מפגש התיכונים נסמן ב-M. $\frac{BD}{DC} = \frac{3}{4}$.
$BE = 30$ ס"מ.

מצא את MF.

<u>תשובה:</u>
$FM = 2$ ס"מ

<u>שאלה 3</u>

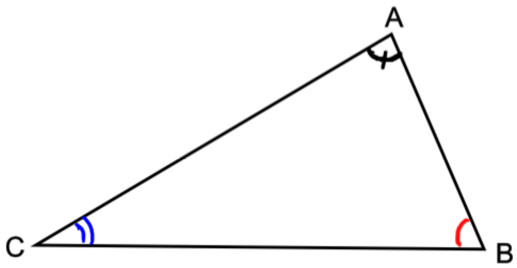


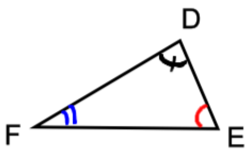
EB תיכון במשולש ABC.
$\sphericalangle E_1 = \sphericalangle E_2$. D ו-F נמצאות על הצלעות AB ו-BC בהתאמה כך ש-DF מקביל ל-AC.

הוכח:
$\sphericalangle E_3 = \sphericalangle E_4$

דמיון משולשים

* אם אומרים לנו ששני משולשים
דומים כלומר : $\Delta ABC \sim \Delta DEF$





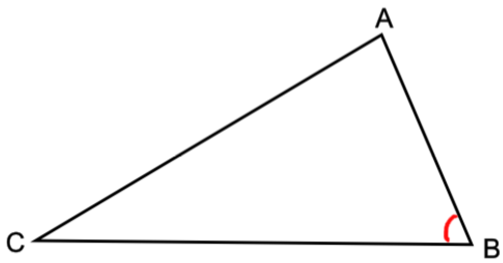
אז מתקיים:

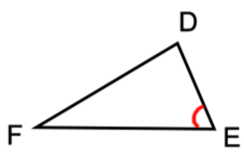
$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{FE} = \frac{AC}{DF}$$

וגם

$$\measuredangle A = \measuredangle D \, , \measuredangle C = \measuredangle F \, , \measuredangle B = \measuredangle E$$

1 משפט דמיון צ.ז.צ





אם $\measuredangle ABC = \measuredangle DEF$

וגם $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{FE}$

אז:
$\Delta ABC \sim \Delta DEF$

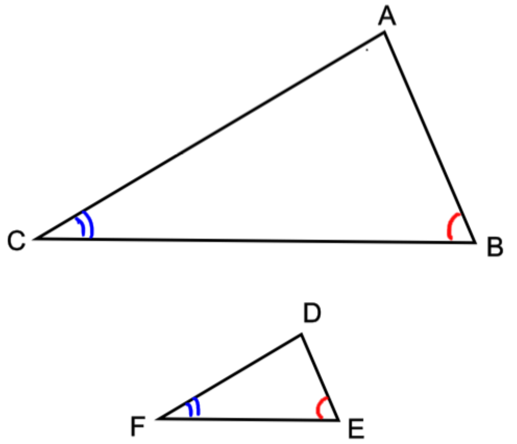
2 משפט דמיון ז.ז.

אם שתי זוויות שוות למשל:

$\sphericalangle C = \sphericalangle F$, $\sphericalangle B = \sphericalangle E$

אז:

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$



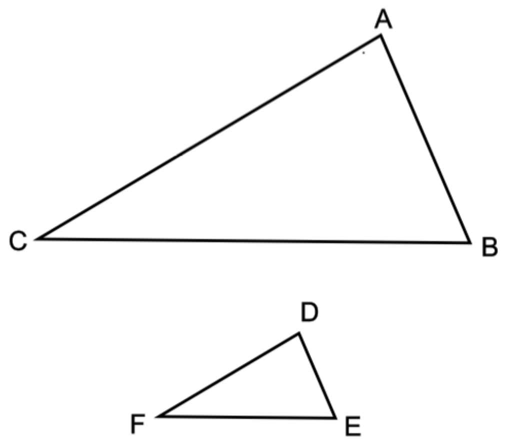
3 משפט דמיון צ.צ.צ

אם

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{FE} = \frac{AC}{DF}$$

אז:

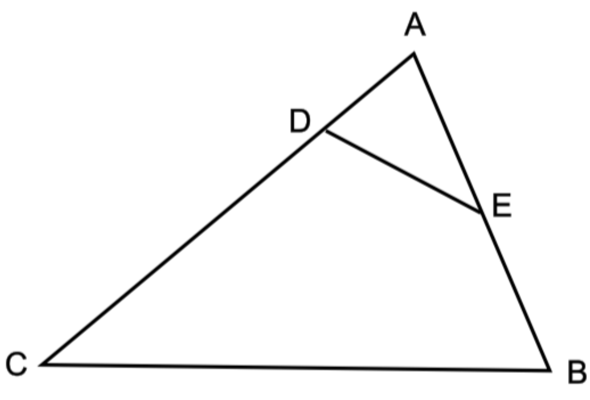
$\Delta ABC \sim \Delta DEF$



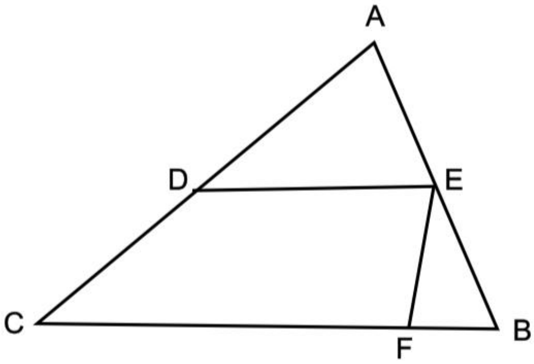
<u>שאלה 1</u>

הנקודות D ו-E נמצאות על צלעות המשולש ABC כמתואר בשרטוט. נתון $AD = 2$, $EB = 3$, $AE = 3$.$DC = 7$

הוכח: $\sphericalangle C + \sphericalangle DEB = 180°$



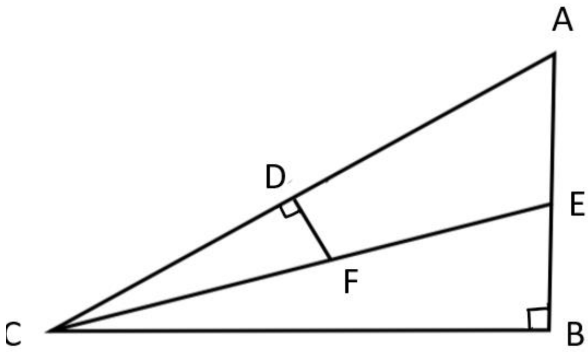
שאלה 2



DE קטע אמצעים במשולש ABC.
$AB = 10, CF = 23, BF = 2$.

העזר בדמיון ומצא את היחס: $\frac{FE}{AD}$

שאלה 3

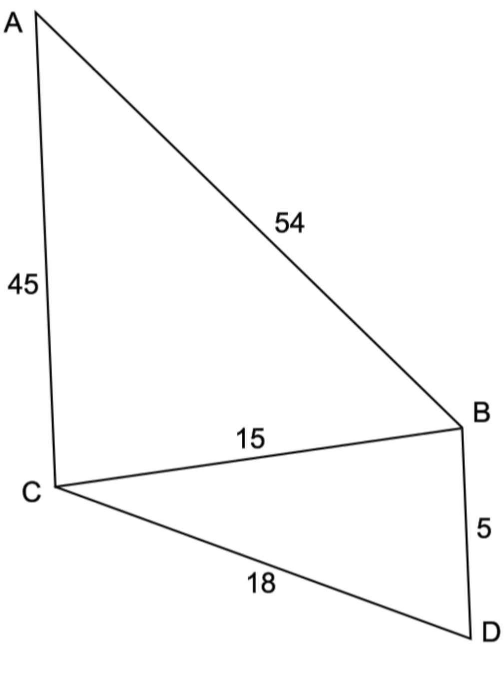


CE חוצה זווית במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle ABC = 90^\circ$).
DF הוא אנך אמצעי לצלע AC (כלומר: $DF \perp AC$ וגם D היא אמצע AC).
בנוסף נתונים אורכי הקטעים הבאים:
$AC = 30$, $BC = 24$

מצא את אורכו של DF.

תשובה:
$DF = 5$

שאלה 4



נתון מרובע $ABDC$. חיבורו את הנקודות B ו-C.
$AB = 54$
$AC = 45$
$CB = 15$
$CD = 18$
$BD = 5$

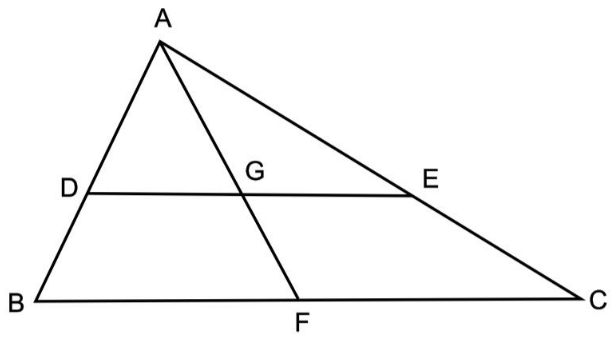
הוכח המרובע $ABDC$ הוא טרפז.

משפטים על קטעים ושטחים במשולשים דומים

1. במשולשים דומים יחס גבהים מתאימים שווה ליחס הדמיון.
2. במשולשים דומים יחס תיכונים מתאימים שווה ליחס הדמיון.
3. במשולשים דומים יחס חוצי זווית מתאימים שווה ליחס הדמיון.
4. במשולשים דומים יחס ההיקפים שווה ליחס הדמיון.
5. במשולשים דומים יחס הרדיוסים של המעגלים החוסמים שווה ליחס הדמיון.
6. במשולשים דומים יחס הרדיוסים של המעגלים החסומים שווה ליחס הדמיון.
7. במשולשים דומים יחס השטחים שווה לריבוע יחס הדמיון (יחס הדמיון בריבוע).

<u>שאלה 5</u>

AF הוא תיכון במשולש ABC.
G היא נקודת מפגש התיכונים במשולש ABC ודרכה עובר ישר המקביל ל-BC וחותך את AB ו-AC בנקודות D ו-E בהתאמה. נתון: $S_{ADE}=8$.

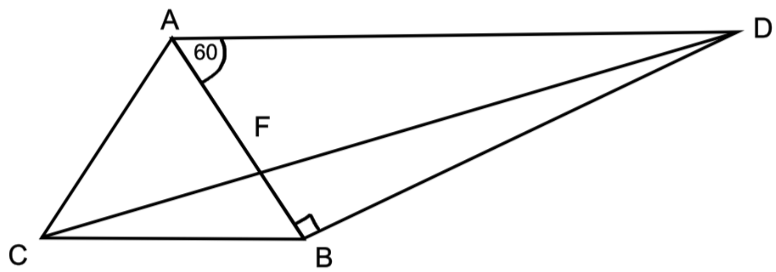


מצא את שטח הטרפז $DECB$

תשובה:
$S_{DECB}=10$

<u>שאלה 6</u>

משולש ABC הוא משולש שווה צלעות. $\sphericalangle ABD=90°$.
$\sphericalangle BAD=60°$.

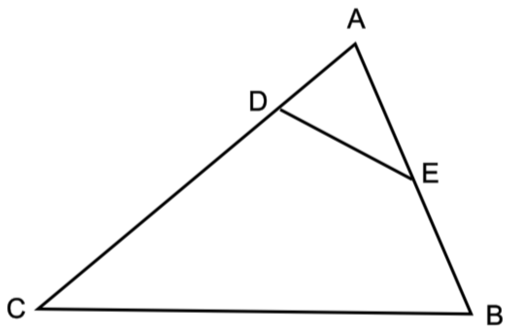


הוכח:

א. $\Delta CBF \sim \Delta DAF$
ב. $AF=2FB$
ג. $S_{AFC}=S_{DBF}$

<u>שאלה 7</u>

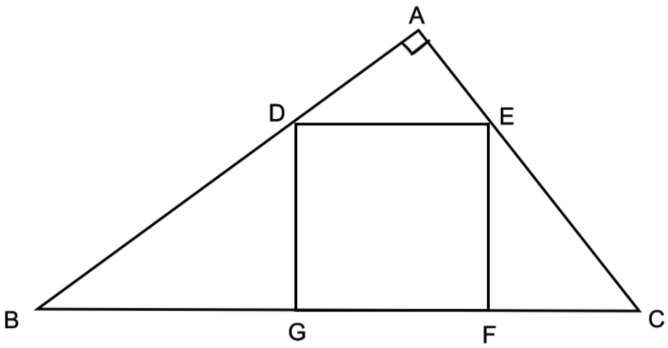
שטח המרובע $DEBC$ גדול פי $5\frac{1}{4}$ משטח המשולש ADE. נתון
$\sphericalangle C=\sphericalangle AED$,
$AD=4$



מצא את AB

תשובה:
$AB=10$

<u>שאלה 8</u>

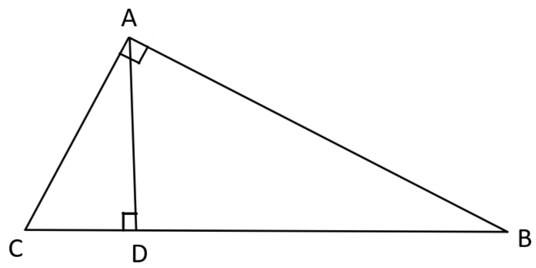


משולש ABC הוא משולש ישר זווית ($\sphericalangle A = 90°$).
הנקודות D ו-E נמצאות על הצלעות AB ו-AC בהתאמה.
הנקודות G ו-F נמצאות על הצלע BC כך שמרובע $DEFG$ הוא ריבוע.
$BG = 25$, $FC = 16$.

מצא את צלע הריבוע.

תשובה: 20

<u>שאלה 9</u>

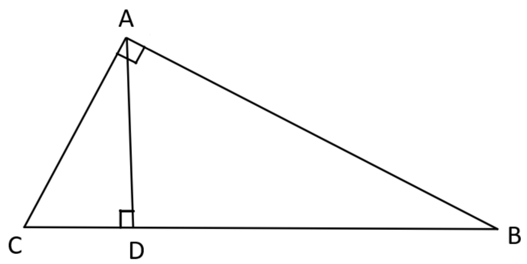


משולש ABC הוא משולש ישר זווית ($\sphericalangle CAB = 90°$).
AD הוא גובה ליתר במשולש ABC.

<u>הוכח</u>: $AD^2 = CD \cdot DB$

כלומר הוכח את המשפט: "הגובה ליתר במשולש ישר זווית הוא ממוצע הנדסי של היטלי הניצבים על היתר." (משפט אשר מותר להשתמש בו בבגרות).

<u>שאלה 10</u>

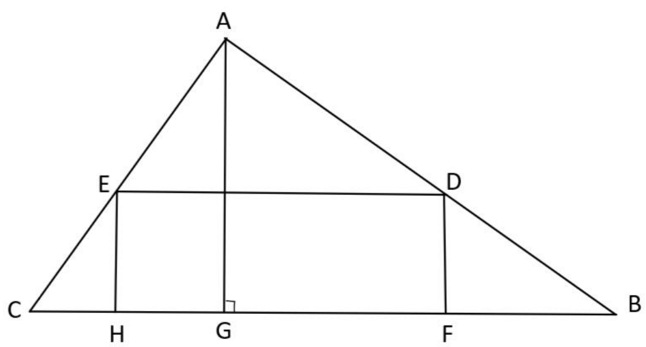


משולש ABC הוא משולש ישר זווית ($\sphericalangle CAB = 90°$).
AD הוא גובה ליתר במשולש ABC.

<u>הוכח</u>: $AC^2 = CD \cdot BC$

כלומר הוכח את המשפט: "במשולש ישר זווית, הניצב הוא ממוצע הנדסי של היתר והיטל ניצב זה על היתר." (משפט אשר מותר להשתמש בו בבגרות).

<u>שאלה 11</u>



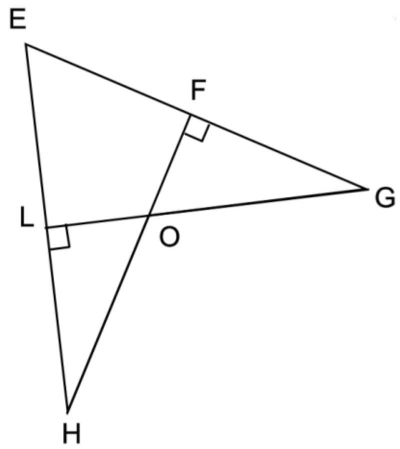
בתוך משולש ABC חסום מלבן $EDFH$ שאורכו ED גדול פי 3 מרוחבו EH. AG הוא גובה לצלע BC במשולש ABC שאורכו 5 ס"מ. שטחו של משולש ABC הוא 25 סמ"ר.

חשב את שטח המלבן.

תשובה: 12 סמ"ר

תרגילים לחזרה פרופורציה ודמיון

<u>שאלה 1</u>



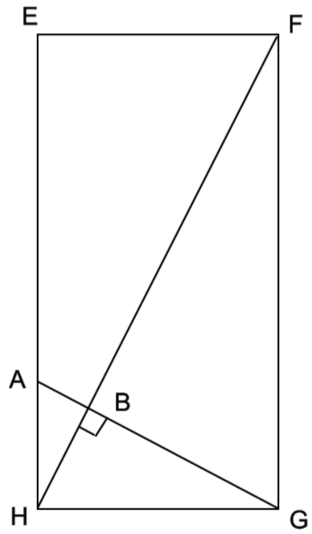
הקטעים EG ו-EH נפגשים בנקודה E והקטעים FH ו-LG נפגשים בנקודה O כמתואר בשרטוט. הנקודות L ו-F נמצאות על הקטעים EH ו-EG בהתאמה כך ש:
$EL = LH$, $EH \perp LG$ ו-$FH \perp EG$.

א. הוכח: $\Delta LOH \sim \Delta LEG$

ב. נתון: $LO = 4m$, $OG = 5m$.
הבע באמצעות m את אורכו של EH.

תשובה: $EH = 12m$

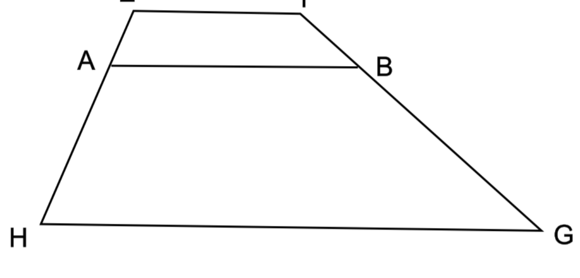
<u>שאלה 2</u>



נתון מרובע $EFGH$ הוא מלבן. הנקודה A נמצאת על EH כך ש-AG מאונך לאלכסון HF.
הוכח:

א. $HG^2 = AH \cdot EH$
ב. $AH \cdot EH = HF^2 - GF^2$

<u>שאלה 3</u>

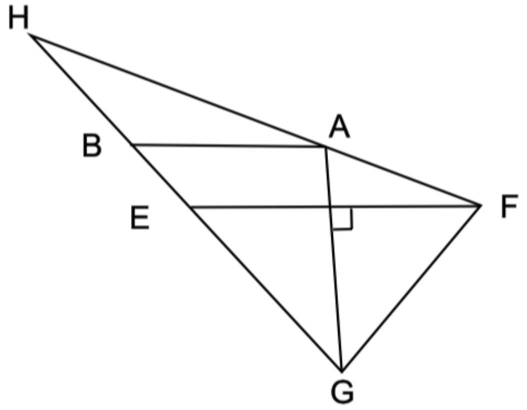


מרובע $EFGH$ הוא טרפז $(EF \parallel HG)$.
הישר AB המחבר את שוקי הטרפז מקביל לבסיסים. $EF = 4$ ס"מ, $HG = 13$ ס"מ.
נתון היחס: $\frac{AE}{AH} = \frac{2}{7}$.

מצא את אורכו של AB.

תשובה: $AB = 6$ ס"מ

שאלה 4



הנקודה A נמצאת על הצלע HF
במשולש HGF והנקודות B ו-E נמצאות
על הצלע HG כך ש:
$\mathrm{AB} \parallel \mathrm{EF}$, $AG \perp EF$ ו-$EG = FG$.

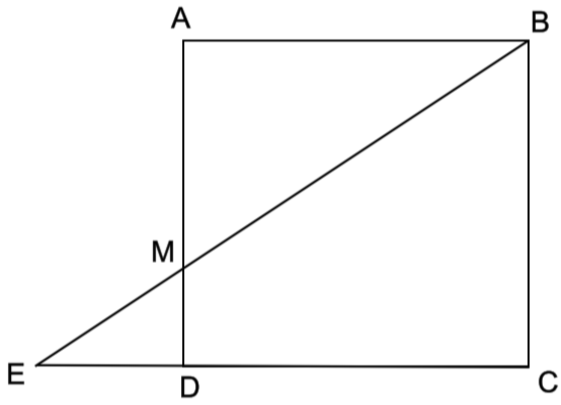
א. הוכח : $\frac{HG}{GF} = \frac{HB}{BE}$

ב. נתון:
$EG = 9$ ס"מ, $BH = 6$ ס"מ

חשב את אורכו של BE.

תשובה: $BE = 3$ ס"מ

שאלה 5

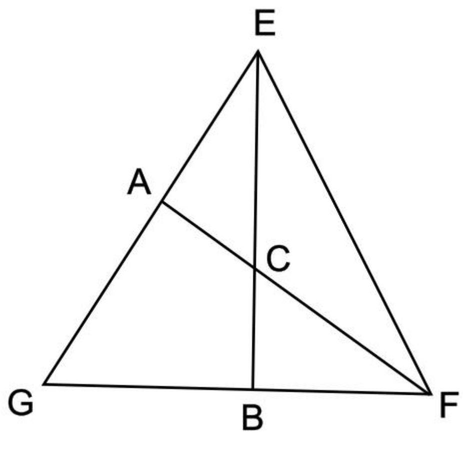


מרובע $ABCD$ הוא ריבוע. הנקודה M
נמצאת על הצלע AD כך ש: $\frac{AM}{AD} = \frac{3}{4}$.
המשך הקטע MB והמשך הצלע CD
נפגשים בנקודה E.
שטחו של משולש EMD הוא 2 סמ"ר.

מצא את שטחו של הריבוע.

תשובה: $S_{ABCD} = 48$ סמ"ר

שאלה 6

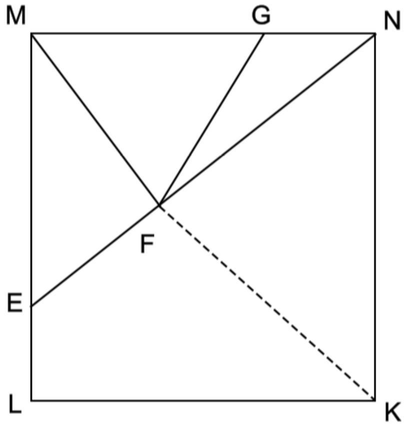


FA ו-EB הם גבהים במשולש EGF
הנחתכים בנקודה C.
$\mathrm{BG} = \mathrm{EC} = 10$ ס"מ, $\mathrm{BF} = 7.5$ ס"מ .

חשב את שטחו של משולש BCF.

תשובה: $S_{BCF} = 18.75$ סמ"ר

שאלה 7

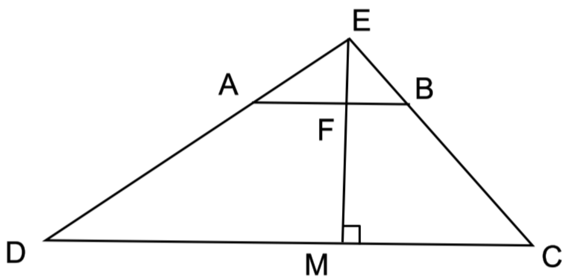


מרובע $MNKL$ הוא ריבוע G ו-E מונחות על צלעות הריבוע MN ו-ML בהתאמה והנקודה F נמצאת על EN כך ש:
$MF \perp EN$, $NG = EL = 3$ ס"מ. שטח הריבוע הוא 144 סמ"ר.
(שימו לב ש-הקטע FK אינו המשכו של הקטע MF כלומר זווית MFK אינה שטוחה)

א. מצא את האורכים של EF ו-FN.
ב. מצא את אורכו של MF.
ג. הוכח: $\Delta MFG \sim \Delta NFK$

תשובה:
א. $EF = 5.4$ ס"מ, $FN = 9.6$ ס"מ.
ב. $MF = 7.2$ ס"מ

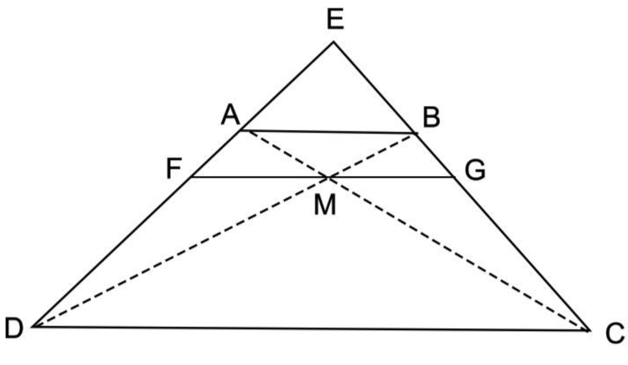
שאלה 8



מרובע $ABCD$ הוא טרפז $(AB \parallel CD)$.
המשכי השוקיים AD ו-BC נפגשים בנקודה E. EM הוא גובה במשולש DEC.
שטח הטרפז גדול פי 15 משטח המשולש AEB.
מצא את היחס: $\frac{EF}{FM}$

תשובה: $\frac{EF}{FM} = \frac{1}{3}$

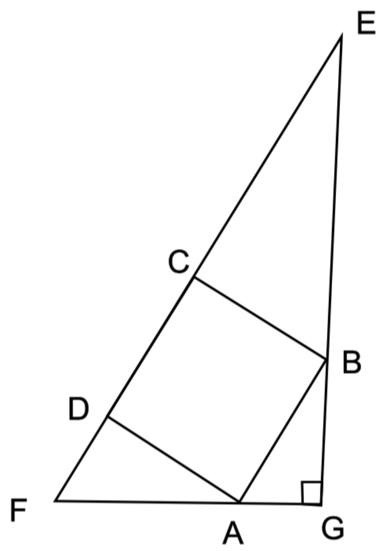
שאלה 9



מרובע $ABCD$ הוא טרפז $(AB \parallel CD)$. המשכי השוקיים AD ו-BC נפגשים בנקודה E.
הישר העובר דרך נקודת מפגש אלכסוני הטרפז **ומקביל** ל-DC חותך את שוקי הטרפז בנקודות F ו-G כמתואר בשרטוט. שטח הטרפז גדול פי 8 משטח המשולש AEB.

הוכח שהנקודות G ו-F הן אמצעי הקטעים ED ו-EC בהתאמה.

שאלה 10



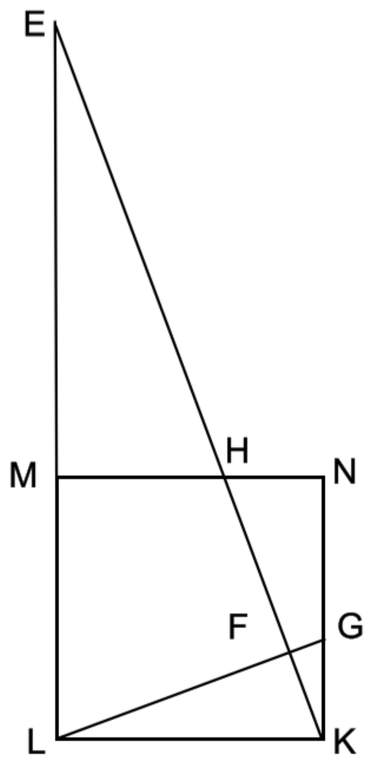
ריבוע ABCD חסום במשולש ישר הזווית EFG כך שהקודקודים C ו-D נמצאים על היתר והקודקודים A ו-B נמצאים על הניצבים.

נתון: $FD = 5$ ס"מ , $EC = 20$ ס"מ.

א. חשב את שטח הריבוע
ב. חשב את שטח המשולש ABG

תשובה:
א. $S_{\text{ABCD}} = 100$ סמ"ר
ב. $S_{\text{ABG}} = 20$ סמ"ר

שאלה 11



מרובע MNKL הוא ריבוע. הנקודות H ו-G נמצאות על הצלעות MN ו-NK בהתאמה כך ש: $\text{MH} = \text{NG}$, $\text{MH} = 2\text{NH}$.
המשכי הקטעים ML ו-KH נפגשים בנקודה E כמתואר בשרטוט.

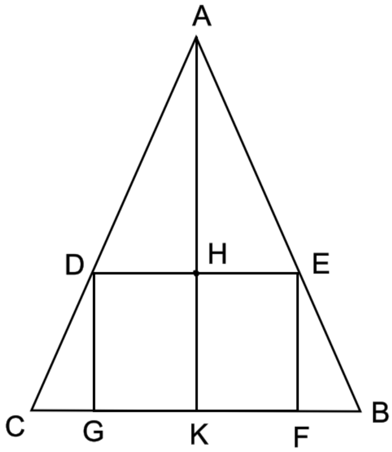
מצא את היחס:

$$\frac{HF}{EH}$$

תשובה: $\frac{HF}{EH} = \frac{7}{20}$

שאלה 12

מלבן $DEFG$ חסום במשולש שווה שוקיים ABC $(AB = AC)$.
הנקודה H היא נקודת מפגש התיכונים במשולש ABC. המשך הקטע AH פוגש את הצלע BC בנקודה K. $AB = 13$ ס"מ, $BC = 10$ ס"מ.



מצא את אורכו של אלכסון המלבן.

*(תוכל להשאיר בתשובתך **שורש** או **לעגל** אותה עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית)*

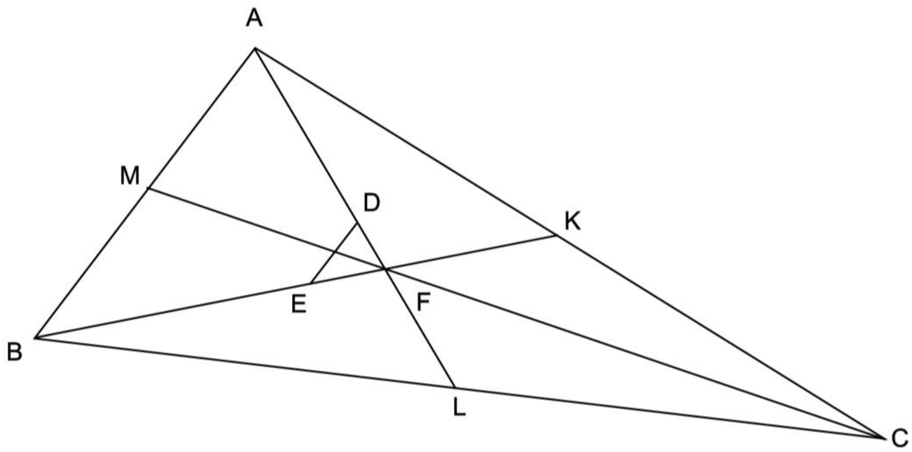
תשובה: $GE = DF = \frac{4\sqrt{34}}{3} \approx \mathbf{7.77}$ ס"מ

שאלה 13

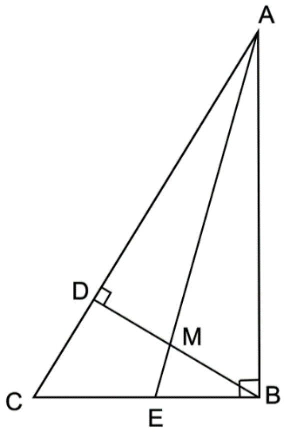
AL, BK ו-CM הם תיכונים במשולש ABC הנפגשים בנקודה F. הנקודה D היא אמצע הקטע AL והנקודה E היא אמצע הקטע BK.
$AL = 30$ ס"מ, $BK = 42$ ס"מ, $S_{AMF} = 240$ סמ"ר.

חשב את S_{DEF}

תשובה: $S_{DEF} = 30$ סמ"ר



<u>שאלה 14</u>



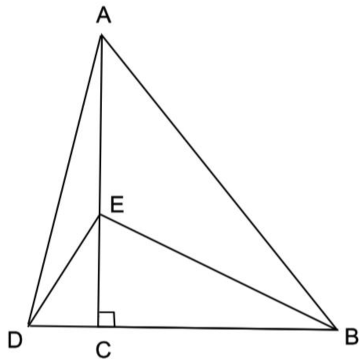
AE חוצה זווית במשולש ישר ($\sphericalangle ABC = 90°$).
BD הוא הגובה ליתר במשולש זה.
$AC = 50$ ס"מ , $AB = 40$ ס"מ.

מצא את אורכו של AM

(תוכל להשאיר בתשובתך ***שורש*** *או* ***לעגל*** *אותה עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית)*

תשובה: $AM = \frac{32\sqrt{10}}{3} \approx \mathbf{33.73}$ ס"מ

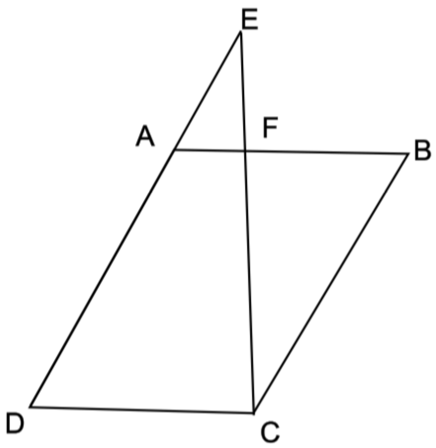
<u>שאלה 15</u>



ABC הוא משולש ישר זווית ($\sphericalangle ACB = 90$).
BE הוא חוצה זווית ABC במשולש זה. הנקודה D נמצאת על המשך הניצב BC (מצידה של נקודה C) כך ש: $\sphericalangle EDC = 2\sphericalangle ABE$.

הוכח: $DE \cdot AC = BC \cdot AE$

<u>שאלה 16</u>

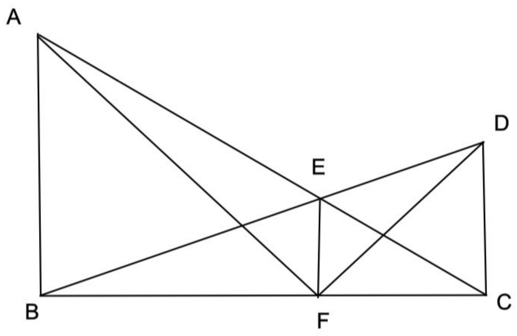


מרובע $ABCD$ הוא מקבילית. הנקודה F נמצאת על הצלע AB והמשך הצלע AD פוגש את המשך הקטע CF בנקודה E כך ש:
$AE = 4$ ס"מ, $BC = 12$ ס"מ, $S_{ABCD} = 72$ סמ"ר.

מצא את S_{FBC}

תשובה: $S_{FBC} = 27$ סמ"ר

<u>שאלה 17</u>

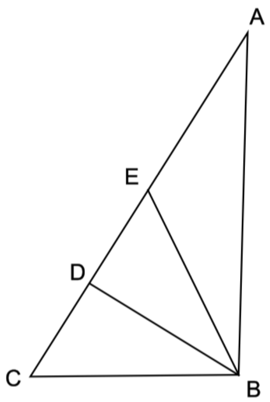


ABC ו- BDC הם משולשים ישרי זווית בעלי ניצב משותף (BC) $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DCB = 90°$.
היתר של משולש ABC והיתר של משולש BDC נחתכים בנקודה E. מהנקודה E מורידים אנך EF לניצב המשותף BC.

1. הוכח: $\frac{AB}{DC} = \frac{BF}{FC}$

2. הוכח: $\Delta ABF \sim \Delta DCF$

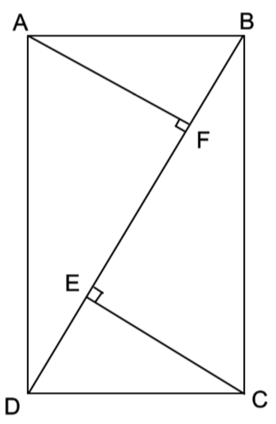
<u>שאלה 18</u>



BD הוא גובה במשולש ABC ו-BE הוא תיכון במשולש זה. $\sphericalangle DBC = \sphericalangle DBE = \sphericalangle EBA$.

הוכח $\sphericalangle BAC = 30°$.

<u>שאלה 19</u>



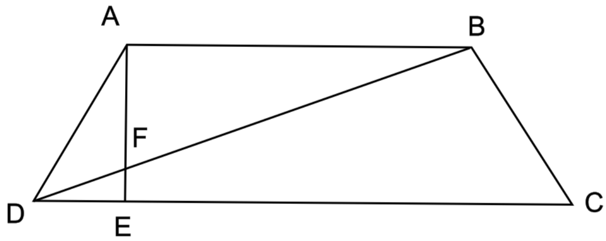
$ABCD$ מלבן. AF הוא מרחק הנקודה A מהאלכסון BD. CE הוא מרחק הנקודה C מהאלכסון BD.

הוכח: $AF^2 = BF \cdot BE$

שאלה 20

$ABCD$ הוא טרפז שווה שוקיים $(\mathrm{AB} \parallel \mathrm{DC})$. AE הוא גובה בטרפז.
$\mathrm{AB} = 2 \cdot \mathrm{AD}$, $\mathrm{DC} = 3.2 \cdot \mathrm{AD}$. נסמן את השוק AD ב-$x$.

הבע את AF באמצעות x.

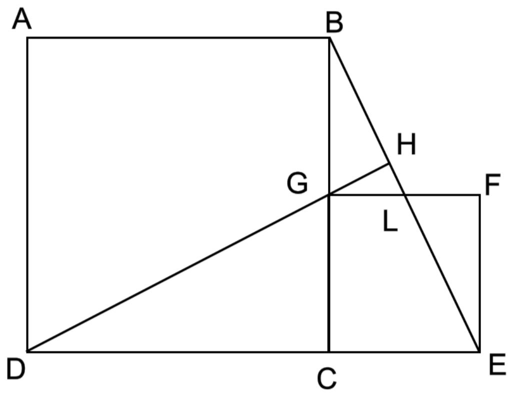


תשובה: $AF = \frac{8}{13}x$

שאלה 21

$ABCD$ ריבוע. הנקודה G נמצאת על הצלע BC בין הנקודות B ו-C כך ש-CG מהווה צלע של ריבוע נוסף $CGFE$. חיברו את הנקודות B ו-E . המשך הקטע DG פוגש את הקטע BE בנקודה H.

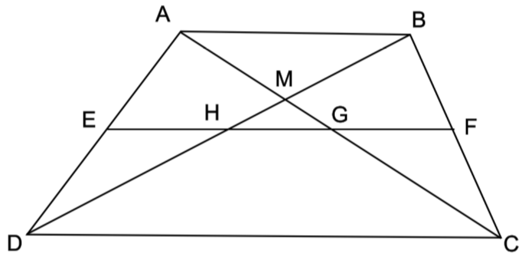
1. הוכח: $\Delta DCG \cong \Delta BCE$.
2. הוכח: $\Delta BHG \sim \Delta BCE$.
3. $\mathrm{FE} = 8$ ס"מ, $\mathrm{AD} = 15$ ס"מ. חשב את אורכו של GH. (התשובה אינה מספר שלם).



תשובה: $GH = 3\frac{5}{17} \approx 3.29$ ס"מ.

שאלה 22

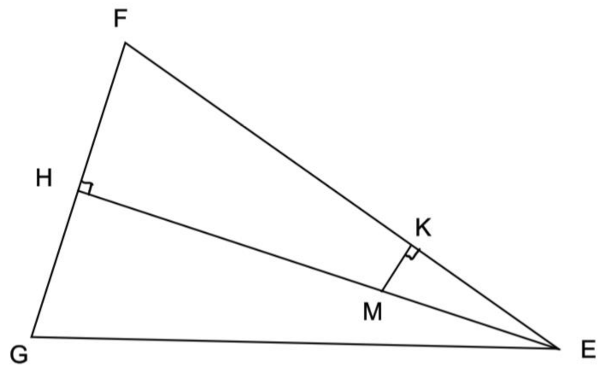
$ABCD$ הוא טרפז $(\mathrm{AB} \parallel \mathrm{DC})$. E ו-F הן אמצעי השוקיים AD ו-BC בהתאמה.
אלכסוני הטרפז נחתכים בנקודה M. $\mathrm{AB} = 20$ ס"מ, $\mathrm{EF} = 22$ ס"מ.
הוכח מרובע $HGCD$ הוא טרפז ומצא פי כמה גדול שטחו משטח המשולש HMG.



תשובה: $S_{HGCD} = 143 \cdot S_{HMG}$

שאלה 23

EH הוא הגובה לבסיס במשולש שווה שוקיים GFE $(\mathrm{EF} = \mathrm{EG} = 39$ ס"מ$)$. נקודה M נמצאת על הגובה HE בין נקודות H ו-E כך ש- $\mathrm{EM} = 13$ ס"מ. מנקודה M הורידו אנך לשוק EF הפוגש אותה בנקודה K.
$KE = 12$ ס"מ. חשב את אורכו של הגובה **<u>לשוק</u>** במשולש EFG.

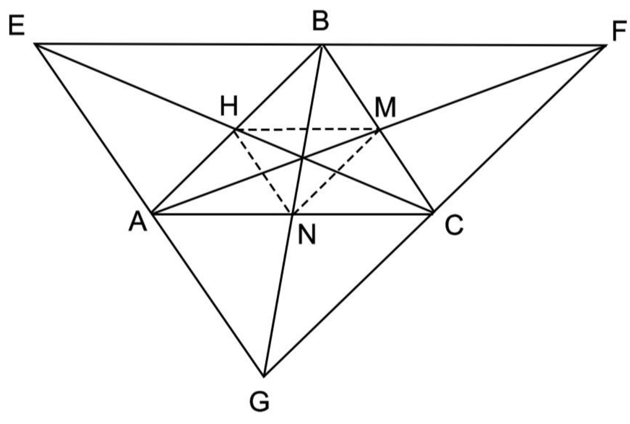


תשובה: $27.69 \approx 27\frac{9}{13}$ ס"מ.

שאלה 24

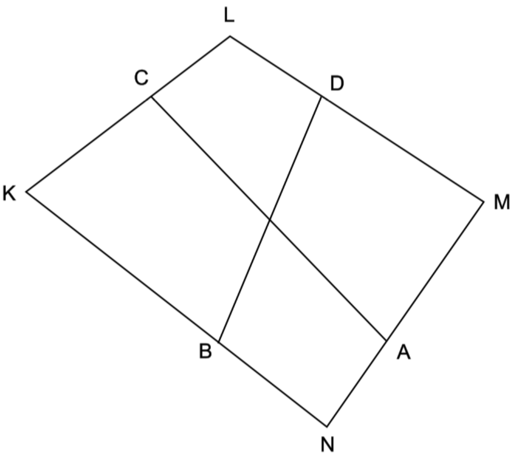
FA, GB ו-EC הם תיכוני משולש EFG.
הנקודות M,N ו-H הן אמצעי התיכון הנ"ל בהתאמה.

1. הוכח: $\Delta EFG \sim \Delta HMN$
2. מצא פי כמה גדול שטחו של ΔEFG משטחו של ΔHMN.



תשובה: $S_{\Delta EFG} = 16 \cdot S_{\Delta HMN}$

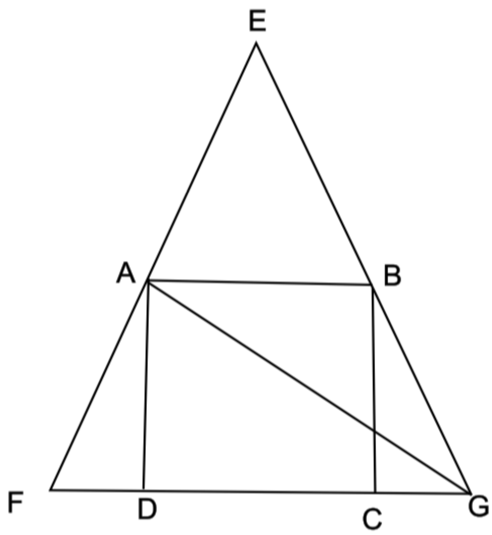
שאלה 25



הנקודות A,B,C ו-D נמצאות על מרובע $KLMN$ כך ש: $2KC = 3LC$, $2DM = 3LD$, $2AM = 3AN$ ו- $2KB = 3BN$.

הוכח: הקטעים AC ו-BD חוצים זה את זה.

שאלה 26



מלבן $ABCD$ חסום בתוך משולש שווה שוקיים EFG ($EF = EG$). AG חוצה את זווית הבסיס של משולש שווה השוקיים.

נתון: $\frac{AE}{AF} = \frac{5}{4}$. נסמן : $FG = 36m$.

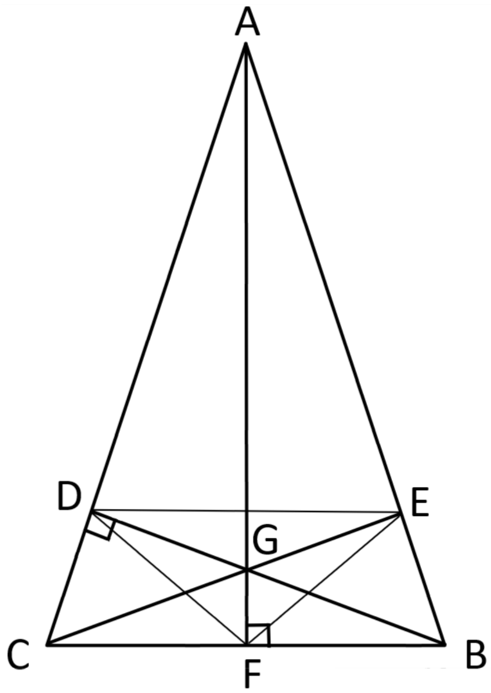
1. הבע באמצעות m את AF.

2. הבע באמצעות m את שטחו של המלבן $ABCD$.

תשובה:

1. $AF = 20m$
2. $S_{ABCD} = 80\sqrt{21}m^2 \approx 366.6m^2$.

שאלה 27



BD ו-AF הנם גבהים לצלעות AC ו-BC בהתאמה במשולש שווה השוקיים ABC $(AB = AC)$. הגבהים הנ"ל נפגשים בנקודה G. ישר היוצא מקודקוד C ועובר דרך נקודה G פוגש את הצלע AB בנקודה E.

א. הוכח : $BC = 2EF$

ב. איזה מהנקודות המופיעות בציור היא נקודת מפגש הגבהים במשולש ACG?

ג. נתון: $\frac{S_{ABC}}{S_{AGC}} = \frac{9}{4}$.

1. מצא את היחס $\frac{BG}{DG}$.
2. הוכח: $DE \parallel BC$.
3. מצא את היחס $\frac{DE}{BC}$.

ד. 1. מצא את היחס $\frac{AE}{BE}$

2. הוכח: $\Delta FEB \sim \Delta ABC$

3. מצא את היחס $\frac{AE}{CF}$

תשובות:

ג.1. $\frac{BG}{DG} = \frac{5}{4}$.

3. $\frac{DE}{BC} = \frac{4}{5}$.

ד.1. $\frac{AE}{BE} = \frac{4}{1}$.

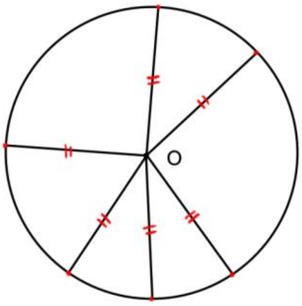
3. $\frac{AE}{CF} = \frac{4\sqrt{10}}{5} \approx 2.53$.

מעגל

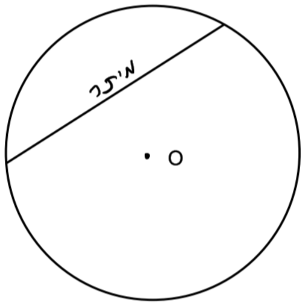
מעגל-הגדרות

הגדרות:

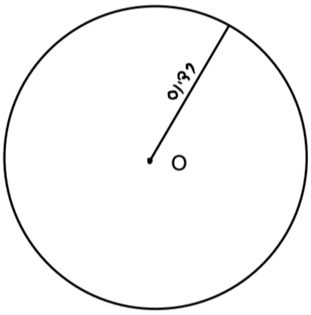
מעגל-אוסף כל הנקודות הנמצאות במרחק קבוע (הנקרא רדיוס) מנקודה קבועה (הנקראת מרכז המעגל).



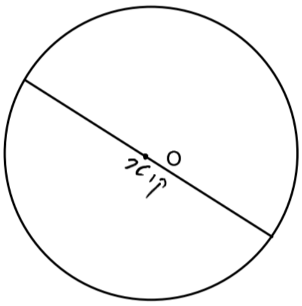
מיתר- קטע המחבר 2 נקודות על המעגל



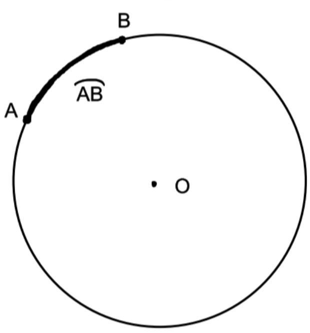
רדיוס- קטע המחבר את מרכז המעגל עם נקודה שעל המעגל.
(מהגדרת המעגל נובע שבמעגל כל הרדיוסים שווים).



קוטר- מיתר העובר במרכז המעגל. הקוטר מורכב מפעמיים הרדיוס ולכן כל הקטרים שווים.

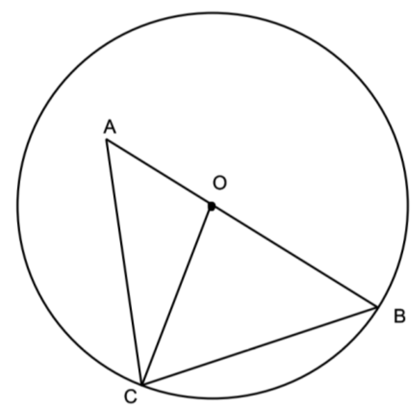


קשת- חלק מהמעגל המוגבל על ידי שתי נקודות הנמצאות על המעגל. אם הנקודות A ו-B נמצאות על המעגל הן יוצרות 2 קשתות. אם שתי הקשתות שנוצרו אינן שוות בגודלן אז כאשר נאמר הקשת AB נתכוון לקשת הקטנה (אלא אם צוין אחרת).



קשת מסמנים באופן הבא: $\overset{\frown}{AB}$

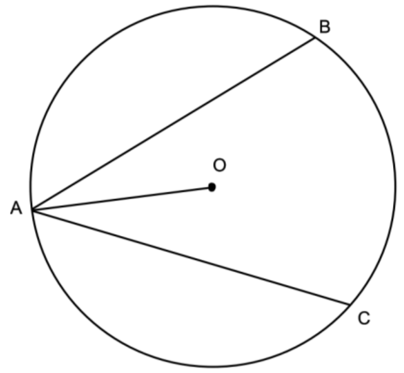
במעגל כל הרדיוסים שווים -תרגילים



תרגיל 1: נתון מעגל שמרכזו בנקודה O.
הנקודות B ו-C נמצאות על המעגל כך ש:
$\sphericalangle CAB = 51^\circ$, $AC = CB$.

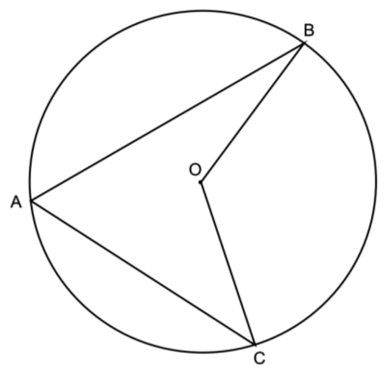
חשב את זווית ACO

תשובה: $\sphericalangle ACO = 27^\circ$



תרגיל 2: נתון מעגל שמרכזו בנקודה O.
$AC = AB$.

הוכח: $\sphericalangle CAO = \sphericalangle BAO$



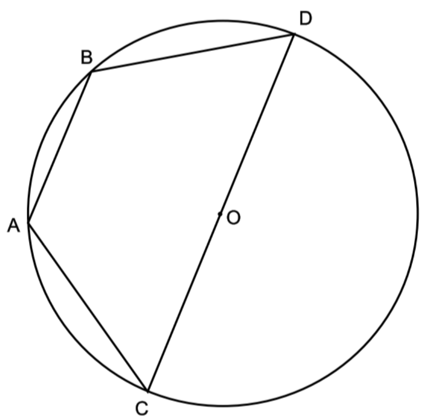
תרגיל 3: נתון מעגל שמרכזו בנקודה O.
$\sphericalangle ABO + \sphericalangle ACO = 51^\circ$

חשב את זווית A.

תשובה: $\sphericalangle A = 51^\circ$

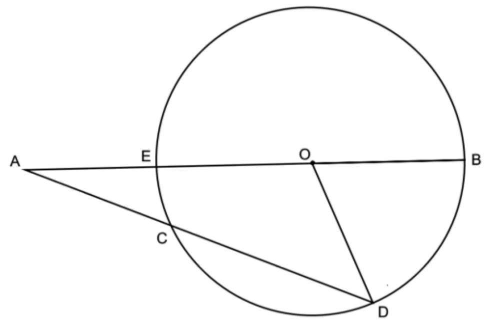
תרגיל 4: נתון מעגל שמרכזו בנקודה O.
CD הוא קוטר. $AC = BD$.

הוכח $CD \parallel AB$



תרגיל 5:
נתון מעגל שמרכזו בנקודה O.
המשך הקוטר BE והמשך המיתר DC
נפגשים בנקודה A כך שמתקיים :
$AC = OD$

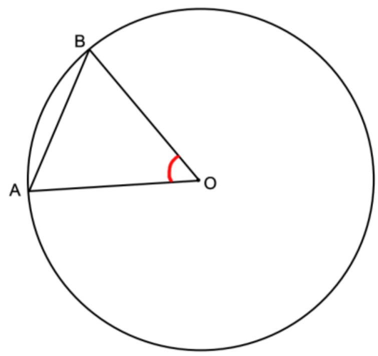
הוכח $\sphericalangle BOD = 3\sphericalangle A$



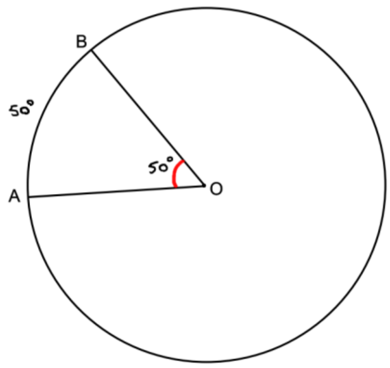
זוויות מרכזיות קשתות ומיתרים

זווית מרכזית- זווית שקדקודה נמצא במרכז המעגל ושוקיה הם רדיוסים במעגל נקראת זווית מרכזית.

למשל בציור נאמר ש: $\sphericalangle$AOB היא זווית מרכזית הנשענת על **קשת** $\widehat{AB}$ ועל **מיתר** AB.



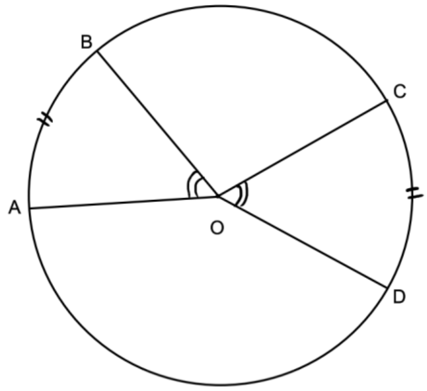
קשת ניתן למדוד ביחידות אורך (למשל סנטימטרים) או מעלות. למשל אם $\sphericalangle AOB = 50°$ נאמר שהקשת המתאימה לה גם שווה 50 מעלות: $\widehat{AB} = 50°$.



<u>משפט</u>: במעגל על קשתות שוות נשענות זוויות מרכזיות שוות. כלומר:

אם: $\widehat{AB} = \widehat{CD}$

אז: $\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD$



<u>משפט הפוך</u>: במעגל לזוויות מרכזיות שוות מתאימות קשתות שוות. כלומר :

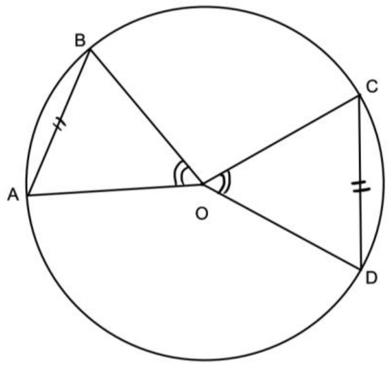
אם: $\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD$

אז: $\widehat{AB} = \widehat{CD}$

<u>משפט</u>: במעגל זוויות מרכזיות שוות נשענות על מיתרים שווים

אם: $\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD$

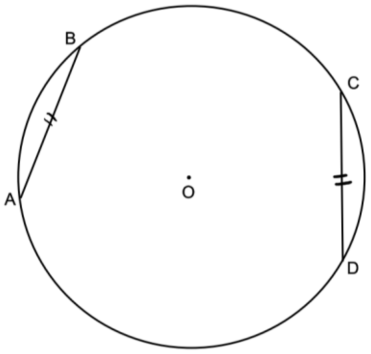
אז: $AB = CD$



<u>משפט הפוך</u>: למיתרים שווים מתאימות זוויות מרכזיות שוות.

אם: $AB = CD$

אז: $\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD$



<u>משפט</u>: במעגל למיתרים שווים מתאימות קשתות שוות

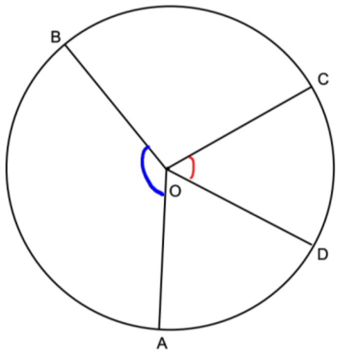
אם: $AB = CD$

אז: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

<u>משפט הפוך</u>: על קשתות שוות נשענים מיתרים שווים.

אם: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

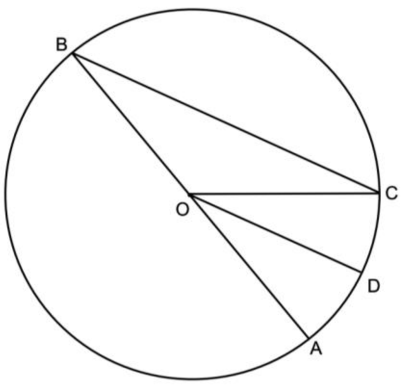
אז: $AB = CD$



<u>משפט</u>: לזוויות מרכזיות שונות מתאימות קשתות שונות, כך שלזווית המרכזית הגדולה מבין ה-2 מתאימה הקשת הגדולה מבין ה-2.

אם: $\sphericalangle AOB > \sphericalangle COD$

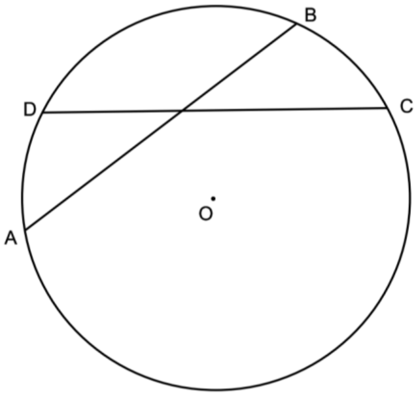
אז: $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{CD}$



<u>תרגיל 1:</u>
נתון מעגל שמרכזו בנקודה O.

$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{CD}$
AB הוא קוטר.

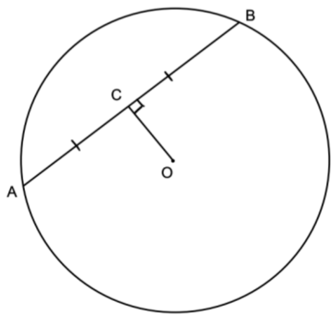
הוכח: $OD \parallel BC$.



תרגיל 2: נתון מעגל שמרכזו בנקודה O ובו שני מיתרים נחתכים: DC ו-AB. נתון: $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{CB}$.

הוכח: $AB = CD$

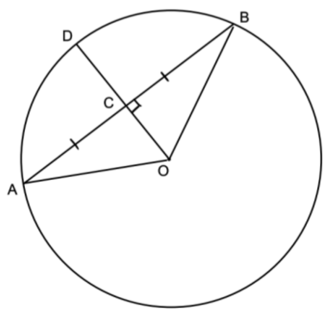
האנך ממרכז המעגל למיתר



משפט: קטע שיוצא ממרכז המעגל ומאונך למיתר, חוצה את המיתר (, חוצה את הזווית המרכזית שמתאימה למיתר וחוצה את הקשת שמתאימה למיתר)

אם: $CO \perp AB$

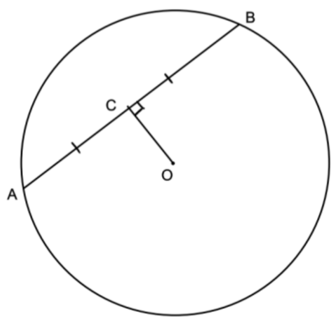
אז: $AC = CB$



וגם (פחות נפוץ):

$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB}$

$\sphericalangle AOD = \sphericalangle BOD$

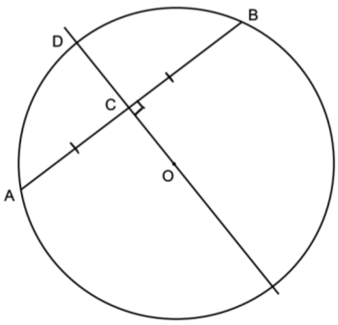


משפט הפוך: קטע שיוצא ממרכז המעגל וחוצה מיתר, מאונך אליו.

אם: $AC = CB$

אז: $CO \perp AB$

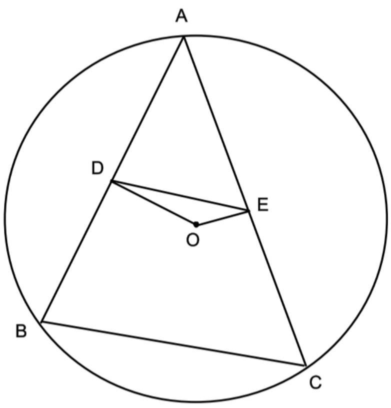
<u>משפט</u>: אנך אמצעי למיתר עובר במרכז המעגל



אם $CD \perp AB$ וגם $AC = CB$

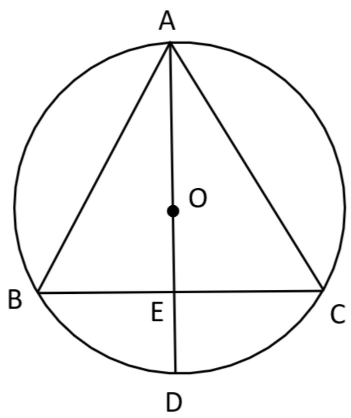
אז המשך הישר CD יעבור במרכז המעגל (O).

<u>תרגיל 1</u>: נתון מעגל שמרכזו בנקודה O.
בתוך מעגל זה חסום משולש ABC.
נתון ש: $OE \perp AC$. $DE \parallel BC$.



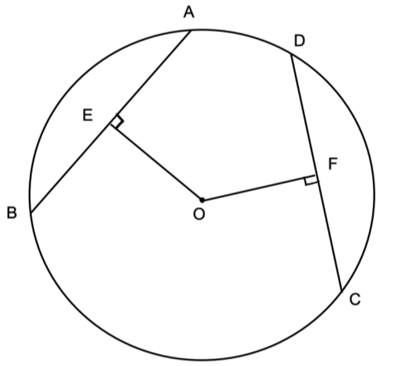
הוכח: $\sphericalangle ODA = 90°$

<u>תרגיל 2</u>: נתון מעגל שמרכזו בנקודה O. בתוך מעגל זה חסום משולש ABC. המיתר AD הוא קוטר החותך את מיתר BC בנקודה E. נתון ש-AE הוא תיכון במשולש ABC ו-$OE = ED$.



הוכח:
א. משולש ABC הוא שווה צלעות.
ב. מרובע $BOCD$ הוא מעוין.

מיתרים ומרחקם ממרכז המעגל.



משפט: מיתרים שווים נמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל.

כלומר
אם המיתרים שווים: $AB = DC$

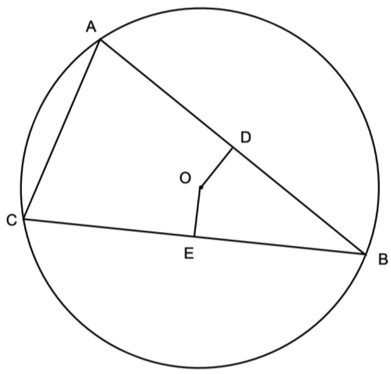
אז המרחקים שווים:
$EO = FO$

(לפי הגדרת מרחק בין נקודה לישר מתקיים $EO \perp AB$ ו-$FO \perp DC$)

משפט הפוך: מיתרים הנמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל, שווים זה לזה.

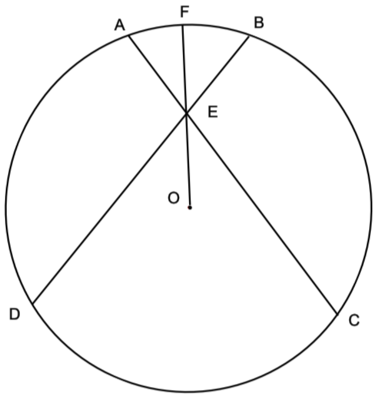
כלומר
אם המרחקים מהמרכז שווים : $EO = FO$

אז המיתרים שווים:
$AB = DC$
(לפי הגדרת מרחק בין נקודה לישר מתקיים $EO \perp AB$ ו-$FO \perp DC$)



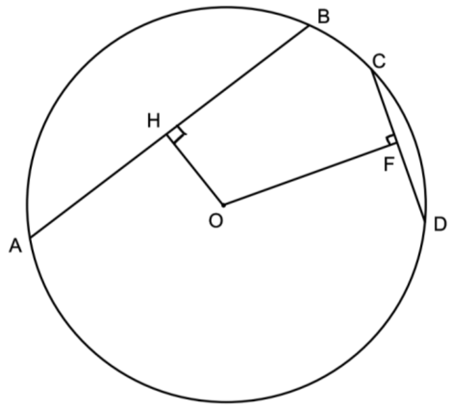
תרגיל 1: נתון מעגל שמרכזו בנקודה O. בתוך מעגל זה חסום משולש ABC כך ש-D ו-E הן אמצעי הצלעות AB ו-BC בהתאמה. נתון ש: $DO = EO$.

הוכח: המרובע EODB הוא דלתון



<u>תרגיל 2</u>: נתון מעגל שמרכזו בנקודה O. AC ו-BD הם מיתרים שווים במעגל הנחתכים בנקודה E. המשך הישר OE נפגש עם המעגל בנקודה F.

1. הוכח OE חוצה את זווית DEC.
2. הוכח: המשך הקטע OE חוצה את המיתר DC.



<u>משפט</u>: שני מיתרים במעגל שאינם שווים זה לזה, נמצאים במרחקים שונים ממרכז המעגל, כך שהמיתר הגדול מבין ה-2 נמצא קרוב יותר למרכז המעגל.

כלומר

אם המיתרים מקיימים: $AB > DC$

אז המרחקים מקיימים :

$HO < FO$

(לפי הגדרת מרחק בין נקודה לישר מתקיים

$HO \perp AB$ ו-$FO \perp DC$)

<u>משפט הפוך</u>: שני מיתרים שנמצאים במרחקים שונים ממרכז המעגל אינם שווים זה לזה. המיתר הקרוב יותר למרכז הוא המיתר הגדול מבין השניים.

כלומר

אם המרחקים מקיימים: $HO < FO$

אז המיתרים מקיימים:

$AB > DC$

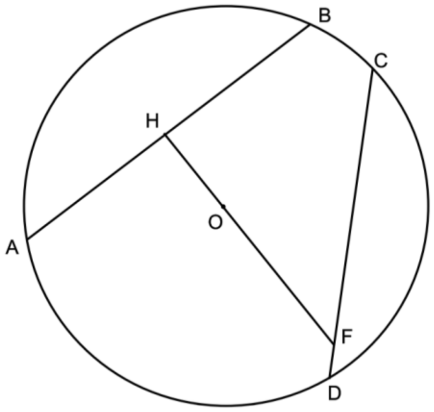
(לפי הגדרת מרחק בין נקודה לישר מתקיים

$HO \perp AB$ ו-$FO \perp DC$)

תרגיל: נתון מעגל שמרכזו בנקודה O. AB ו-DC הם מיתרים במעגל כך ש- $\mathrm{AB} > \mathrm{DC}$. בנוסף נקודה H היא אמצע AB.

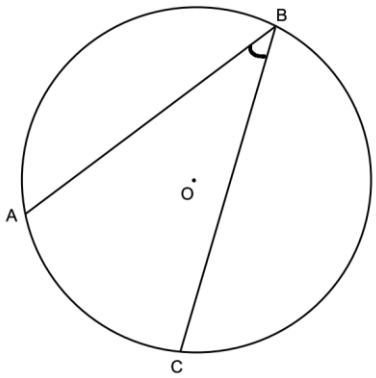
הוכח:

$$\mathrm{OF} > \mathrm{OH}$$

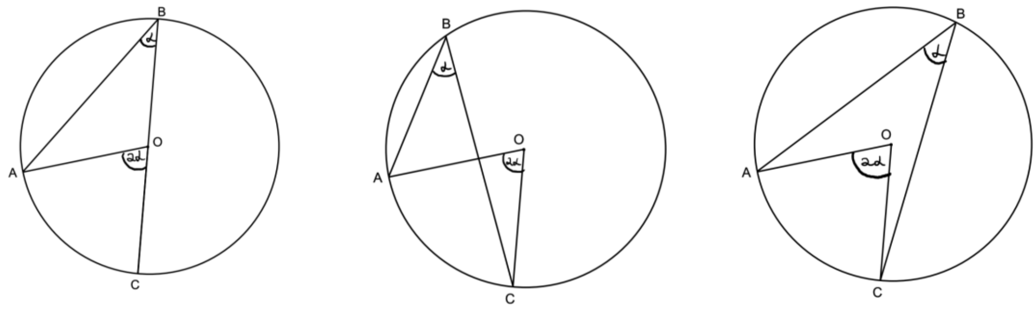


זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת וזוויות ומרכזיות

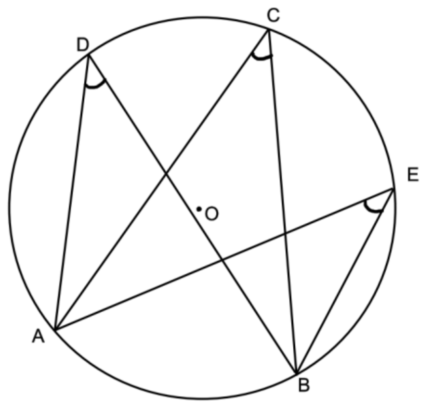
זווית היקפית: היא זווית ששוקיה הם שני מיתרים במעגל וקודקודה נמצא על המעגל.



משפט: זווית היקפית במעגל שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה הקשת.

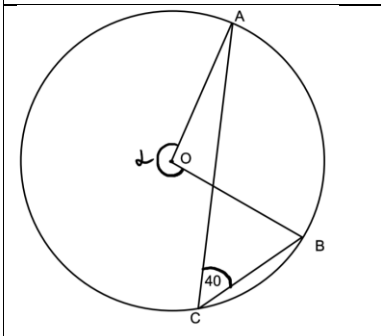
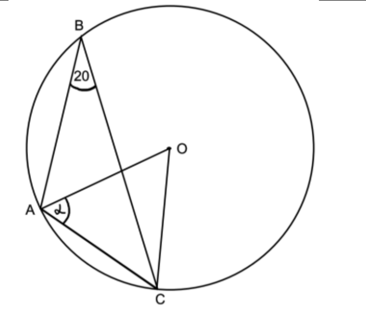
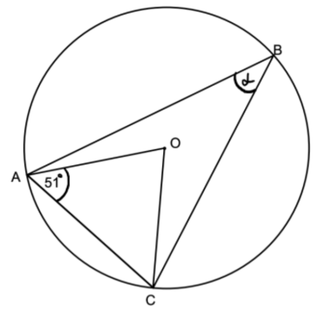
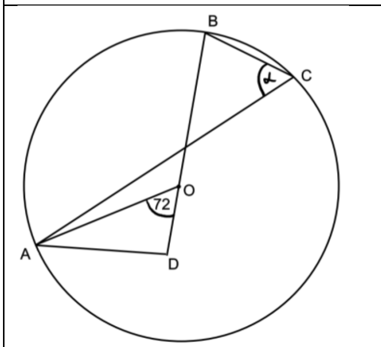
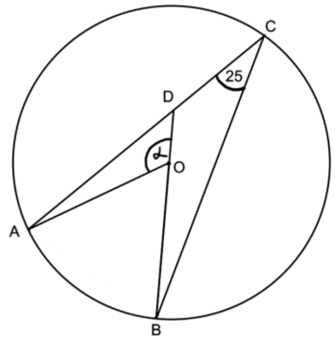
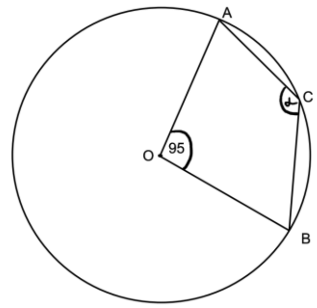
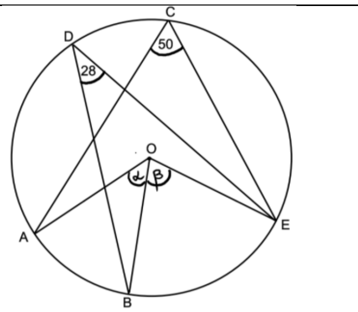
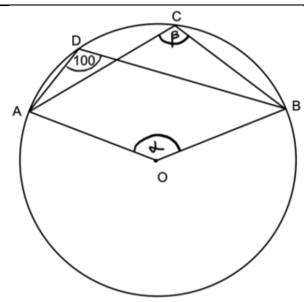


משפט: כל הזוויות ההיקפיות הנשענות על אותה הקשת שוות זו לזו.

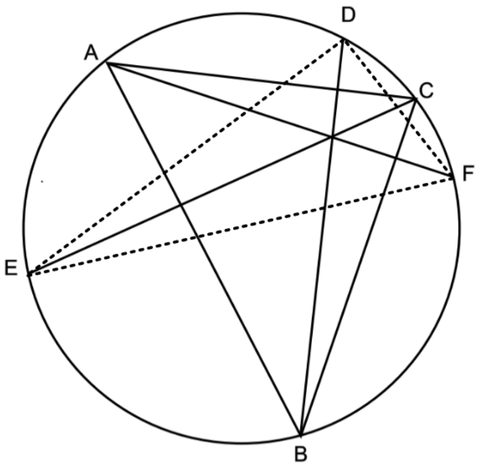


שימו לב שכל הזוויות ההיקפיות שנשענות על $\widehat{AB}$ שוות זו לזו :

$\sphericalangle D = \sphericalangle E = \sphericalangle C$

תרגיל: נתונים מעגלים שמרכזם בנקודה O. בכל אחד מהתרגילים הבאים מצא את הפרמטר α ואת β		
		
$\alpha = 280°$	$\alpha = 70°$	$\alpha = 39°$
		
$\alpha = 54°$	$\alpha = 130°$	$\alpha = 132.5°$
		
	$\alpha = 44°, \beta = 56°$	$\alpha = 160°, \beta = 100°$

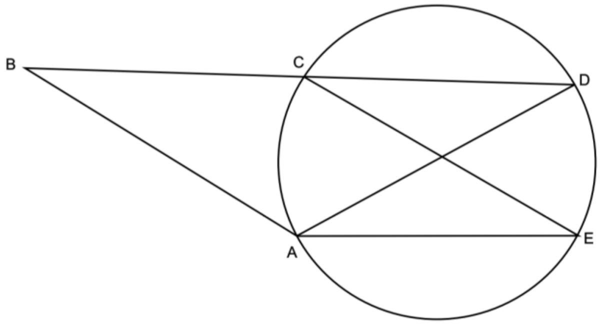
תרגיל 1: נתון משולש ABC החסום במעגל. שלושת הגבהים של משולש ABC נפגשים בתוך המשולש וממשיכים עד אשר פוגשים את המעגל בנקודות E, D ו-F כמתואר בשרטוט.
נסמן $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle BAC = \alpha$



הבע באמצעות α ו-β את זוויות המשולש EDF.

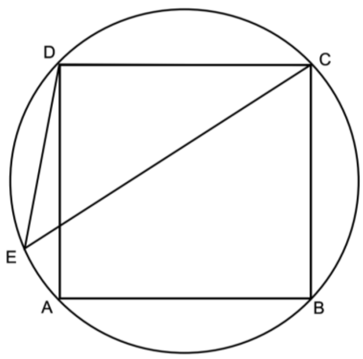
תשובה:
$\sphericalangle D = 180° - 2\beta$
$\sphericalangle F = 180° - 2\alpha$
$\sphericalangle E = 2\alpha + 2\beta - 180°$

תרגיל 2: נתון מעגל. שלושה מתוך ארבעת קודקודי המקבילית $ABCE$ נמצאים על המעגל כמתואר בשרטוט. AD הוא מיתר במעגל הנפגש בנקודה D עם המשך הקטע BC וחותך את מיתר CE.



הוכח: משולש ABD הוא שווה שוקיים.

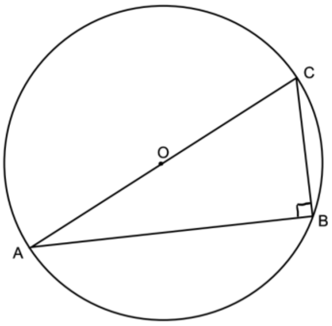
תרגיל 3: נתון ריבוע $DCBA$ חסום במעגל. נקודה E נמצאת על המעגל.



חשב את זווית DEC.

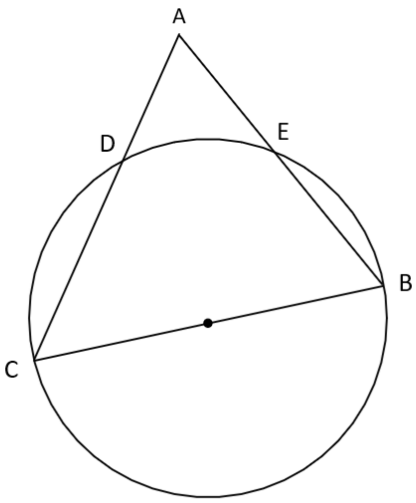
תשובה:
$\sphericalangle \mathrm{DEC} = 45°$

זווית היקפית הנשענת על קוטר



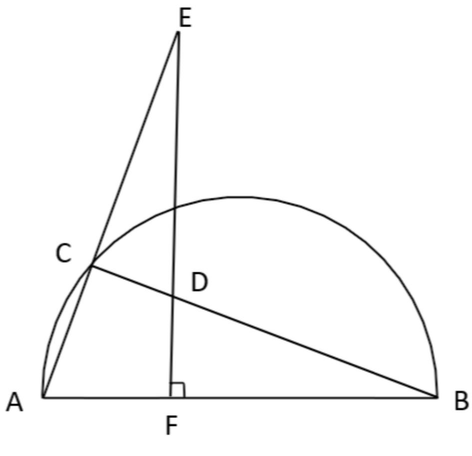
משפט: זווית היקפית הנשענת על קוטר שווה ל-$90°$.

משפט הפוך: מיתר הנשען על זווית היקפית השווה ל-$90°$ הוא קוטר.



תרגיל 1:
נתון משולש ABC אשר 2 קודקודיו B ו-C נמצאים על המעגל וקודקודו השלישי, A, נמצא מחוץ למעגל כך שהצלעות AB ו-AC חותכים את המעגל בנקודות E ו-D בהתאמה.
נתון :
1. המיתר BC עובר במרכז המעגל.
2. הנקודה E היא אמצע הצלע AB.

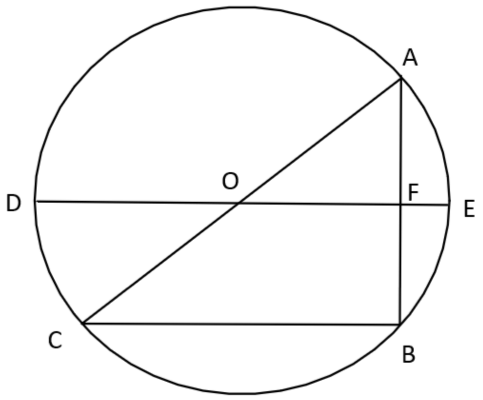
הוכח: משולש ABC הוא שווה שוקיים.



תרגיל 2:
AB הוא קוטר של חצי מעגל שרדיוסו 20 ס"מ. המיתר AC ממשיך עד לנקודה E אשר ממנה מורידים אנך לקוטר AB החותך אותו בנקודה F. המיתר BC והקטע EF נחתכים בנקודה D.
נתון:
1. $AE = AB$
2. $AC = 8$ ס"מ

חשב את אורכו של BF.

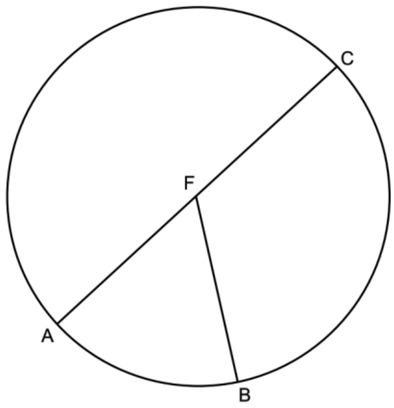
תשובה: $BF = 32$ ס"מ



<u>תרגיל 3</u>:
נתון מעגל שמרכזו בנקודה O. AC ו-DE
הם קטרים במעגל. AB ו-BC הם מיתרים
במעגל. DE מקביל ל-BC. נתון:
$BF = 3$ ס"מ . $BC = 12$ ס"מ.

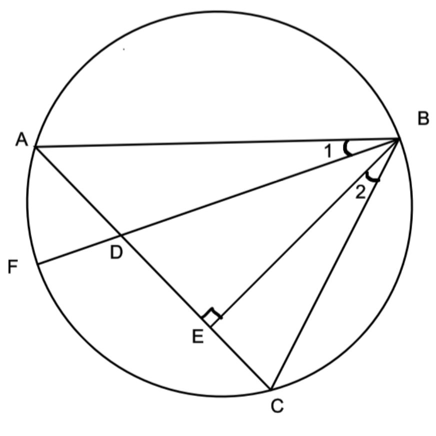
מצא את אורכו של DO.
(תוכל להשאיר שורש בתשובתך)

<u>תשובה</u>: $DO = 3\sqrt{5} \approx 6.71$ ס"מ



<u>תרגיל 4</u>: נתון מעגל. AC הוא מיתר
במעגל ו-B היא נקודה הנמצאת על
המעגל. בנוסף: $AF = FC = FB$

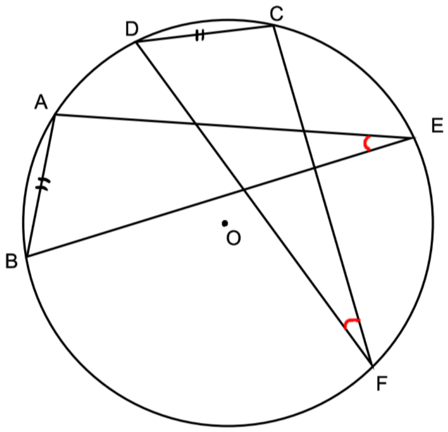
הוכח נקודה F היא מרכז המעגל.



<u>תרגיל 5</u>: נתון מעגל . המיתר BF הוא קוטר. ABC
הוא משולש החסום במעגל. $\mathrm{BE} \perp \mathrm{AC}$.

הוכח $\sphericalangle \mathrm{B}_1 = \sphericalangle \mathrm{B}_2$

זוויות היקפיות וקשתות שוות



משפט: במעגל על קשתות שוות נשענות זוויות היקפיות שוות. כלומר

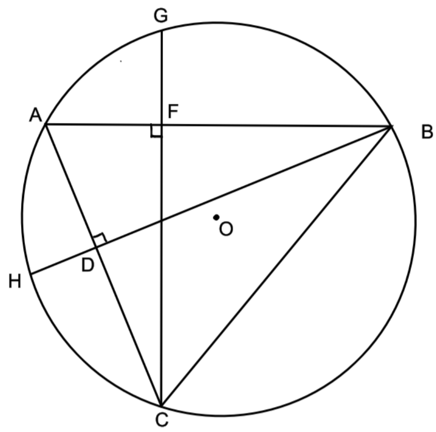
אם: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{DC}$

אז: $\sphericalangle E = \sphericalangle F$

משפט הפוך(נכון גם למיתרים): במעגל, על זוויות היקפיות שוות נשענות קשתות שוות (ומיתרים שווים)

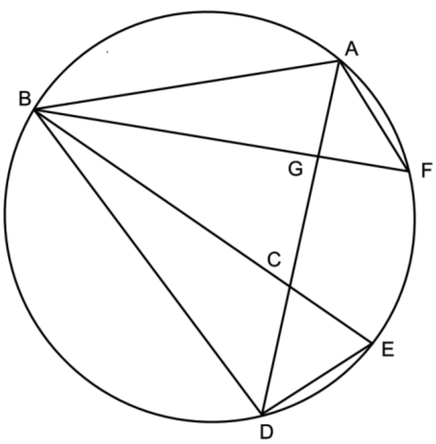
אם: $\sphericalangle E = \sphericalangle F$

אז: $AB = DC$ **וגם** $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{DC}$



תרגיל 1: נתון מעגל ובו חסום משולש ABC.המשכי הגבהים במשולש ABC נפגשים עם המעגל בנקודות G ו-H כמתואר בשרטוט.

הוכח $\overset{\frown}{AH} = \overset{\frown}{AG}$



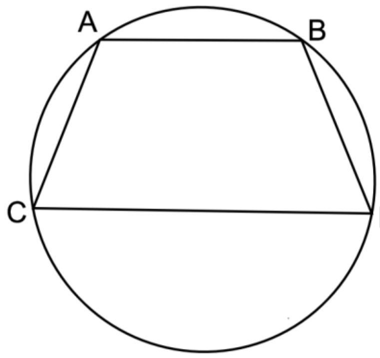
תרגיל 2: המשולשים ABF ו-BDE חסומים במעגל. המיתר AD חותך את הצלעות BF ו-BE בנקודות G ו-C בהתאמה.

נתון: $BF = BD$, $AF = CD$.

(הערה: קשת BF הקטנה היא זאת העוברת דרך נקודה A וקשת BD הקטנה היא זאת שלא עוברת דרך נקודה A.)

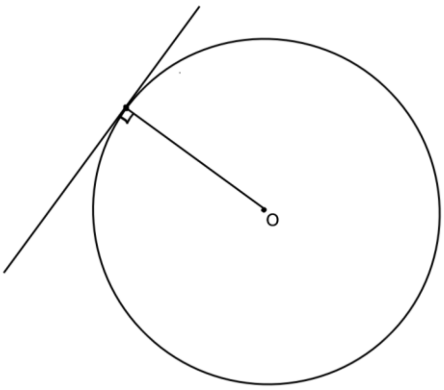
הוכח (ללא בניות עזר):

$AF = DE$



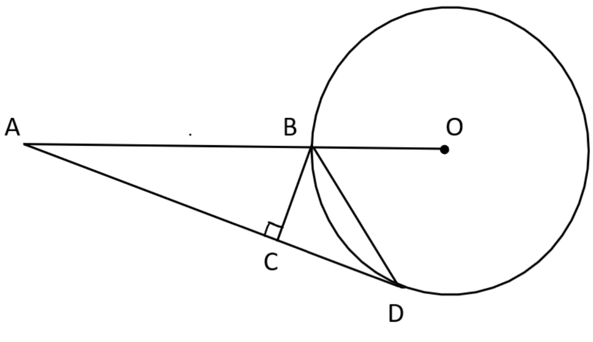
תרגיל 3: הוכח (ללא קשר למשפט האחרון שנלמד) : כל טרפז החסום במעגל הוא טרפז שווה שוקיים.

רדיוס מאונך למשיק



משפט: רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה.

משפט הפוך: ישר המאונך לרדיוס בקצהו הוא משיק למעגל.

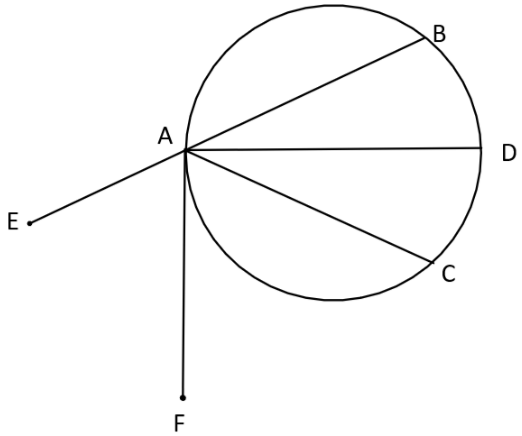


תרגיל 1:
AD משיק למעגל שמרכזו O בנקודה D.
המשך הרדיוס OB פוגש את המשיק בנקודה A. BC מאונך ל-AD.

הוכח:
BD חוצה את זווית CBO.

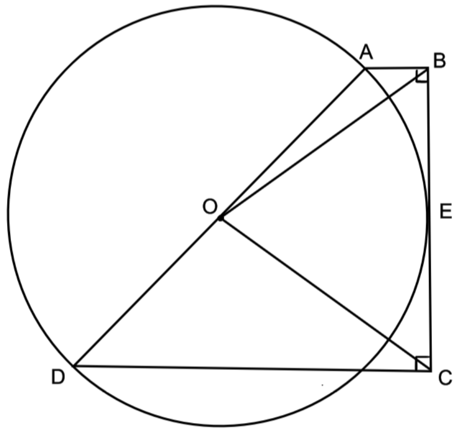
<u>תרגיל 2</u>:
AD הוא קוטר במעגל. המיתר AB שווה באורכו למיתר AC. הנקודה E נמצאת על המשך המיתר AB. הנקודה F נמצאת מחוץ למעגל כך ש-AF חוצה את זווית EAC.

הוכח: AF משיק למעגל בנקודה A.



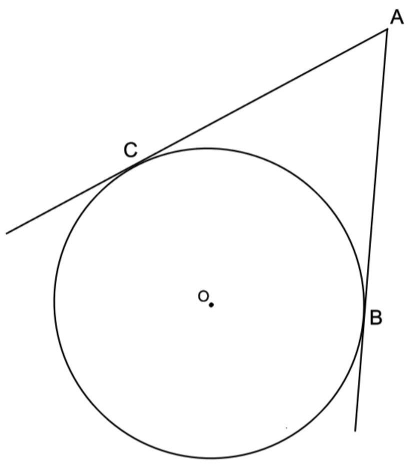
<u>תרגיל 3</u>: BC משיק למעגל שמרכזו O בנקודה E. AD הוא קוטר. $AB \perp BC$, $DC \perp BC$. $AB \neq DC$.

הוכח: $OB = OC$

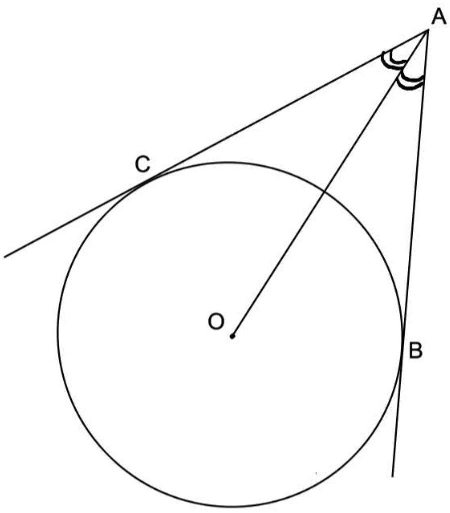


שני משיקים למעגל

<u>משפט</u>: שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שמחוץ למעגל שווים זה לזה (עד נקודת ההשקה).



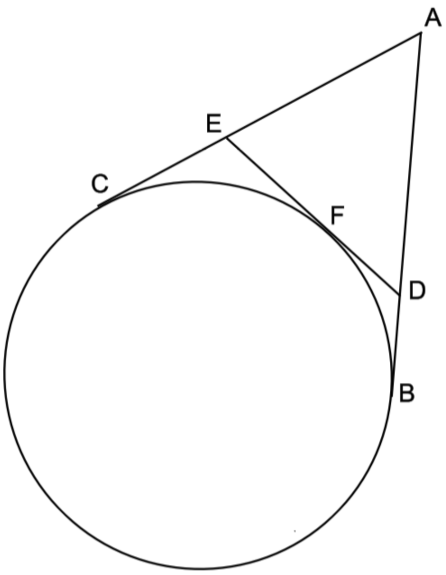
משפט: קטע שיוצא ממרכז המעגל אל נקודה ממנה יוצאים שני משיקים למעגל, חוצה את הזווית שבין המשיקים.



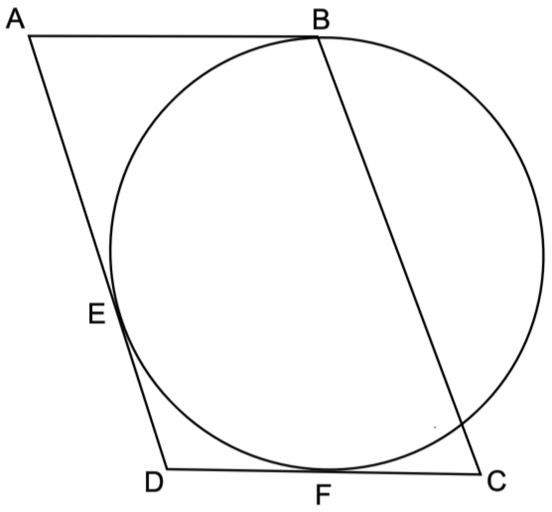
תרגיל 1: AB ו-AC הם משיקים למעגל. הנקודות E ו-D נמצאות על AC ו-AB בהתאמה כך ש-ED משיק למעגל בנקודה F. $AB = 18$

חשב את היקף המשולש AED.

<u>תשובה</u>: $P_{AED} = 36$ ס"מ



<u>תרגיל 2:</u>

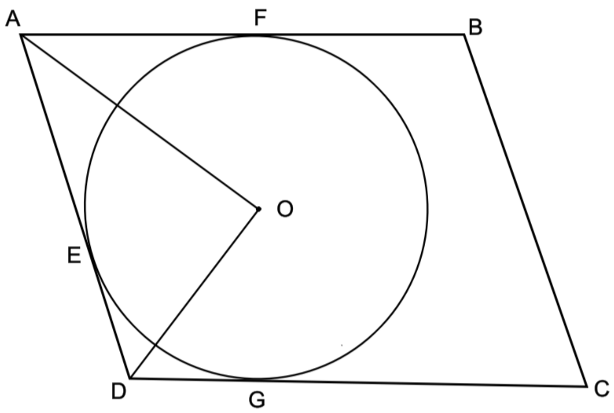


$ABCD$ היא מקבילית המשיקה למעגל בנקודות E,B ו-F. הצלע DC משיקה למעגל בנקודה F והצלע AD משיקה למעגל בנקודה E. הצלע BC חותכת את המעגל. בנוסף נתון: $\mathrm{BC} = 11$, $\mathrm{FC} = 3$.

חשב את DC

<u>תשובה:</u>
$\mathrm{DC} = 7$

<u>תרגיל 3:</u>

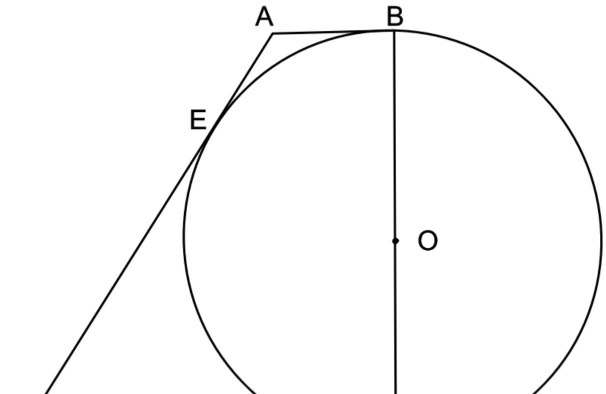


$ABCD$ היא מקבילית המשיקה למעגל בנקודות G, E ו-F. O הוא מרכז המעגל.

הוכח:
.

$\sphericalangle AOD = 90°$

<u>תרגיל 4:</u>



BC הוא קוטר במעגל שמרכזו ב-O. המרובע $ABCD$ משיק למעגל בנקודות E, B ו-C. $\sphericalangle \mathrm{D} = 60°$.

מצא את היחס $\frac{AE}{ED}$

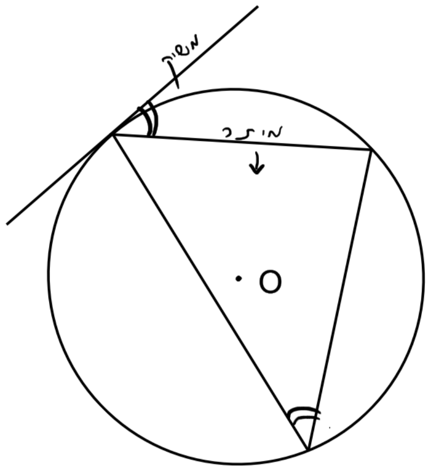
<u>תשובה:</u>
$$\frac{AE}{ED} = \frac{1}{3}$$

זווית בין משיק ומיתר

<u>משפט</u>: "זווית בין משיק למיתר"

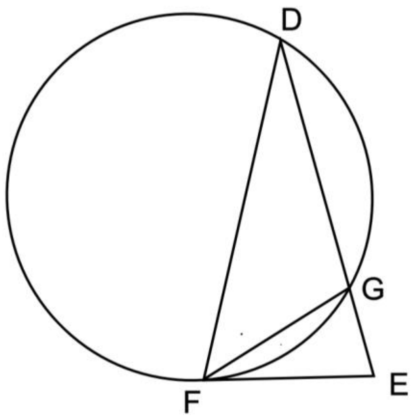
<u>המשפט המלא</u>: זווית בין משיק ומיתר במעגל הנפגשים בנקודת ההשקה שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצדו השני.

הערה: בבגרות מספיק לציין את המשפט הקצר.



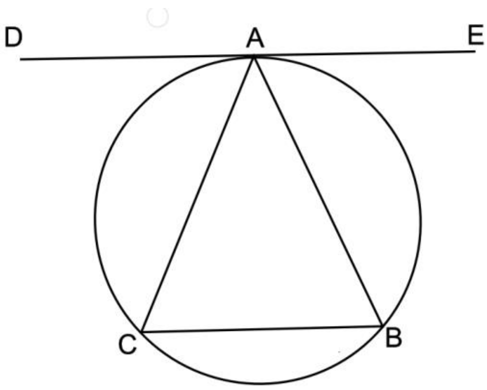
<u>תרגיל 1</u>: משולש DGF חסום במעגל. המשיק למעגל בנקודה F נפגש עם המשך הצלע DG בנקודה E. זווית E שווה $80°$ וזווית DFG שווה $60°$.

הוכח משולש FED הוא שווה שוקיים



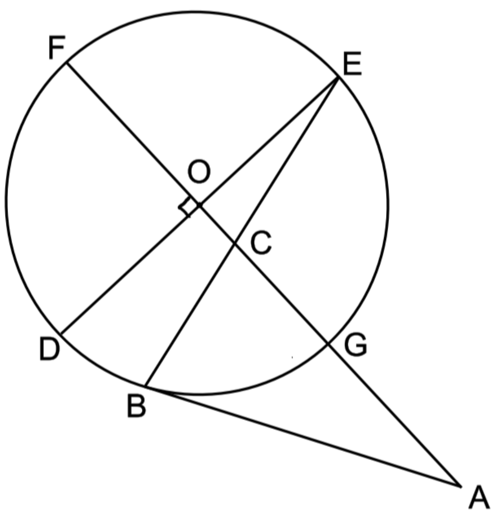
<u>תרגיל 2</u>: משולש ABC חסום במעגל. הישר DE משיק למעגל בנקודה A כך ש-BC ∥ ED.

הוכח המשולש ABC הוא שווה שוקיים.



<u>תרגיל 3</u>: הקטרים FG ו-DE מאונכים זה לזה. הישר המשיק למעגל בנקודה B פוגש את המשך הקוטר FG בנקודה A.

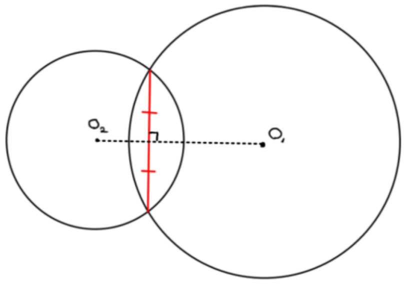
הוכח: המשולש ABC הוא שווה שוקיים.



קטע מרכזים

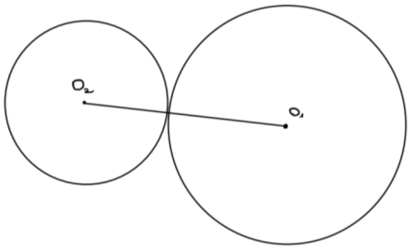
<u>הגדרה</u>: קטע מרכזים של שני מעגלים הוא קטע המחבר את מרכזי המעגלים.

<u>מעגלים נחתכים</u>



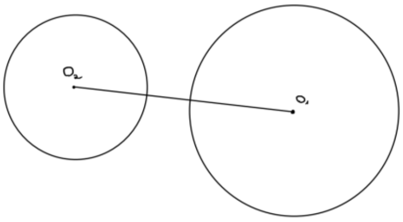
<u>משפט</u>: קטע מרכזים של מעגלים נחתכים חוצה ומאונך למיתר המשותף

<u>מעגלים משיקים מבחוץ</u>



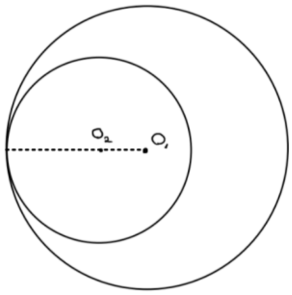
<u>משפט</u>: קטע מרכזים של מעגלים משיקים מבחוץ עובר בנקודת ההשקה.

<u>מעגלים זרים</u>



אין משפט על קטע מרכזים של מעגלים זרים.

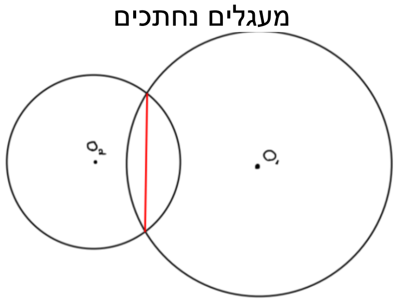
<u>מעגלים משיקים מבפנים</u>



<u>משפט</u>: קטע מרכזים של מעגלים משיקים מבפנים עובר בנקודת ההשקה.

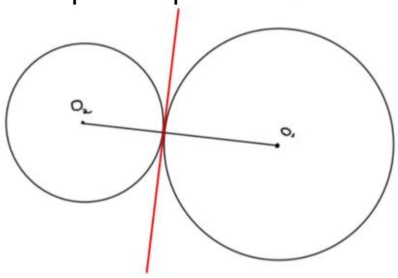
בניות עזר נפוצות:

מעגלים נחתכים



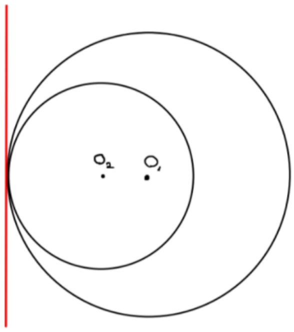
להעביר את המיתר המשותף
ולפעמים גם את קטע המרכזים

מעגלים משיקים מבחוץ



להעביר את המשיק המשותף
ולפעמים גם את קטע המרכזים

מעגלים משיקים מבפנים

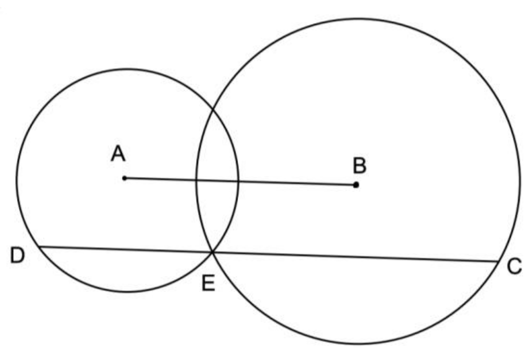


להעביר את המשיק המשותף
ולפעמים גם את קטע המרכזים

תרגיל 1: שני מעגלים שמרכזם בנקודות A ו-B נחתכים בשתי נקודות שאחת מהן היא E. הנקודות D ו-C נמצאות על המעגלים השמאלי והימיני בהתאמה כך הישר DC עובר דרך הנקודה E ומתקיים $ED \parallel AB$.

הוכח:

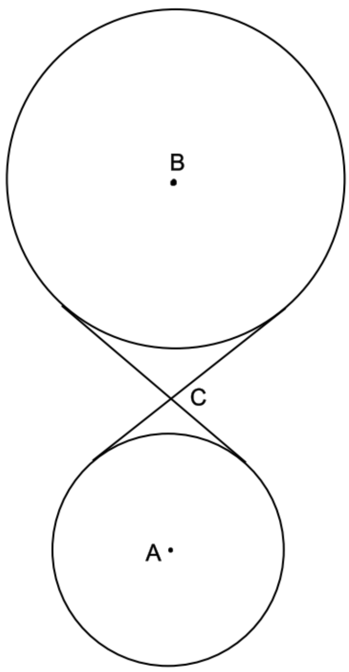
$$\mathrm{AB} = \frac{1}{2}DC$$

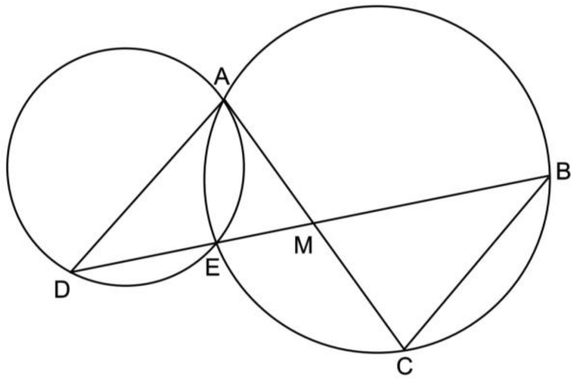


תרגיל 2:

נתונים שני משיקים משותפים למעגלים שמרכזם בנקודות A ו-B. המשיקים הנ"ל נפגשים בנקודה C. רדיוסי המעגלים שונים זה מזה.

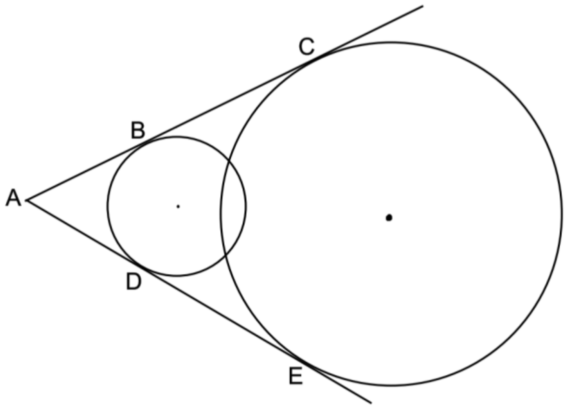
הוכח: קטע המרכזים של שני המעגלים עובר דרך הנקודה C.





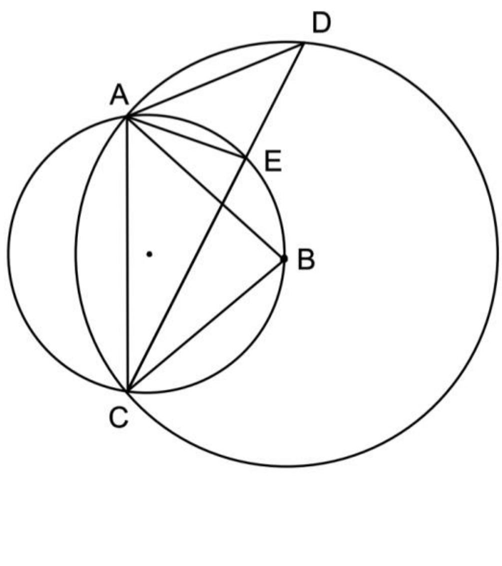
<u>תרגיל 3</u>:
שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו-E. AC הוא מיתר במעגל הימיני ומשיק למעגל השמאלי בנקודה A. הנקודות B ו-D נמצאות על המעגלים הימיני והשמאלי בהתאמה כך שהישר BD עובר בנקודה E.

הוכח:
$$AD \parallel BC$$



<u>תרגיל 4</u>:
שני מעגלים שונים נחתכים. מנקודה A שמחוץ למעגלים יוצאים שני משיקים למעגלים. הם משיקים למעגל השמאלי בנקודות B ו-D ולמעגל הימיני בנקודות C ו-E.

הוכח:
$$DE = BC$$

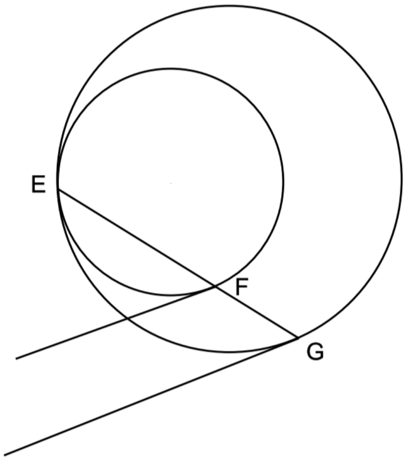


<u>תרגיל 5</u>:
ABC הוא משולש החסום במעגל השמאלי. B היא נקודת מרכז המעגל הימיני העובר בנקודות D, A ו- C כמתואר בשרטוט. המיתר CD חותך את המעגל השמאלי בנקודה E.

הוכח:
משולש ADE הוא שווה שוקיים.

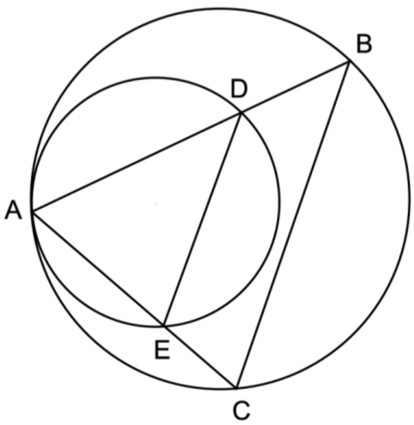
<u>תרגיל 6</u>:
נתון מעגל קטן המשיק למעגל גדול מבפנים בנקודה E. מיתר המעגל הגדול (EG) חותך את המעגל הקטן בנקודה F.

הוכח שהמשיק למעגל הקטן בנקודה F והמשיק למעגל הגדול בנקודה G מקבילים זה לזה.



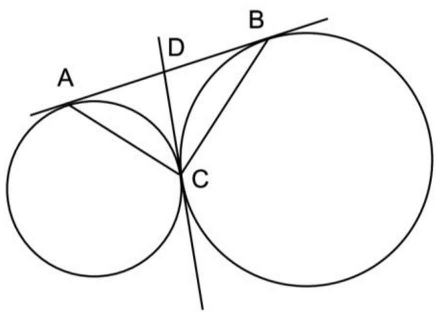
<u>תרגיל 7</u>:
נתון מעגל קטן המשיק למעגל גדול מבפנים בנקודה A. המשולש ABC חסום במעגל הגדול וצלעותיו AB ו-AC חותכים את המעגל הקטן בנקודות D ו-E בהתאמה.

הוכח: $ED \parallel BC$



<u>תרגיל 8</u>:
שני מעגלים משיקים זה לזה בנקודה C. ישר משיק לשני המעגלים בנקודות A ו-B כמתואר בשרטוט. משיק משותף נוסף משיק לשני המעגלים בנקודת ההשקה המשותפת C וחותך את הקטע AB בנקודה D.

הוכח: משולש ABC הוא משולש ישר זווית.

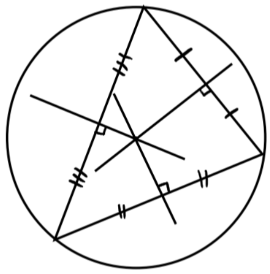


מעגל חוסם משולש

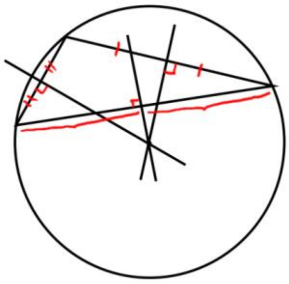
משפט: מרכז המעגל החוסם משולש נמצא במפגש האנכים האמצעים.

** (שימו לב שאנך אמצעי לצלע במשולש לא בהכרח יוצא מקודקוד).

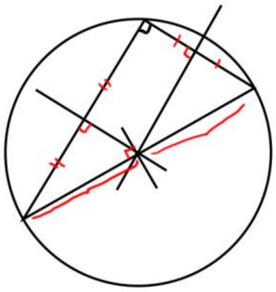
דוגמה למשולש חד זווית
(המרכז בתוך המשולש)



דוגמה למשולש קהה זווית
(המרכז מחוץ למשולש)



דוגמה למשולש ישר זווית
(המרכז על המשולש)



תרגיל 1:

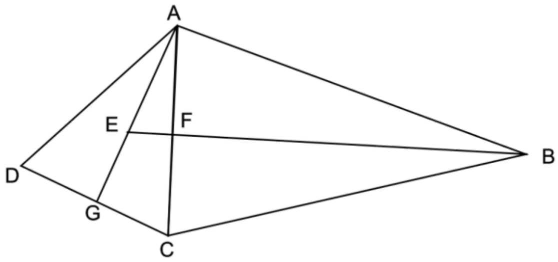
ABC הוא משולש שווה שוקיים $(BA = BC)$.

ADC הוא משולש שווה שוקיים $(AC = AD)$.

המשך חוצה הזווית (BF) במשולש ABC והגובה (AG) במשולש ADC נפגשים בנקודה E.

הוכח באמצעות המשפט האחרון שלמדנו ש:

$ED = AE$

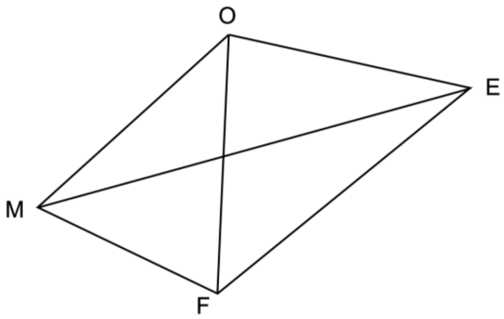


תרגיל 2:

נתון $OM = OF = OE$

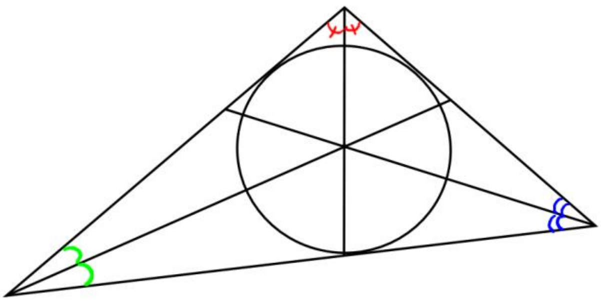
הוכח :

1. O מרכז המעגל החוסם את משולש MFE
2. $\measuredangle MOF = 2\measuredangle MEF$



מרכז המעגל החסום במשולש

<u>משפט</u>: מרכז המעגל **החסום** במשולש נמצא במפגש חוצי הזווית.



חשוב לציין שחוצי הזווית אינם בהכרח "פוגעים" בנקודת ההשקה. (זה כן קורה במצב שהחוצה זווית יוצא מזווית ששוקיה שוות -למשל משולש שווה שוקיים או שווה צלעות)

<u>תרגיל 1</u>:

E הוא מרכז המעגל החוסם את משולש ABC

ו-F הוא מרכז המעגל החסום במשולש ABC.

$\sphericalangle B = 48$.

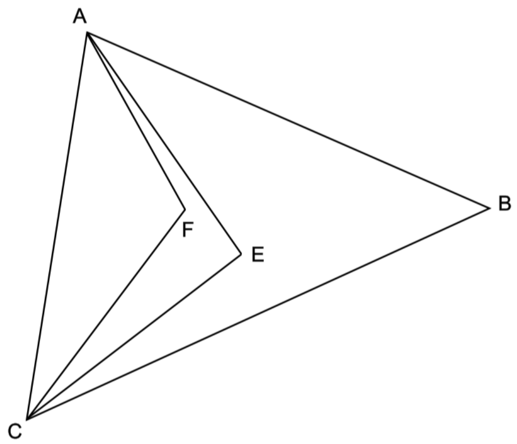
מצא את:

1. $\sphericalangle E$
2. $\sphericalangle F$

תשובה:

1.$\sphericalangle E = 96°$

2.$\sphericalangle AFC = 114°$

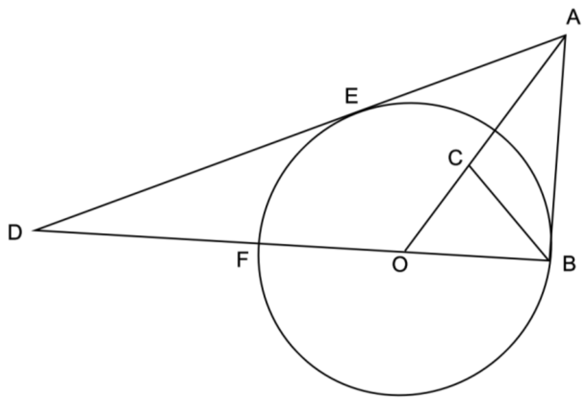


<u>תרגיל 2</u>:

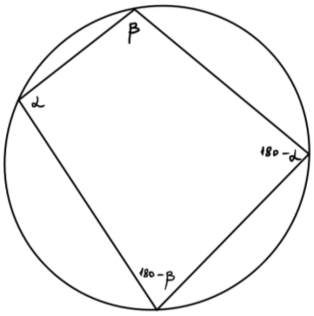
נתון מעגל שמרכזו O. נתון משולש ABD אשר 2 מצלעותיו משיקות למעגל בנקודות B ו-E והצלע ה-3 חותכת את המעגל בנקודה F ועוברת במרכז המעגל כמתואר בשרטוט. הנקודה C נמצאת על AO כך ש- $\sphericalangle OBC = 45°$.

הוכח:

1. C היא מרכז המעגל החסום במשולש ABD.
2. CD חוצה את זווית D

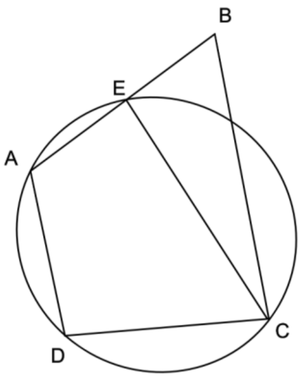


מרובע חסום במעגל



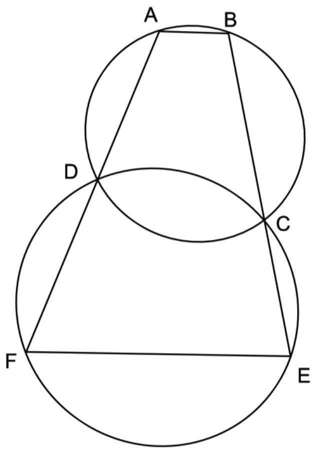
<u>משפט</u>:
במרובע חסום במעגל סכום כל 2 זוויות נגדיות הוא 180°.

<u>משפט הפוך</u>:
אם במרובע סכום זוג זווית נגדיות הוא 180° אז המרובע הוא **בר חסימה** (ניתן לחסימה בתוך מעגל)



<u>תרגיל 1</u>:
AE, AD, DC ו-CE הם מיתרים במעגל.
המשיכו את המיתר AE עד נקודה B וחיברו אותה עם נקודה C כך ש: $BC \parallel AD$.

הוכח: $\sphericalangle B = \sphericalangle ECD$.

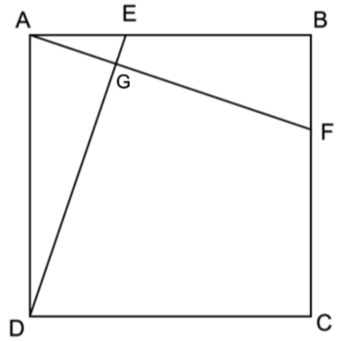


<u>תרגיל 2</u>:
שני מעגלים נחתכים בנקודות D ו-C. הנקודות A,B,E ו-F נמצאות על המעגלים כך שהקטעים AF ו-BE עוברים בנקודות D ו-C בהתאמה.

הוכח: $FE \parallel AB$.

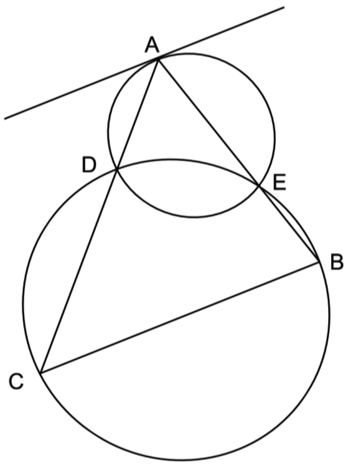
__תרגיל 3__:
מרובע $ABCD$ הוא ריבוע. הנקודות E ו-F נמצאות על צלעות הריבוע AB ו-BC בהתאמה כך ש-$EB = CF$.
AF ו-DE נחתכים בנקודה G.

הוכח:
1. מרובע $DGFC$ הוא בר חסימה במעגל.
2. $\sphericalangle GDF = \sphericalangle GCF$. *יש להעביר קווים כדי לראות את הזוויות.*



__תרגיל 4__:
שני מעגלים נחתכים בנקודות D ו-E. הנקודות A, B, ו-C נמצאות על המעגלים כך שהקטעים AC ו-AB עוברים בנקודות D ו-E בהתאמה.
דרך הנקודה A העבירו משיק למעגל העליון.

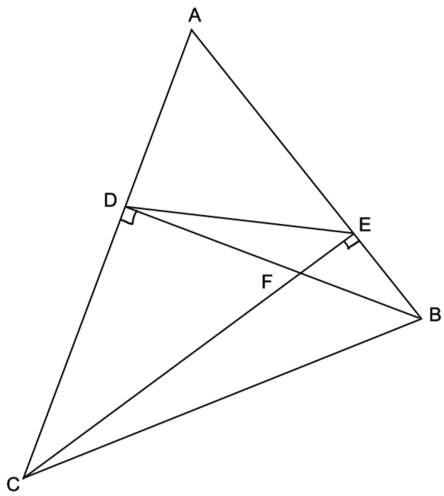
הוכח: המשיק למעגל בנקודה A מקביל למיתר BC במעגל התחתון.



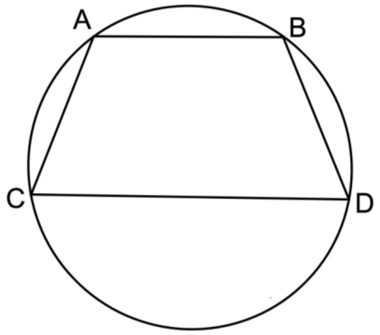
__תרגיל 5__:
CE ו-BD הם גבהים במשולש ABC הנחתכים בנקודה F.

1. הוכח: המרובע $ADFE$ הוא בר חסימה במעגל.
2. הוכח: המרובע $DEBC$ הוא בר חסימה במעגל.

* הדרכה: הורד גובה מקודקוד A והיעזר בסעיף 1



תרגיל 6: הוכח (ללא בניות עזר): כל טרפז החסום במעגל הוא טרפז שווה שוקיים.



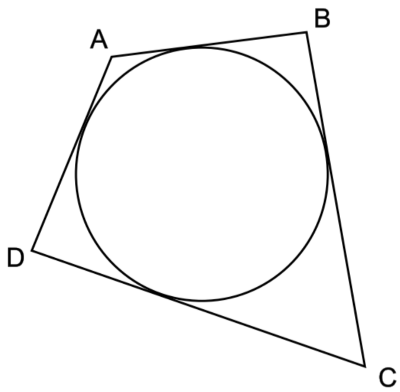
מרובע חוסם מעגל

משפט:
במרובע חוסם מעגל סכום זוג אחד של צלעות נגדיות שווה לסכום הזוג השני.

כלומר: **אם** $ABCD$ חוסם מעגל **אז** $AB + DC = AD + BC$

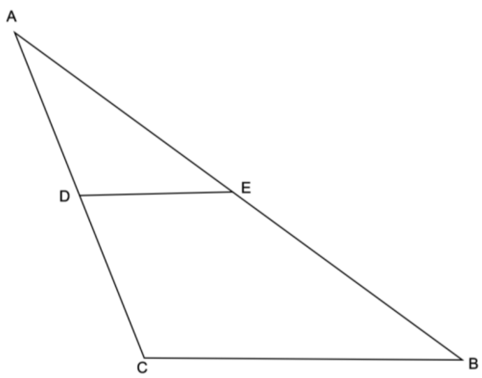
משפט הפוך:
אם במרובע קמור סכום זוג אחד של צלעות נגדיות שווה לסכום הזוג השני אז אפשר לחסום מעגל במרובע.

כלומר: **אם** $AB + DC = AD + BC$ **אז** ניתן לחסום מעגל במרובע $ABCD$



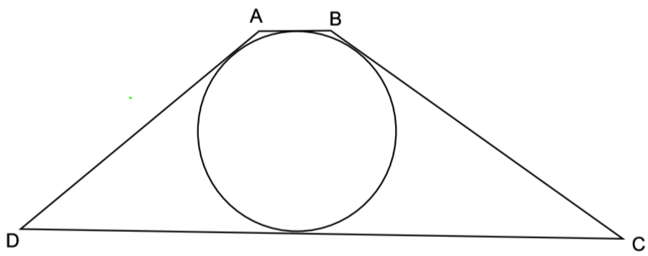
תרגיל 1:
DE הוא קטע אמצעים במשולש ABC.
$\mathrm{BC} = \frac{1}{3}(AC + AB)$.

הוכח:
ניתן לחסום מעגל במרובע $DEBC$.



תרגיל 2:
נתון מעגל החסום בתוך טרפז שווה שוקיים ABCD ($AD = BC$).
$\measuredangle ADC = 30°$. היקף הטרפז 64 ס"מ.

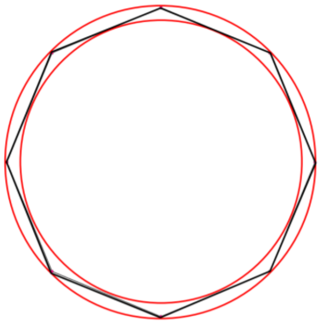
חשב את רדיוס המעגל.



תשובה:
הרדיוס שווה 4 ס"מ

משפט:
כל מצולע משוכלל ניתן לחסום במעגל

משפט:
בתוך כל מצולע משוכלל ניתן לחסום מעגל



*הערה: מצולע משוכלל הוא מצולע שכל צלעותיו וכל זוויותיו שוות.

שטח והיקף של מעגל

<u>שטח מעגל</u>

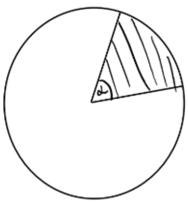
$$S_{\text{מעגל}} = \pi \cdot R^2$$

<u>היקף מעגל</u>

$$P_{\text{מעגל}} = 2\pi \cdot R$$

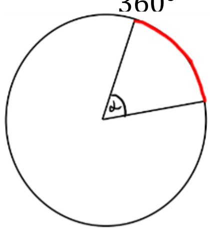
<u>שטח גזרה שנשענת על זווית מרכזית °α</u>

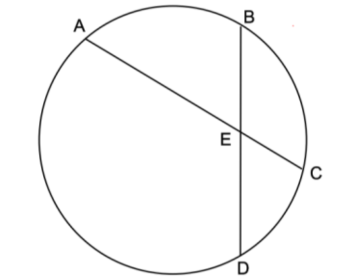
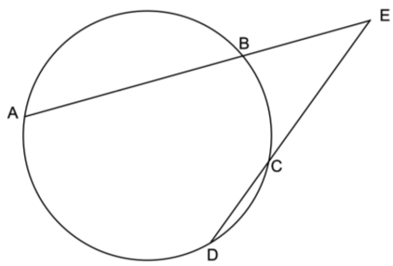
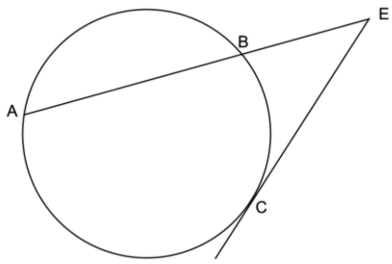
$$S_{\text{גזרה}} = \frac{\alpha°}{360°} \cdot S_{\text{מעגל}}$$



<u>אורך קשת שנשענת על זווית מרכזית α</u>

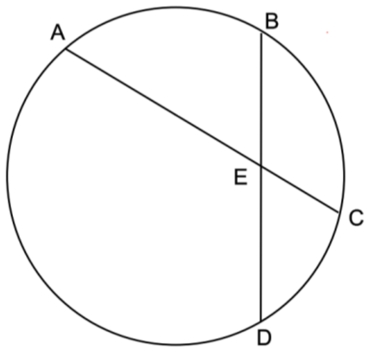
$$\text{אורך קשת} = \frac{\alpha°}{360°} \cdot P_{\text{מעגל}}$$



פרופורציה ודמיון במעגל		
אם שני מיתרים נחתכים במעגל אז מכפלת קטעי מיתר אחד שווה למכפלת קטעי מיתר שני כלומר אם AC ו-BD הם שני מיתרים הנחתכים בנקודה E אז: $\boldsymbol{AE\cdot EC=BE\cdot ED}$	אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים שני חותכים למעגל אז מכפלת חותך אחד בחלקו החיצוני שווה למכפלת החותך השני בחלקו החיצוני. כלומר אם AE ו-ED שני חותכים למעגל החותכים אותו בנקודות A,B,C ו-D אז: $\boldsymbol{AE\cdot EB=ED\cdot EC}$	אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק למעגל אז מכפלת חותך אחד בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק. כלומר אם AE חותך את המעגל בנקודות A ו-B, ו-EC משיק למעגל בנקודה C אז: $\boldsymbol{AE\cdot EB=EC^2}$
		

<u>תרגיל</u>:
נתון מעגל ובו שני מיתרים AC ו-BD הנחתכים בנקודה E.
$EC=2\,,AE=15\,,BD=11$

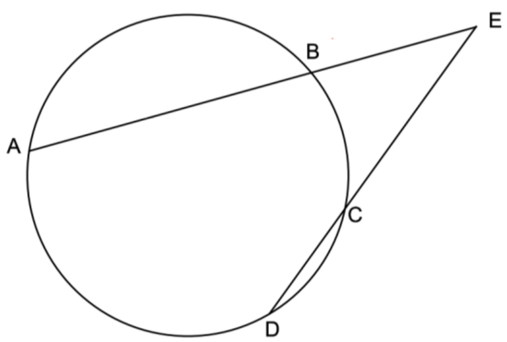
מצא את DE אם נתון $ED>BE$.



תשובה:

נתון מעגל. מנקודה E שמחוץ למעגל יוצאים שני חותכים למעגל החותכים אותו בנקודות A,B,C ו-D.
$BE=4\,,AB=6\,,CD=3$

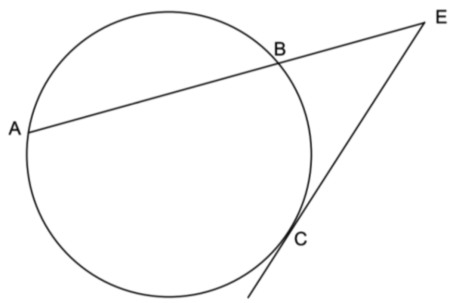
מצא את אורכו של ED



מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים חותך למעגל בנקודות A ו-B ומשיק למעגל בנקודה C.

$AB = 5 , CE = 6$

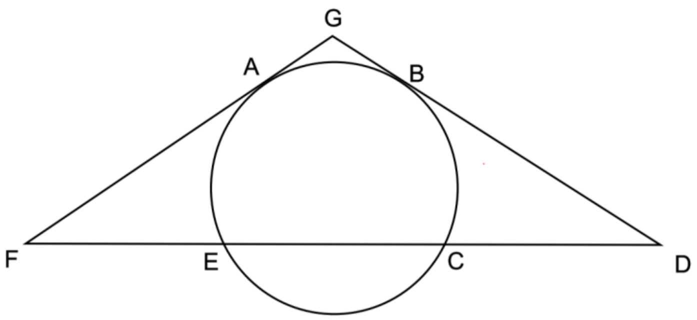
מצא את אורכו של AE



משולש FGD משיק למעגל בנקודות A ו-B וחותך אותו בנקודות E ו-C

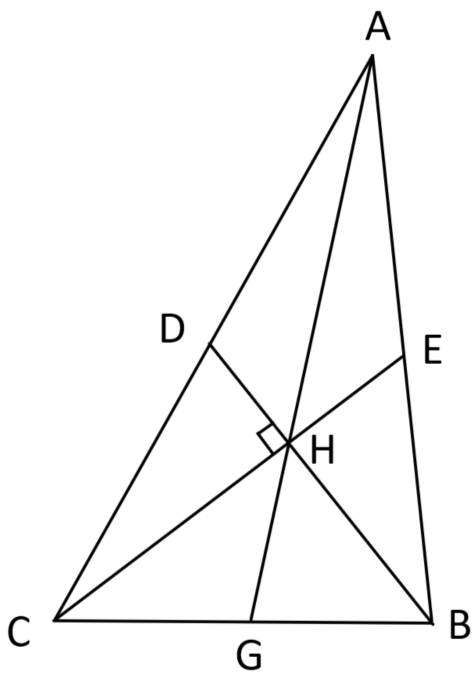
$FE = EC = CD$

הוכח $AF = BD$



שאלות לחזרה מעגל ופרופורציה

<u>שאלה 1</u>



BD ו-CE הנם תיכונים לצלעות AC ו-AB בהתאמה במשולש ABC. התיכונים הנ"ל נפגשים בנקודה H ומאונכים זה לזה. ישר היוצא מקודקוד A ועובר דרך נקודה H פוגש את הצלע BC בנקודה G.

א. 1. הוכח : $AH = BC$.
2. הוכח : $DE = HG$.

ב. 1. מצא מה היחס בין שטח המשולש ADH לשטח המשולש AHB.
2. פי כמה גדול שטח המעגל החוסם את משולש CHB משטח המעגל החוסם את משולש DEH.

ג. 1. האם יתכן שהנקודה H היא מרכז המעגל החוסם את משולש ABC?
2. האם בהכרח משולש DHC דומה למשולש EHB?

ד. נתון $BH = 12m, CH = 16m$.
1. הבע את שטח המשולש ABC באמצעות m.
2. נתון: $EG = 4\sqrt{73}$. מצא את m.

<u>תשובות:</u>

ב. 1. $\frac{S_{\Delta ADH}}{S_{\Delta AHB}} = \frac{1}{2}$
2. פי 4

ג. 1. לא
2. לא

ד. 1. $S_{\Delta ABC} = 288m^2$
2. $m = 2$.